

論文

有限位相空間における等径的近傍について

劉 剛^{†a)} 江口 正義[†] 不破 泰^{††} 中村 八束^{††}

Isodiametric Neighborhoods in Finite Topological Spaces

Gang LIU^{†a)}, Masayoshi EGUCHI[†], Yasushi FUWA^{††}, and Yatsuka NAKAMURA^{††}

あらまし 有限位相空間は任意の離散空間に任意形状の近傍をもつ位相空間であり、離散空間上の幾何学と画像処理に有効な理論として研究されてきた。以前、筆者らはプリント配線パターンの欠陥検査の研究であらゆる方向の直線状パターンを一様に膨張・収縮するためにある1種類の近傍を用いた。本論文では、このような近傍を等径的近傍と名づけて、その性質を解析する。次に、これらの性質を利用して基準量10以下のすべての等径的近傍を求め、円図形の一様な膨張・収縮と図形間の距離計算という二つの画像処理問題に適用し、等径的近傍の有効性を示す。

キーワード 2値画像解析, 有限位相空間, 等径的近傍, 膨張, 分解

1. ま え が き

2値画像処理や画像解析においては、離散空間上の位相幾何学が必要となる。離散位相幾何学の研究で近傍は最も重要な概念である。従来のデジタル幾何学では主に4近傍あるいは8近傍などの限定された近傍のみが使われている。最近、任意の離散空間に任意の形状の近傍をもつ位相空間である有限位相空間が導入された[1], [2]。更に、有限位相空間におけるデジタル線分の考察[3], [4]や粗近傍という特殊な近傍を用いた画像処理とその有効性が示された[5]。有限位相空間(finite topological space)の定義は次のとおりである。

(X, U) が有限位相空間とは、 X は非空な任意の集合であり、 X の各点 x に対して、 $U(x)$ が X の部分集合であること。このとき、 U を X の有限位相、 $U(x)$ を x の近傍と呼ぶ。

通常の画像処理では、空間 X は2次元正方格子空間である。 X の要素 x を画素と考えると、画素 x の近傍 $U(x)$ は、 x と隣接しているとみなせる画素の集合である。画像処理の対象・目的に応じて、それにふさわ

しい近傍を定めることにより、適切な処理ができるようになる。文献[6], [7]で、筆者らはプリント基板の配線パターンがほぼ同じ太さのいろいろな方向の線図形で構成されていることに着目し、ある種の近傍を用いて、あらゆる方向のパターンを一様に膨張ないし収縮させ欠陥の検出を実現した。その際、膨張・収縮の基準量(2, 3, ..., 14 pixels)に対応し、大きさの異なる適切な近傍(今後等径的近傍と呼ぶ)を用いた。同じ膨張・収縮の基準量をもつ等径的近傍は一般に複数個存在する。しかし、これらの等径的近傍を見つけることは大変困難である。前研究では、試行錯誤の末、基準量の小さい場合に限り等径的近傍の一部を算出した。

与えられた基準量をもつすべての等径的近傍が算出できるようになれば、画像処理への多くの利用が考えられる。本論文の主な目的は等径的近傍の厳密な定義を与え、その諸性質を明らかにすることである。等径的近傍の性質が明らかになるほどそれを求めるアルゴリズムの作成が容易になる。2.で等径的近傍の定義を与える。3.では、等径的近傍の45°, 135°方向の径の長さについての検討を行う。4.では、3.の結果を利用して、等径的近傍の存在領域を求める。以上の結果を用いると、基準量の小さい場合には、発見的ではあるが、容易にしかもすべての等径的近傍を求めることが可能になる。5.では、円図形の等径的な膨張・収縮並びに図形間の距離計算という二つの処理に適用し、等径的近傍による画像処理の有効性を示す。

[†] 東京商船大学商船学研究所, 東京都

Graduate School of Mercantile Marine Science, Tokyo University of Mercantile Marine, Tokyo, 135-8533 Japan

^{††} 信州大学工学部情報工学科, 長野市

Faculty of Engineering, Shinshu University, Nagano-shi, 380-0922 Japan

a) E-mail: liugang2000@hotmail.com

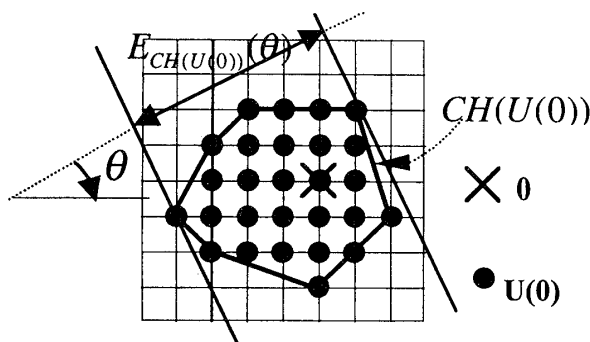


図1 等径的近傍の説明図

Fig. 1 Illustration of isodiametric neighborhoods.

2. 等径的近傍の定義

本論文では、離散空間として $X = Z^2$ (Z は整数全体の集合) を考える。また位相としては、 $0 \in U(0)$ を満たす任意の近傍を考え、 x の近傍は $U(x) = U(0) + x$ で与える。 $U(x)$ は $U(0)$ を平行移動したものとなるため、以後の近傍に関する議論の大部分は $U(0)$ に限定できる。

ここで、画像処理で知られている図形の指定された方向の径という概念を用いて [9]、近傍の径の、方向による違いを評価することを考える。任意の近傍 $U(0)$ に対して、 $U(0)$ の凸包 $CH(U(0))$ を作る (図1参照)。指定された方向 θ (x 軸の正方向との角度で、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) の直線への、この凸包 $CH(U(0))$ の、正射影の長さ (1 pixel を単位長とする) を近傍 $U(0)$ の、方向 θ の径 $E_{CH(U(0))}(\theta) \in R$ と定義する。 $E_{CH(U(0))}(0^\circ), E_{CH(U(0))}(90^\circ)$ は整数となる。

径について次の定理が成立する。

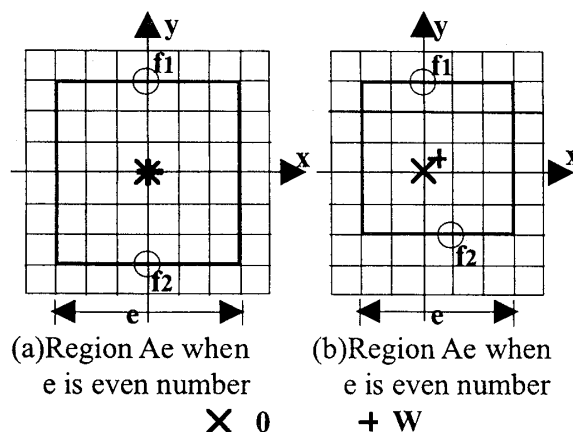
[定理 1] 任意の近傍 $U(x_1)$ を、 Z^2 内で平行移動 (x, y 座標方向のどちらへも整数長だけ移動すること) するか任意な格子点に関して 180° 回転した近傍を $V(x_2)$ とすると、 $E_{CH(U(x_1))}(\theta) = E_{CH(V(x_2))}(\theta)$ が成り立つ。

定理 1 の証明は容易であり、省略する。次に、等径的近傍の定義を与える。

[定義 1] $e \in N$ とする。次の二つの条件を満たす近傍 $U(0)$ を基準量 e の等径的近傍と呼ぶ。基準量 e を明示したいときには、 $U(0)$ のことを $U_e(0)$ と書く。

$$(1) E_{CH(U(0))}(0^\circ) = E_{CH(U(0))}(90^\circ) = e$$

(2) $U(0)$ は、 0° と 90° 方向の径が e である近傍の中で長径と短径の差が最小である。すなわち、 $\delta_V \equiv \max \{E_{CH(V(0))}(\theta); \theta \in [0^\circ, 180^\circ]\} -$

図2 等径的近傍の存在領域 A_e Fig. 2 Existence region A_e of isodiametric neighborhoods.

$\min \{E_{CH(V(0))}(\theta); \theta \in [0^\circ, 180^\circ]\}$ とおくと、 $\delta_U \leq \delta_V$ が $E_{CH(V(0))}(0^\circ) = E_{CH(V(0))}(90^\circ) = e$ である任意の近傍 $V(0)$ に対して成立する。

等径的近傍^(注1)は連続空間における円がもつ性質の一つを離散空間に拡張したものである。

3. 等径的近傍の基本性質

本論文では、簡単のため、 $CH(U(0)) \cap Z^2 = U(0)$ という条件を満たす近傍のみを考える。この条件を満たす等径的近傍からこの条件を満たさない等径的近傍を求めることは容易である。等径的近傍の定義により、任意の基準量 e に対し、等径的近傍が少なくとも一つ存在することがわかる。しかし、定義を利用して、等径的近傍を求めるようにすると、定義の条件 (1) を満たすすべての近傍についての長径と短径の差の計算が必要となるため、 e が少し大きくなると計算量は膨大となり、不可能になる。そこで、等径的近傍のもっている性質をなるべくたくさん発見することが重要となる。それらの性質を同時に満たす近傍の個数は単に定義 1 の (1) を満たす近傍の個数より大幅に減るからである。

まず、 e の偶数、奇数に応じて等径的近傍の存在領域がそれぞれ与えられる。

[定理 2] 図 2 の例に示すような点 $W \in R^2$ を中心点とする辺長 e の正方形を A_e とする。ここで、 e が偶数のとき、 W は原点であり、 e が奇数のとき、 W

(注 1): 筆者らは、文献 [7], [8] において、等方的な (isotropic) 近傍と呼んだが、長径と短径の差が最小という性質を表す用語としては等径的 (isodiametric) 近傍の方が適切と考え、呼称を改めた。

の座標は $(0.5, 0.5)$ である．すると，基準量 e の等径的近傍 $U_e(0)$ は， Z^2 の中で適当に平行移動させると， $A_e \cap Z^2$ の中に含まれる．

次に，等径的近傍の定義により同じ基準量の等径的近傍間に次の対称性が成立する．

[定理 3] 基準量 e の等径的近傍 $U_e(0) \subset A_e \cap Z^2$ を考える．中心点 W に関して $U_e(0)$ と点対称な近傍， W を通る水平直線，垂直直線，傾き 45° の直線，傾き 135° の直線に関して $U_e(0)$ とそれぞれ線対称な近傍はまた基準量 e の等径的近傍である．

3.1 等径的近傍の $45^\circ, 135^\circ$ 方向の径の長さに関する性質 (その 1)

この節では，任意の等径的近傍 $U_e(0)$ の径 $E_{CH(U_e(0))}(45^\circ), E_{CH(U_e(0))}(135^\circ)$ について考察する．

[定理 4] e を任意の自然数とする． m が $m\frac{\sqrt{2}}{2} < e < (m+1)\frac{\sqrt{2}}{2}$ を満たす自然数とすると，任意な等径的近傍 $U_e(0)$ の $E_{CH(U_e(0))}(45^\circ), E_{CH(U_e(0))}(135^\circ)$ は $m\frac{\sqrt{2}}{2}$ または $(m+1)\frac{\sqrt{2}}{2}$ に等しい．

定理 4 を証明するために，以下に述べる三つの補題が必要となる．

[補題 1] 次の (条件 1) が満たされるならば，定理 4 が成立する．

(条件 1): すべての基準量 $e > 1$ に対し，次の条件を満たす一つの近傍 $V(0) \subset A_e$ が見つかる．

$$E_{CH(V(0))}(0^\circ) = E_{CH(V(0))}(90^\circ) = e,$$

$$\delta_V < \min \left\{ e - (m-1)\frac{\sqrt{2}}{2}, (m+2)\frac{\sqrt{2}}{2} - e \right\} \quad (1)$$

ここで， $\delta_V \equiv \max \{E_{CH(V(0))}(\theta); \theta \in [0^\circ, 180^\circ]\} - \min \{E_{CH(V(0))}(\theta); \theta \in [0^\circ, 180^\circ]\}$ ．

(補題 1 の証明) まず， $e = 1$ のときを考える．このとき， $m = 1$ であることがわかる．他方，等径的近傍 $U_1(0)$ の $E_{CH(U_1(0))}(45^\circ), E_{CH(U_1(0))}(135^\circ)$ は $\sqrt{2}$ に等しいことが簡単にわかる．ゆえに， 45° と 135° の径は $(m+1)\frac{\sqrt{2}}{2}$ で与えられる．次に， $e > 1$ の場合を考える (以下図 3 参照)．任意の等径的近傍 $U_e(0)$ は， $\delta_U \leq \delta_V$ を満たすので，式 (1) と合わせて $\delta_U < \min \{e - (m-1)\frac{\sqrt{2}}{2}, (m+2)\frac{\sqrt{2}}{2} - e\}$ が成り立ち次の二つの式を得る．

$$\delta_U < e - (m-1)\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$\delta_U < (m+2)\frac{\sqrt{2}}{2} - e \quad (3)$$

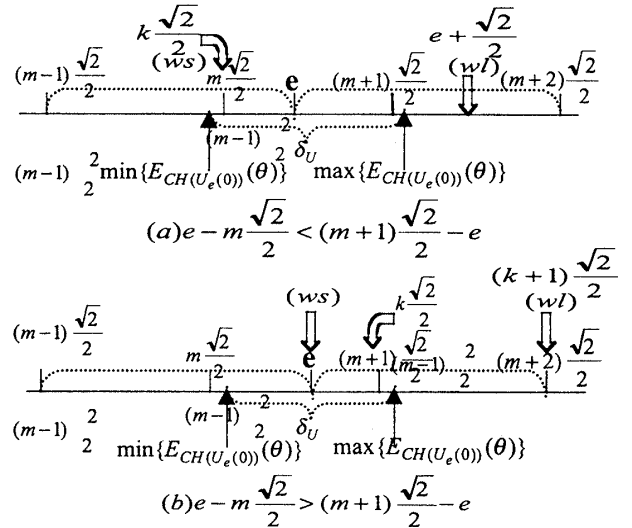


図 3 補題 1 に関する説明図

Fig. 3 Illustration about the lemma 1.

また，等径的近傍の定義より，

$$\min \{E_{CH(U_e(0))}(\theta)\} \leq e \leq \max \{E_{CH(U_e(0))}(\theta)\} \quad (4)$$

が成り立つ．式 (2)，(4) より，

$$\begin{aligned} e - \min \{E_{CH(U_e(0))}(\theta)\} &\leq \max \{E_{CH(U_e(0))}(\theta)\} - \min \{E_{CH(U_e(0))}(\theta)\} \\ &= \delta_U < e - (m-1)\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

が成り立ち次の式を得る．

$$(m-1)\frac{\sqrt{2}}{2} < \min \{E_{CH(U_e(0))}(\theta)\} \quad (5)$$

同様に，式 (3)，(4) より，

$$\max \{E_{CH(U_e(0))}(\theta)\} - e \leq \delta_U < (m+2)\frac{\sqrt{2}}{2} - e$$

が成り立ち次の式を得る．

$$\max \{E_{CH(U_e(0))}(\theta)\} < (m+2)\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (6)$$

式 (5)，(6) より

$$\begin{aligned} (m-1)\frac{\sqrt{2}}{2} &< \min \{E_{CH(U_e(0))}(\theta)\} \\ &\leq E_{CH(U_e(0))}(\theta) \\ &\leq \max \{E_{CH(U_e(0))}(\theta)\} < (m+2)\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

が満たされる．すなわち，次の式が成り立つ．

$$(m-1)\frac{\sqrt{2}}{2} < E_{CH(U_e(0))}(\theta) < (m+2)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

また， $E_{CH(U_e(0))}(45^\circ)$ と $E_{CH(U_e(0))}(135^\circ)$ は $\frac{\sqrt{2}}{2}$ の自然数倍にしかならないことが容易にわかる．以上のことより， $E_{CH(U_e(0))}(45^\circ)$ と $E_{CH(U_e(0))}(135^\circ)$ は $m\frac{\sqrt{2}}{2}$ または $(m+1)\frac{\sqrt{2}}{2}$ に等しい． (証明終)

(条件 1) を証明するため，次の補題 2 を与え

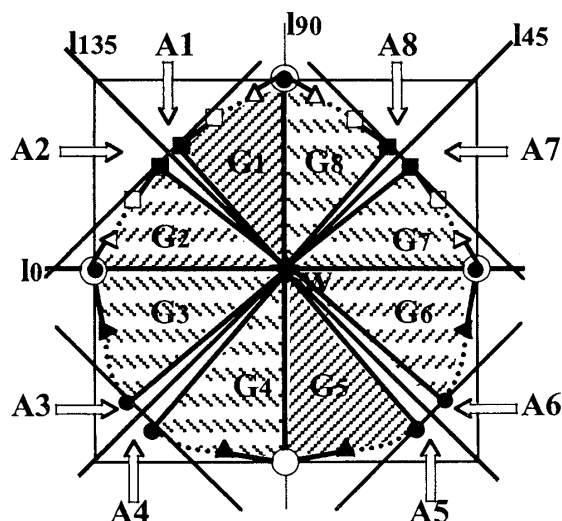


図4 補題2に関する説明図
Fig.4 Illustration about the lemma 2.

る. 補題2を述べる前に, いくつかの準備が必要となる. まず, 基準量 e に対し, 次のような自然数 k を決める (以後 k と書けばこの k を指す). $e - m\frac{\sqrt{2}}{2} < (m+1)\frac{\sqrt{2}}{2} - e$ の場合, $k = m$ である (図3(a)参照). $e - m\frac{\sqrt{2}}{2} > (m+1)\frac{\sqrt{2}}{2} - e$ の場合, $k = m+1$ である (図3(b)参照). 次に, 図4に示すように, A_e の中心点 W を通る傾き $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ の4本の直線 $l_0, l_{45}, l_{90}, l_{135}$ で, A_e を8領域に分け, それぞれ A_1, A_2, \dots, A_8 とする.

[補題2] 次の(条件2)が満たされるならば, (条件1)が成立する.

(条件2): 任意な基準量 $e > 1$ に対し, 二つの図形 $G_1 \subseteq A_1, G_5 \subseteq A_5$ (図4)が存在し, $E_{CH}(G_1, G_5)(90^\circ) = e$ と

$$ws \leq E_{CH}(G_1, G_5)(\theta) < wl, \theta \in [90^\circ, 135^\circ]$$

を満たす. ここで, ws, wl は

$$wl - ws = \min \left\{ e - (m-1)\frac{\sqrt{2}}{2}, (m+2)\frac{\sqrt{2}}{2} - e \right\} \quad (7)$$

を満たす正数である. 具体的には, $k\frac{\sqrt{2}}{2} < e$ (図3(a))の場合, $ws = k\frac{\sqrt{2}}{2}, wl = e + \frac{\sqrt{2}}{2}$. $k\frac{\sqrt{2}}{2} > e$ (図3(b))の場合, $ws = e, wl = (k+1)\frac{\sqrt{2}}{2}$ とする.

(補題2の証明) (条件2)が満たされるならば, 図4に示すように, l_{135} に関してそれぞれ図形 G_1, G_5 と対称な図形 $G_2 \subseteq A_2, G_6 \subseteq A_6$ を求める. $E_{CH}(G_2, G_6)(\theta) = E_{CH}(G_1, G_5)(270^\circ - \theta), \theta \in [135^\circ, 180^\circ]$ が簡単に証明できるので, $ws \leq E_{CH}(G_1, G_2, G_5, G_6)(\theta) <$

$wl, \theta \in [90^\circ, 180^\circ]$ が成立する. 更に, l_{90} に関してそれぞれ図形 G_1, G_2, G_5, G_6 と対称な図形 G_8, G_7, G_4, G_3 を求める. $E_{CH}(G_3, G_4, G_7, G_8)(\theta) = E_{CH}(G_1, G_2, G_5, G_6)(180^\circ - \theta), \theta \in [0^\circ, 90^\circ]$ が成立する. これら八つの図形の和集合の凸包を求め, 凸包に含まれる格子点の集合を近傍 $V(0)$ とする. 以上により, $V(0)$ について, $ws \leq E_{CH}(V(0))(\theta) < wl, \theta \in [0^\circ, 180^\circ]$ が成立する. すると, $\delta_V < wl - ws$ が満たされる. これと(条件2)の式(7)より,

$$\delta_V < \min \left\{ e - (m-1)\frac{\sqrt{2}}{2}, (m+2)\frac{\sqrt{2}}{2} - e \right\}$$

が成り立つ. $E_{CH}(V(0))(0^\circ) = E_{CH}(V(0))(90^\circ) = e$ であることは容易にわかる. したがって, (条件1)が成立する. (証明終)

(条件2)を証明するため, まず図5(a)に示す領域 $T_1 \subset A_e$ を考える. T_1 は二つの線分 $\overline{f_1 f_2}, \overline{f_1 f_3}$ と2本の直線 l_c, l_b , で囲まれた領域である (線上の点も含める). ここで f_1, f_2 は, e が偶数のとき座標がそれぞれ $(0, \frac{e}{2}), (0, -\frac{e}{2})$ であり, e が奇数のときは座標がそれぞれ $(0, \frac{e+1}{2}), (1, -\frac{e-1}{2})$ で与えられる格子点である (図2参照). 図5(a)に示すように, l_a は格子点 f_1 を通る傾き 135° の直線, l_b は f_1 から距離 $k\frac{\sqrt{2}}{2}$ で傾き 45° の直線である. $f_3 \in l_b$ は $|\overline{f_1 f_3}| < wl$ ((条件2)の wl) を満たし, l_c 上または l_c の上方にあり, かつ f_3 から l_a までの距離 r を最大^(注2)にするような格子点である. また, l_r は直線 l_{135} と距離 r の直線とし, T_2 は直線 l_r と l_{135} で挟まれた領域とする (線上の点も含める). 次に, (条件2)の ws, wl を用いて, 次の(条件3)を与える.

(条件3): 以下の(1), (2)を満たす格子点の集合 $D \subset (T_1 \cap \mathbb{Z}^2)$ が存在する.

(1) 凸図形 $P \equiv CH(f_1, f_2, D, f_3)$ について

$$ws \leq E_P(\theta) < wl, \theta \in [90^\circ, 135^\circ]$$

が満たされる.

(2) f_2 と f_3 の間の P の境界 (図5(a)に点線で示されている部分) 上にある格子点のすべてを x 座標の増加順に並べた集合を $S = \{s_1 (= f_2), s_2, \dots, s_n (= f_3)\}$ とおく. すると, $\exists s_i \in S, s_i \in T_2$ が成立する (図5(b)参照).

[補題3] (条件3)が満たされるならば, (条件2)が成立する.

(補題3の証明) (条件3)が満たされるならば,

(注2): r を大きくするほど後述の(条件3)の(2)が成立しやすくなる.

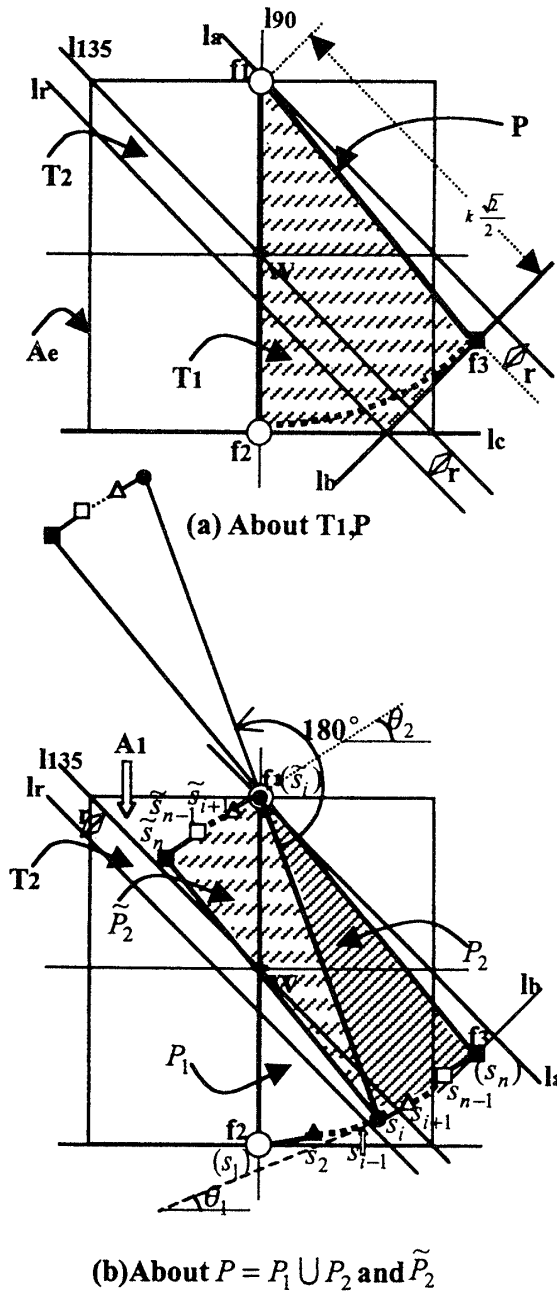


図5 補題3に関する説明図
Fig.5 Illustration about the lemma 3.

図5(b)に示すように、凸図形 P より $\overline{f_1 s_i}$ を共有する二つの凸図形 $P_1 \equiv CH(f_1, s_1, s_2, \dots, s_i)$ と $P_2 \equiv CH(f_1, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$ が得られる。 $\overline{s_{i-1} s_i}$ と水平線のなす角を $\theta_1, 0^\circ \leq \theta_1 < 45^\circ$ とおくと、 P_1, P_2 に対し、 $ws \leq E_{P_1}(\theta) < wl, \theta \in [90^\circ, \theta_1 + 90^\circ]$ と $ws \leq E_{P_2}(\theta) < wl, \theta \in [\theta_1 + 90^\circ, 135^\circ]$ が成立する。図5(b)に示すように、 P_2 を f_1 の回りで 180° 回転した後、平行移動すると、 P_2 と合同な凸図形 $\tilde{P}_2 \equiv CH(s_i, \tilde{s}_i (= f_1), \tilde{s}_{i+1}, \dots, \tilde{s}_n)$ が得

られる。ここで、 s_i から l_{135} までの距離が r より大きくないことから、 $\{\tilde{s}_i, \dots, \tilde{s}_n\} \subset A1 \cap Z^2$ であることがわかる。前章の定理1により、 $E_{\tilde{P}_2}(\theta) = E_{P_2}(\theta), \theta \in [\theta_1 + 90^\circ, 135^\circ]$ が満たされるので、 $ws \leq E_{\tilde{P}_2}(\theta) < wl, \theta \in [\theta_1 + 90^\circ, 135^\circ]$ が成立する。次に、凸図形 $P_3 \equiv CH(P_1, \tilde{P}_2)$ を考える。 S 及び \tilde{P}_2 の決め方より、図5(b)に示すように、 $\overline{s_i s_{i+1}}$ と水平線のなす角を θ_2 とすると、 $\theta_2 \geq \theta_1$ が簡単に証明できる。これより、

$$E_{P_3}(\theta) = E_{P_1}(\theta), \theta \in [90^\circ, \theta_1 + 90^\circ],$$

$$E_{P_3}(\theta) = E_{P_1}(\theta) = E_{\tilde{P}_2}(\theta) = E_{P_2}(\theta), \theta \in [\theta_1 + 90^\circ, \theta_2 + 90^\circ];$$

$$E_{P_3}(\theta) = E_{\tilde{P}_2}(\theta) = E_{P_2}(\theta), \theta \in [\theta_2 + 90^\circ, 135^\circ]$$

であることが容易に示せる。したがって、 $ws \leq E_{P_3}(\theta) < wl, \theta \in [90^\circ, 135^\circ]$ が成立する。最後に、凸図形 $G_5 \subseteq A5$ を $G_5 \equiv CH(W, s_1, \dots, s_i)$ とし、凸図形 $G_1 \subseteq A1$ を $G_1 \equiv CH(W, \tilde{s}_i, \dots, \tilde{s}_n)$ とする(図4, 図5参照)。 $CH(G_1, G_5) = P_3$ なので、

$$E_{CH(G_1, G_5)}(\theta) = E_{P_3}(\theta), \theta \in [90^\circ, 135^\circ]$$

が成立し、(条件2)が成り立つ。(証明終)

以上のことより、(条件3)が証明できれば、(条件2)、そして(条件1)、更に定理4が成立する。現時点では、(条件3)を数学的に証明することはできていない。本論文では、計算機で(条件3)が成立するかどうかを確かめた。アルゴリズムの主な手順は次のとおりである。

(1) 領域 T_1 (図5(a))の中の次の条件を満たす格子点 h を全部見つけ、その集合を $H \subset Z^2$ とする。
 $ws \leq |f_1 h| < wl$ (ws, wl は(条件2)で与えられた正数)

(2) 集合 H の点を y 座標の小さいものから順に並べる。同じ y 座標をもつ H の要素の中から x 座標が最大の格子点を見つて、それらを集め、集合 D とする。

(3) 凸包 $P = CH(f_1, f_2, D, f_3)$ を求める。

(4) 上記の P が(条件3)を満たすかどうかチェックする。

$e = 2, 3, \dots, 3000$ に対して、アルゴリズムを実行し、(条件3)が成立することを確認した。これ以上の e に対しても(条件3)は成立すると推測される。数学的な証明は今後の課題である。

3.2 等径的近傍の $45^\circ, 135^\circ$ 方向の径の長さに関する性質(その2)

定理4では等径的近傍 $U_e(0)$ の $E_{CH(U_e(0))}(45^\circ)$,

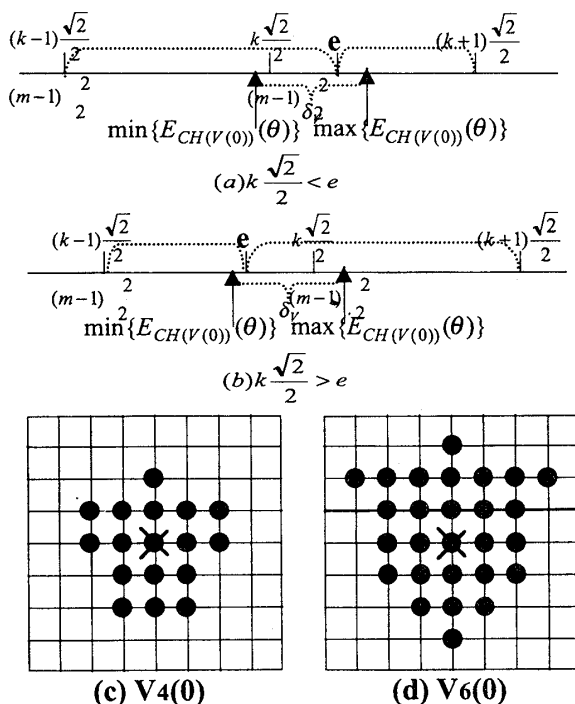


図6 性質1に関する説明図
Fig. 6 Illustration about property 1.

$E_{CH}(U_e(0))(135^\circ)$ がまだ特定されていない。等径的近傍を求めるため、 $E_{CH}(U_e(0))(45^\circ)$, $E_{CH}(U_e(0))(135^\circ)$ が一意に特定できることが望ましい。そこで、定理4を精密にした次の性質が成立するかどうかを検討する。
[性質1] $e \geq 2$ とする。等径的近傍 $U_e(0)$ は $E_{CH}(U_e(0))(45^\circ) = E_{CH}(U_e(0))(135^\circ) = k\frac{\sqrt{2}}{2}$ を満たす。

前節と同じ考え方でこの性質の正しさを調べる。まず、(条件1)を次の(条件1')に変える。
(条件1')：与えられた基準量 $e \geq 2$ に対し、次の条件を満たす一つの近傍 $V(0) \subset A_e$ が見つかる(図6(a), (b)参照)。

$$E_{CH}(V(0))(0^\circ) = E_{CH}(V(0))(90^\circ) = e,$$

$$\delta_V < \min \left\{ e - (k-1)\frac{\sqrt{2}}{2}, (k+1)\frac{\sqrt{2}}{2} - e \right\}$$

すると、(条件1')が満たされるならば、前節の補題1の証明と同じ考え方で、性質1が成立することは容易にわかる。次に、 ws, wl のみを次のように変えた(条件2)と(条件3)をそれぞれ(条件2')と(条件3')とする。

$wl - ws = \min \left\{ e - (k-1)\frac{\sqrt{2}}{2}, (k+1)\frac{\sqrt{2}}{2} - e \right\}$.
具体的には、 $k\frac{\sqrt{2}}{2} < e$ の場合、 $ws = k\frac{\sqrt{2}}{2}, wl = (2k+1)\frac{\sqrt{2}}{2} - e$ とし、 $k\frac{\sqrt{2}}{2} > e$ の場合、 $ws = e, wl = 2e - (k-1)\frac{\sqrt{2}}{2}$ とする。

すると、(条件3')が満たされるならば、(条件2'), そして(条件1')更に性質1が成立する。(条件3')が成立するかどうかは、前節のアルゴリズムを用いて調べる(アルゴリズム中の ws, wl を前述のように変えればよい)。

調べた結果、基準量 $e = 2, 3, \dots, 1000$ の中では、4, 6, 35, 52, 64, 69, 81, 88, 105, 233 など50個の e を除いて、(条件3')が満たされる。すなわち、(条件3')を用いる方法では、以上の50個の e に対しては、性質1が満たされるとはいえない。しかし、これら50個の e に対して、(条件1')を満たすような近傍が見つけれられる可能性がある。例えば、図6(c)に示すような近傍 $V_4(0)$ について、 $e = 4, k = 6, E_{CH}(V_4(0))(0^\circ) = E_{CH}(V_4(0))(90^\circ) = 4$ であり、

$$\delta_{V_4} = 6\frac{\sqrt{2}}{2} - 4,$$

$\min \left\{ e - (k-1)\frac{\sqrt{2}}{2}, (k+1)\frac{\sqrt{2}}{2} - e \right\} = 4 - 5\frac{\sqrt{2}}{2}$ であることが確かめられるので、 $\delta_{V_4} < \min \left\{ e - (k-1)\frac{\sqrt{2}}{2}, (k+1)\frac{\sqrt{2}}{2} - e \right\}$ が成り立つ。したがって、 $e = 4$ の場合性質1が成立する。同じように、図6(d)に示すような近傍 $V_6(0)$ も(条件1')を満たすことがわかるので、 $e = 6$ の場合も性質1が成立する。また、 $e = 35$ のときも、(条件1')を満たす近傍が見つかる。ゆえに、 $2 \leq e \leq 51$ に限定すると、性質1が成立することがわかった。現時点では、任意の $e \geq 2$ に対して、性質1が成立するかどうかはわかっていないが、成立する可能性が高いと考えられる。

次章では、性質1が成り立つ e に対し、等径的近傍が存在する領域について更に調べる。

4. 性質1を満たす等径的近傍の存在領域

この章の e は性質1が成り立つ e のこととする。等径的近傍 $U_e(0)$ に対し $E_{CH}(U_e(0))(45^\circ) = E_{CH}(U_e(0))(135^\circ) = k\frac{\sqrt{2}}{2}$ という性質をもつため、次の定理が成り立つ。

[定理5] 基準量 e の任意な等径的近傍を $U_e(0) \subset A_e$ とする。 B_e は図7(a)に示すような辺長 $k\frac{\sqrt{2}}{2}$ 、各辺の傾きが 45° と 135° の正方形とする。また、 B_e の各辺とも必ず一つ以上の格子点を通るとする。すると、 B_e の Z^2 における平行移動によって、 $U_e(0) \subset B_e \cap Z^2$ 。

前章の定理3により、等径的近傍のいろいろな対称軸に関する対称な図形が再び等径的近傍となることがわかっている。これを用いて、 A_e より小さい存在領域 C_e を求めることができる(図7(b))。 C_e に含まれ

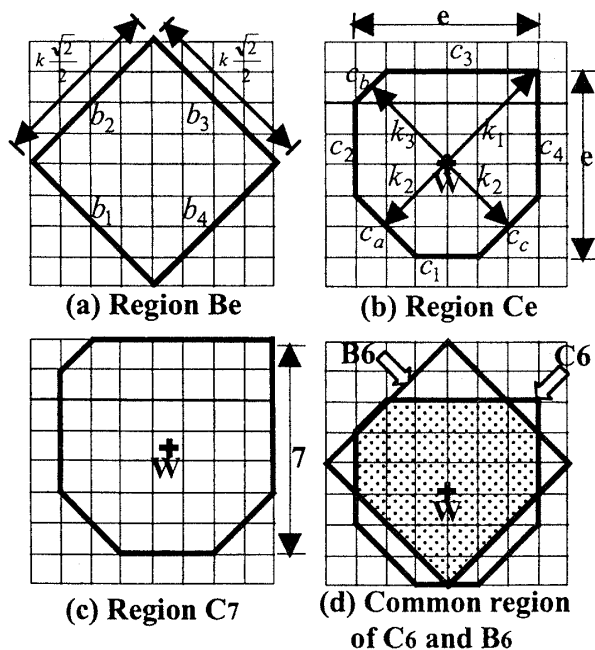


図7 性質1を満たす等径的近傍の存在領域
Fig. 7 Existence regions of isodiametric neighborhoods if e satisfying property 1.

る等径的近傍が全部求まれば、 W に関して点対称な図形、 W を通る水平直線、垂直直線、傾き 45° の直線、傾き 135° の直線に関してそれぞれ対称な図形を求めることで、 A_e に含まれるすべての等径的近傍が求められる。 C_e について、次の定理が成り立つ。証明は別の論文にまわし、ここでは省略する。

[定理6] $U_e(0)$ を $A_e \cap Z^2$ に含まれる任意の等径的近傍、 C_e を次の (a), (b), (c) を満たす図形とする。(図7(b) 参照)

(a) $C_e \subset A_e$, c_a は傾き 135° の辺, c_b, c_c は傾き 45° の辺。

(b) $k_1 = e\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。また、 k が偶数のとき、 $k_2 = k\frac{\sqrt{2}}{4}$ 、 k が奇数のとき、 $k_2 = (k-1)\frac{\sqrt{2}}{4}$ 。

(c) $k = \frac{3}{2}e$ のとき、 $k_3 = e\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。 $k < \frac{3}{2}e$ のとき、 $k_3 = (e-1)\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

すると、 $U_e(0)$ または $U_e(0)$ と対称な等径的近傍の少なくとも一つは $C_e \cap Z^2$ に含まれる^(注3)。

e が偶数の場合の C_e を図7(b) に示した。 e が奇数の場合は C_7 を一例として与える (図7(c))。

以下では二つの存在領域 B_e, C_e を用いて、等径的近傍の、より小さい存在領域を求める問題について考察する。

まず、 B_e を Z^2 の中で適切に平行移動し、固定されている C_e との共通部分を考える。この共通部分が、

等径的近傍を少なくとも一つ含むとき有効な共通部分と呼ぶ。図7(d) に C_6 と B_6 の一つの有効な共通部分を示す。 B_e の平行移動の仕方を変え、 C_e との有効な共通部分を得るごとにその中の等径的近傍を全部求めることができるならば、対称図形を作ることにより、 C_e の中のすべての等径的近傍を求めることができる。

次の定理によりすべての有効な共通部分が与えられる。

[定理7] 領域 B_e を Z^2 の中で平行移動したものを \tilde{B}_e と書く。共通部分 $D_e = \tilde{B}_e \cap C_e$ が有効な共通部分となる必要条件は、

$$\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}, b_i \cap C_e \neq \emptyset, c_i \cap B_e \neq \emptyset$$

である。ここで、 b_i は \tilde{B}_e の四つの境界 (図7(a) 参照)、 c_i は C_e の四つの水平、垂直境界である (図7(b) 参照)。

(定理7の証明) $D_e = \tilde{B}_e \cap C_e$ より、

$$E_{CH(D_e)}(0^\circ) \leq e, E_{CH(D_e)}(90^\circ) \leq e,$$

$$E_{CH(D_e)}(45^\circ) \leq k\frac{\sqrt{2}}{2}, E_{CH(D_e)}(135^\circ) \leq k\frac{\sqrt{2}}{2}$$

がわかる。 D_e が有効な共通部分とすると、その中に少なくとも一つの等径的近傍 $U_e(0)$ が存在する。等径的近傍の定義と前章の性質1により、 $U_e(0)$ について、

$$E_{CH(U_e(0))}(0^\circ) = E_{CH(U_e(0))}(90^\circ) = e,$$

$$E_{CH(U_e(0))}(45^\circ) = E_{CH(U_e(0))}(135^\circ) = k\frac{\sqrt{2}}{2}$$

が成り立つ。また、 $U_e(0) \subseteq D_e$ なので、

$$E_{CH(D_e)}(0^\circ) \geq e, E_{CH(D_e)}(90^\circ) \geq e,$$

$$E_{CH(D_e)}(45^\circ) \geq k\frac{\sqrt{2}}{2}, E_{CH(D_e)}(135^\circ) \geq k\frac{\sqrt{2}}{2}$$

がわかる。以上のことより、

$$E_{CH(D_e)}(0^\circ) = E_{CH(D_e)}(90^\circ) = e,$$

$$E_{CH(D_e)}(45^\circ) = E_{CH(D_e)}(135^\circ) = k\frac{\sqrt{2}}{2}$$

が得られる。したがって、 $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}, b_i \cap D_e \neq \emptyset, c_i \cap D_e \neq \emptyset$ が成り立つ。(証明終)

定理7の必要条件を満たす共通部分は必ずしも有効な共通部分とはいえない。そこで、これらの共通部分の中の近傍で、定義1の(1),(2)を満たすもの(準等径的近傍と呼ぶ)を計算アルゴリズムを用いて求める。各共通部分で見つけた準等径的近傍の誤差を比べ、誤差最小な近傍を等径的近傍とみなす。

準等径的近傍を見つけるアルゴリズムの計算量は、 A_e から直接に等径的近傍を求める計算量より大幅に少なくなる。 $e \leq 20$ 程度であれば、発見的な方法で準等径的近傍をすべて見つけることができ、したがって、等径的近傍を全部見つけることができる。

(注3): この対称は定理3で与えた対称のことである。

5. 等径的近傍の画像解析への応用

等径的近傍は画素間に新しい隣接関係を与えるため、図形分解、2値画像圧縮、円の検出、円図形の板取りなど様々な画像処理問題に応用できると考えられる。本論文では、まず、等径的近傍を用いると、円図形は各方向にほぼ一様に膨張することを検証する。次に、等径的近傍による膨張を利用して、図形間の距離計算を行う。

5.1 実験に用いる等径的近傍

文献[6]で、筆者らは有限位相空間における膨張・収縮の性質を分析した。それによると、ある種の大きい近傍は複数の小さな近傍（既約近傍）に分解でき、大きい近傍による膨張・収縮はこれら既約近傍の膨張・収縮の連続で実現できる。

ここで、前章の最後に述べた方法で発見的に $e \leq 10$ のとき、 C_e に含まれる等径的近傍を全部見つけた。その結果、等径的近傍が多数存在することがわかった。互いに対称なものを除いて、 $e = 1, 2$ のときそれぞれ 1 個、 $e = 3, 4, 6$ のときそれぞれ 2 個、 $e = 5$ のとき 3 個、 $e = 7, 8$ のときそれぞれ 6 個、 $e = 9, 10$ のときそれぞれ 10 個以上存在する。そこで、それらの等径的近傍の中から次の 2 点を重視して適切なものを選び出す。

(1) 実際の処理はハードウェアで実行するため、小さな既約近傍に分解できること。

(2) 違う基準量の等径的近傍を分解するとき共通な既約近傍なるべく多く現れること。

本論文では、図 8 に示すような等径的近傍を選んだ。 $e = 1, 2, \dots, 6$ の等径的近傍は簡単な既約近傍に分解され、ハードウェア化しやすい。更に興味深いのは、 $e = 7, 8, 9, 10$ の等径的近傍が $e = 1, 2, 4, 5, 6$ の等径的近傍を適当に組み合わせで表せることである。 $e = 7, 8, 9, 10$ の等径的近傍による膨張・収縮を小さな膨張・収縮の連続で実現するとき、途中結果も等径的近傍を用いて得られるため、方向による膨張・収縮の差が小さく、途中段階でも高精度の処理ができるという利点がある。また、前章に述べた方法で $e = 11, 12, \dots, 24$ のいくつかの等径的近傍と思われるものも算出できた。一例として、図 8 に $U_{24}(0)$ とその分解結果を示した。以後、等径的近傍による膨張・収縮はそれを分解して得られた既約近傍による膨張・収縮の連続で実現している。文献[6]より収縮処理は画像と背景を取り替えると膨張処理になるため、膨張

e	The selected isodiametric neighborhood			Error δ (pixels)
1	$U_1(0)$			0.41
2	$U_2(0)$			0.24
3	$U_3(0)$		$U_1(0)$	0.33
4	$U_4(0)$			0.24
5	$U_5(0)$			0.18
6	$U_6(0)$			0.34
7	$U_7(0)$		$U_6(0) \quad U_1(0)$	0.25
8	$U_8(0)$		$U_6(0) \quad U_2(0)$	0.28
9	$U_9(0)$		$U_5(0) \quad U_4(0)$	0.28
10	$U_{10}(0)$		$U_6(0) \quad U_4(0)$	0.25
24	$U_{24}(0)$		$U_6(0) \quad U_4(0) \quad U_1(0)$	0.21

図 8 基準量 $e = 1, 2, \dots, 10, 24$ の等径的近傍
Fig. 8 Isodiametric neighborhoods when e is 1, 2, ..., 10, 24.

処理の性質を示せば収縮処理の性質もわかる。そこで、本論文では膨張に関する実験のみを行う。

5.2 円図形の膨張・収縮

図形をあらゆる方向にほぼ一様に e 画素分膨張・収縮するには、基準量 e の等径的近傍を用いるのが一番望ましいと考えられる。図 9(a) の円図形の画像 (400×300 pixels) に対し、図 8 の $U_{24}(0)$ を用いて 24 画素分膨張を行い、その結果を図 9(b) に示す。図形の最大径と最小径の差を δ で表すと、 $\delta = \delta_{U_{24}} \doteq 0.21$ 画素分となる。これと比較するため、図 9(a) の画像に対し従来の 4 近傍と 8 近傍による膨張・収縮を各 6 回行い、水平垂直方向に 24 画素分膨張した結果を図 9(c) に示す。このとき、 $\delta \doteq 2.82$ となる。二つの結果を見ると、図 9(b) の図形は対称性がないが、各方向の径の最大値と最小値の差は 0.21 画素分しかない。この意味で円と判断される重要な性質をもつ。

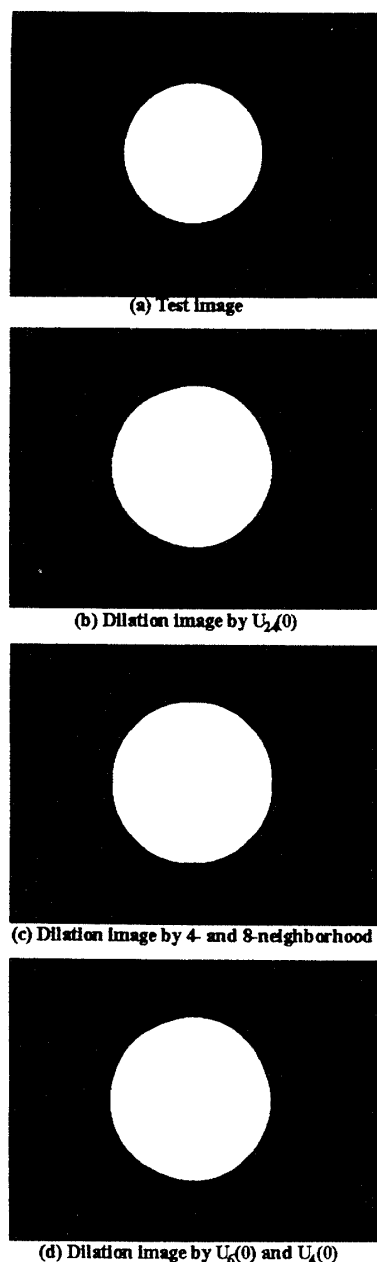


図9 円図形の膨張
Fig. 9 Dilation of a circle figure.

対称性をもつことが重要な応用では、対称性をもつ準等径的近傍について考察する必要がある。

現時点では、任意の基準量 e に対し等径的近傍を求めるのはまだ難しい。そこで、仮に $U_{24}(0)$ が求められないとし、代わりに、図8の $e \leq 10$ の等径的近傍の組合せで24画素分の膨張を行うことを試みる。第1は、 $U_{10}(0)$ を2回、 $U_4(0)$ を1回 ($U_6(0)$ を2回、 $U_4(0)$ を3回使って実現) 用いるもので、その結果を図9(d)に示す。このとき、 $\delta \doteq 0.49$ となる。第2は、 $U_9(0)$ を2回、 $U_6(0)$ を1回 ($U_5(0)$ と $U_4(0)$ をそれ

ぞれ2回、 $U_6(0)$ を1回使って実現) 用いるものである。このときは、 $\delta \doteq 0.89$ となる。 $U_{24}(0)$ を用いるより若干誤差は大きくなるが、従来の近傍を用いるよりは良好であることがわかる。

5.3 図形間の距離の計算

図形間の最短距離の計算は画像解析の重要な前処理である。従来、二つの図形 A_1, A_2 の間の最短距離は、 A_1 の要素 a_1 と A_2 の要素 a_2 のすべての対に対し、その距離 $|a_1 a_2|$ を求め、それらの最小値 $\min \{|a_1 a_2|\}$ をとることにより求めていた。この方法 (従来法と呼ぶ) は、正確であるが、計算時間が大変かかる。また、限定された形の近傍による膨張・収縮処理を用いる方法も利用されているが、正確さに欠ける [10]。等径的近傍を利用すると、短時間で精度の良い結果が得られる。その原理は次のとおりである。

[命題1] 基準量 e の等径的近傍 $U_e(0)$ を用いた任意の図形 A の膨張を $A^{b[U_e]}$ と表す。等径的近傍を用いて、二つの図形 A_1, A_2 の膨張を行うとき、

$$A_1^{b[U_e]} \cap A_2^{b[U_e]} = \emptyset, A_1^{b[U_{e+1}]} \cap A_2^{b[U_{e+1}]} \neq \emptyset$$

であるとき、 A_1, A_2 間の最短距離の近似値は $e+1$ で与えられる。

本論文では、図8に与える等径的近傍 $U_1(0), \dots, U_6(0)$ を用いて二つの図形を少しずつ膨張させ、膨張した二つの図形が共通部分をもつかどうかを調べ、上記の条件を満たす e を求める。直接に大きな基準量の等径的近傍を用いるより誤差が多少小さくなるが、処理手順が簡単である。

図10(a)は三つの複雑な図形で構成されるサンプル画像である。サンプル画像に対し、 $U_6(0), U_4(0), U_3(0)$ をそれぞれ1回用いて膨張を行うと、図10(b)に示すように、図形1と図形2は連結状態になる。しかし、まだ共通部分をもっていない。二つの図形の連結部分の概念図を図10(c)に示す。この状態から図形をもう1画素分膨張させると、二つの図形は共通部分をもつことになる。すなわち、 $e = 13$ であり、図形1と図形2の最短距離は14である。一方、従来法では図形1と図形2の最短距離は $\sqrt{197} \doteq 14.04$ である。更に、図10(b)の画像に対し、 $U_6(0), U_4(0)$ をそれぞれ1回用いて膨張を行うと、図形1と図形3も連結する (図10(d))。しかし、共通部分はない。すなわち、図形1と図形3の最短距離は24である。一方、従来法では図形2と図形3の最短距離は $\sqrt{562} \doteq 23.71$ である。なお、膨張に用いた等径的近傍の誤差を分析し、最短距離をもっと正確に算出したり、推定誤差を求めるこ

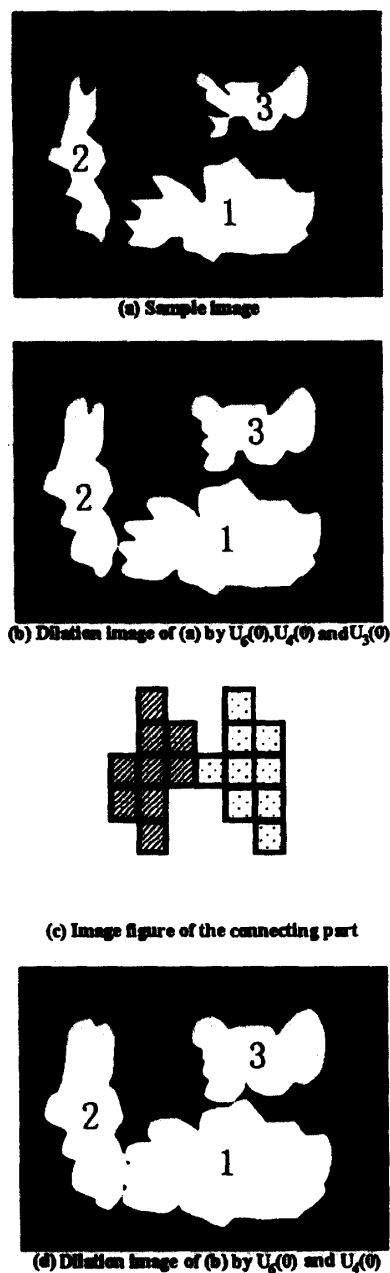


図 10 図形間の距離計算

Fig. 10 Calculation of the distances between figures.

とも可能である。

6. む す び

本論文では、基準量 e の等径的近傍という概念を導入した。また、等径的近傍の性質を解析し、その存在領域を求めた。これらの結果を用いて、基準量 10 以下のすべての等径的近傍を求め、既約近傍へ分解し、円の膨張と図形間の距離計算という 2 種類の画像処理を行い、その有効性を確かめた。今後、等径的近傍の性質を更に解明し、より大きな基準量の等径的近傍を

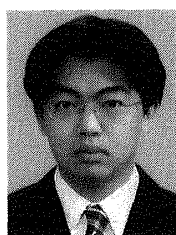
求め、それらを既約近傍へ分解するとともに、様々な画像処理問題への応用を検討する予定である。

謝辞 様々な御指導、御助言を頂きました東京商船大学の大島正毅教授、坪井邦夫教授に感謝致します。

文 献

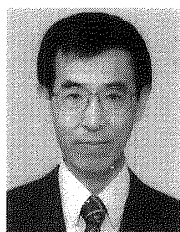
- [1] Y. Nakamura, Y. Fuwa, and H. Imura, "A theory of finite topology and image processing," J. Faculty of Engineering, Shinshu University, no.69, pp.11-24, 1991.
- [2] H. Imura and M. Eguchi, "Finite topological spaces," Formalised Math., vol.3, no.2, pp.189-193, 1992.
- [3] 江口正義, 井村 寛, 不破 泰, 中村八束, "有限位相空間におけるデジタル線分について," 信学論 (A), vol.J79-A, no.7, pp.1298-1308, July 1996.
- [4] 井村 寛, 江口正義, 不破 泰, 中村八束, "5 近傍によるデジタル線分について," 信学論 (A), vol.J80-A, no.3, pp.563-572, March 1997.
- [5] 井村 寛, 江口正義, 不破 泰, 中村八束, "離散空間における位相幾何学と表面検査における傷の検出への応用," 信学論 (D-II), vol.J78-D-II, no.4, pp.597-607, April 1995.
- [6] 劉 剛, 北澤真弓, 江口正義, 不破 泰, 中村八束, "有限位相空間における膨張・収縮処理とプリント配線パターン検査への応用," 信学論 (A), vol.J82-A, no.9, pp.1454-1464, Sept. 1999.
- [7] G. Liu, M. Kitazawa, M. Eguchi, Y. Fuwa, and Y. Nakamura, "Isotropic neighborhoods and its application to printed pattern inspections," Proc. CVPRIP2000, vol.2, pp.277-280, Feb. 2000.
- [8] G. Liu, M. Eguchi, Y. Fuwa, and Y. Nakamura, "Isotropic neighborhoods in discrete spaces and its application to image processing," Proc. CD. of MTNS2000, June 2000.
- [9] A. Rosenfeld and A.C. Kak, Digital Picture Processing, Academic Press, 1976.
- [10] J.C. Russ, The Image Processing Handbook Second Edition, CRC Press, 1995.
- [11] 島脇純一郎, 画像理解のためのデジタル画像処理 [II], 昭見堂, 1988.

(平成 12 年 5 月 18 日受付)



劉 剛 (学生員)

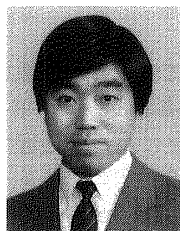
平 5 中国ハルビン船舶工程学院大・電子卒。平 10 東京商船大大学院修士課程了。現在、同大学院博士後期課程在学中。画像処理、パターン認識の研究に従事。画像電子学会会員。



江口 正義

昭40 東工大・理工・数学卒。昭42 同大大学院修士課程了。同年（財）電力中央研究所入所。現在、東京商船大学商船学部助教授。工博。制御理論、画像処理、離散数学等の研究に従事。計測自動制御学会、日本応用数理学会、日本数学会、MIZAR 国際学会各会員。

国際学会各会員。



不破 泰 （正員）

昭56 信州大・工・情報卒。昭58 同大大学院修士課程了。現在、信州大学工学部情報工学科助教授。工博。並行処理、ネットワーク、音声、画像処理の研究に従事。情報処理学会、教育システム情報学会、MIZAR 国際学会、IEEE 各会員。



中村 八束 （正員）

昭41 東工大・理工・数学卒。昭46 同大大学院博士課程了。同年信州大学工学部講師。現在、同大工学部情報工学科教授。理博。情報理論、パターン認識、音声・画像処理、マイコン応用技術等の研究に従事。MIZAR 国際学会会員。