

ファジィ位相論及び数理形態学を用いた
画像処理に関する研究

1998年3月

河 原 和 好

ファジィ位相論及び数理形態学を用いた
画像処理に関する研究

1998年3月

河原和好

目次

1 序論	7
1.1 本論文の内容	8
1.2 本論文の構成	9
1.3 濃淡画像とファジィ集合	9
2 画像の位相的处理	13
2.1 ファジィテンプレートによるファジィ位相の導入	14
2.2 従来の方法との比較	29
2.3 α -近傍と連結性	32
2.4 近傍によるファジィ位相の導入	35
3 画像の代数的処理	43
3.1 2値の数理形態学	43

3.2	ファジィ集合を用いた数理形態学	47
3.3	位相的处理と代数的处理との関係	64
4	カラー画像の処理	69
4.1	RGB 空間による処理	69
4.2	色距離を考慮した処理	72
4.2.1	色の距離	72
4.2.2	RGB 空間から $L^*u^*v^*$ 空間への変換	73
4.2.3	実際の処理	74
5	結論	79
	謝辞	81
	参考文献	82
	研究業績	84
	研究業績と本論文の関係	87
A	種々の証明	89
A.1	τ が位相構造を定義していることの証明	89
A.2	α -近傍の定義から導かれる命題の証明	91
A.3	代数的規則を満たすことの証明	95

目次

1.1 濃淡画像とファジイ集合	10
2.1 ファジイテンプレート	17
2.2 開基の分類	18
2.3 画像1 (濃淡画像)	20
2.4 画像1 の内部 ($h = x/8, x = 1 \sim 4$)	21
2.5 画像1 の内部 ($h = x/8, x = 5 \sim 8$)	22
2.6 画像1 の内部	24
2.7 画像1 の外部	25
2.8 画像1 の境界	26
2.9 画像2 (濃淡画像)	27
2.10 画像2 の境界	28
2.11 Sobel オペレータによる画像1 のエッジ抽出	30
2.12 Sobel オペレータによる画像2 のエッジ抽出	31

2.13 α -近傍の例	33
2.14 α -連結	36
2.15 画像 1 の内部 2	39
2.16 画像 1 の外部 2	40
2.17 画像 1 の境界 2	41
3.1 画像 3 (2 値画像)	46
3.2 構成要素 1	47
3.3 画像 3 の dilation	48
3.4 画像 3 の erosion	49
3.5 画像 3 の closing	50
3.6 画像 3 の opening	51
3.7 構成要素 2	53
3.8 画像 1 の dilation	54
3.9 画像 1 の erosion	55
3.10 画像 1 の closing	56
3.11 画像 1 の opening	57
3.12 画像 2 の dilation	58
3.13 画像 2 の erosion	59
3.14 画像 2 の closing	60
3.15 画像 2 の opening	61

3.16	画像1のエッジ1: $(P \oplus Q) - P$	62
3.17	画像1のエッジ2: $P - (P \ominus Q)$	63
3.18	画像2のエッジ1: $(P \oplus Q) - P$	65
3.19	画像2のエッジ2: $P - (P \ominus Q)$	66
4.1	画像4 (カラー画像)	70
4.2	画像4の境界1	71
4.3	マッピング関数	76
4.4	画像4の境界2	77

第1章

序論

身の回りにおける画像情報の増加と共に画像認識や理解のための画像処理の手法が多々開発され、実用化されている [1][2]。

X線写真やCT画像等の医用画像のように処理対象の形状が曖昧である画像や、雑音の影響を考慮する必要のある画像、また、より複雑な物体の認識(例えば顔画像の認識)等においては、濃淡画像を処理することが不可欠である。

さらに、カラー画像はマルチメディア処理(インターネット、コンピュータグラフィックス、ビデオオンデマンド、仮想現実など)のような多くの場合に用いられている。

そこで本研究では、濃淡画像の境界が曖昧性を持つことに着目し、処理対象の画像をファジィ集合として捉えることにより、ファジィ集合を扱う理論を濃淡画像、カラー画像の処理に応用する手法を考察する。

1.1 本論文の内容

本研究では、濃淡画像をファジィ集合と考えることにより、ファジィ集合を取り扱う理論である「ファジィ位相」と「ファジィ理論による数理形態学」を画像処理に応用する。カラー画像に対する処理も考察する。

ファジィ位相は、ファジィテンプレートと呼ぶある特定のファジィ集合を用いて構成される。そして、位相論を用いた画像処理 [7] と同様の処理（画像の内部、外部、境界抽出等）を行うことができる。さらに α -近傍を定義し、画素の連結性も取り扱う。また、近傍を用いたファジィ位相も定義する。ファジィ位相論は、位相数学の研究対象としては従来の位相数学の成果を越えるものが少ないとされ、それほど重要視されていないように思われているが、これの工学的有用性、すなわち画像処理の簡素化、有限個の画素を持つ曖昧な画像の組織的な処理法に着目して本研究を行う。

ファジィ理論による数理形態学は、2値の数理形態学をファジィ集合を用いて拡張し、濃淡画像の代数的処理を導入したものである。dilation, erosion という基本的演算を定義し、それらを組み合わせ、様々な処理を試みる。さらに、ファジィ位相論とファジィ理論による数理形態学との関連を調べ、両者から導かれる濃淡画像の位相的処理と代数的処理の体系化を考察する。

カラー画像の処理においては、処理前に色の差を用いた簡単な分割をし、それに対して位相的処理や代数的処理を行う手法を考察する。

1.2 本論文の構成

本論文の構成は、以下の通りである。

次節で、本論文の基礎となる濃淡画像をファジィ集合とみなす手法を説明する。

2章では、有限ファジィ位相論を導入し、これから導かれる様々な定義・命題を述べ、応用例を示す。

3章では、2値の数理形態学理論を説明し、ファジィ集合を用いた数理形態学を導入し、応用例を示す。さらに、ファジィ位相論とファジィ理論による数理形態学との関連性を考察する。

4章では、2、3章で述べた濃淡画像に対する処理をカラー画像に応用する手法を示す。

1.3 濃淡画像とファジィ集合

濃淡画像の濃度値をファジィ集合のメンバーシップ関数で表すことにより、濃淡画像をファジィ集合として取り扱う方法が知られている

[3]。本研究では、以下のようにして濃淡画像をファジィ集合として取り扱う。

濃淡画像の画素の横方向の座標を X 、縦方向の座標を Y とする。そして、濃淡画像の濃度値を $[0, 1]$ に正規化し、座標 (x, y) $x \in X, y \in Y$ の濃度値を $\mu(x, y)$ という関数であらわすと、濃淡画像は座標空間 $X \times Y$ 上のメンバーシップ関数 $\mu(x, y)$ を持つファジィ集合であるとみなすことができる (図 1.1)。つまり、濃淡画像の各点の濃度をその画像に属す度合と考えることである。

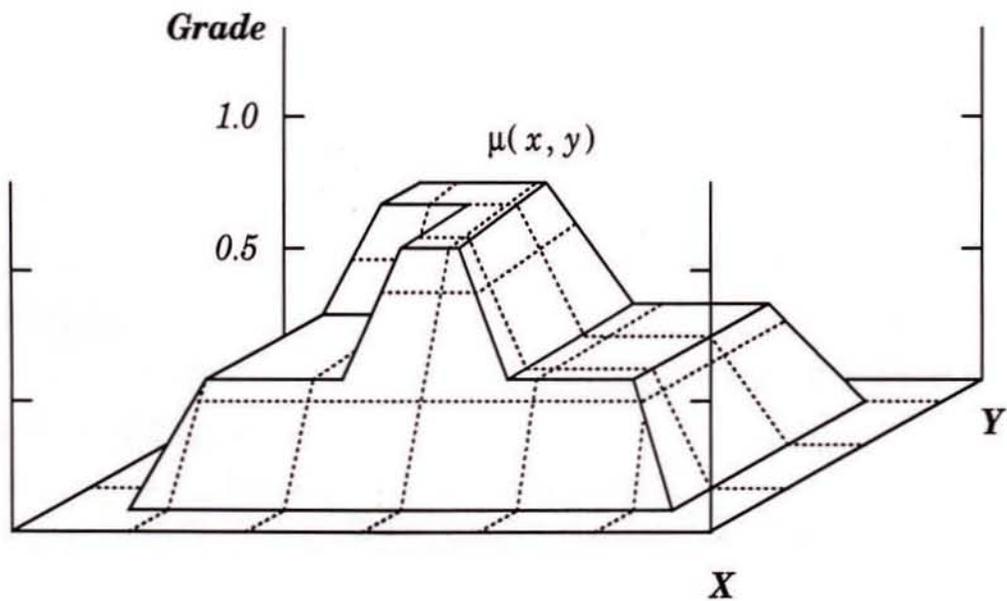


図 1.1: 濃淡画像とファジィ集合

この理論により、ファジィ位相論やファジィ理論による数理形態学といった、ファジィ集合を取り扱う理論を濃淡画像の処理に応用することができる。

第 2 章

画像の位相的处理

ファジィ集合の概念を用いることにより通常の位相空間の拡張であるファジィ位相空間が構成できることが知られている [4]。ここでは、ある特定のファジィ集合の族を基にしたファジィ位相と、近傍を用いたファジィ位相を導入する。そして、濃淡画像をファジィ集合とみなすことにより、これらを用いた濃淡画像の位相的处理を定義する。以下において、合併 \cup 、共通部分 \cap などの集合演算はファジィ集合の意味での集合演算を表す。

2.1 ファジィテンプレートによるファジィ位相の導入

ファジィ集合が定義されている空間全体を X とし、 X 上のある特定のファジィ集合を t とする。これをファジィテンプレートと呼ぶことにする。実際の画像処理の際、1.3節で述べたように X は画像が定義されている空間、 t は X 上のある濃淡画像である。

t を集めたもの全体の部分族を T とする。すなわち、

$$T \subseteq \{t \mid t : X \text{ 上のファジィ集合}\} \quad (2.1)$$

ただし、 T は次を満たす。

$$\bigcup_{t \in T} t = X, \quad \emptyset \in T (\emptyset \text{ は空集合})$$

次のようにして T から X 上の位相構造の開基を構成する。まず、 T の有限個の元 (ファジィ集合) の共通部分全体を B で表す。すなわち、

$$B = \left\{ \bigcap_{i \in M} t_i \mid (t_i)_{i \in M} : T \text{ の元の有限族 } (M \text{ は任意の有限添字集合}) \right\} \quad (2.2)$$

であり、 $T \subseteq B$ となる。また、 $\beta, \beta' \in B$ のとき、 $\beta \cap \beta' \in B$ である。

この B の元の任意個の合併全体を τ で表す。すなわち、

$$\tau = \left\{ \bigcup_{i \in I} \beta_i \mid (\beta_i)_{i \in I} \subseteq B \text{ (} I \text{は任意の添字集合)} \right\} \quad (2.3)$$

である。 τ は位相構造の条件である次の (I)~(III) を満たすので、 X 上のファジイ位相構造を定義し、 B は τ の開基になっている。また、 $T \subseteq B \subseteq \tau$ である。

(I) $X, \phi \in \tau$

(II) $(O_i)_{i \in M}$ が τ の元の任意の有限族ならば、 $\bigcap_{i \in M} O_i \in \tau$

(III) $(O_i)_{i \in I}$ が τ の元の任意の族とするとき、 $\bigcup_{i \in I} O_i \in \tau$

これらの条件は、集合演算がファジイ集合の意味での演算であることに注意すれば、付録 A.1に示すように初等的な議論に従って説明できる [5]。

実際の画像処理において、 X は有限個の画素全体を表しているから、この X 上に定義されたファジイ位相を有限ファジイ位相と呼ぶことにする [7]。

従来の位相論と同様に、以下の定義が成り立つ [4][5]。

定義 1 [開ファジィ集合、閉ファジィ集合]

τ に属す X 上のファジィ集合は開ファジィ集合と呼ばれる。

X 上のファジィ集合 A の補集合 A^c が τ に属すとき、 A を閉ファジィ集合と呼ぶ。

定義 2 [内部]

A を X 上のファジィ集合とする。 A に含まれる開ファジィ集合全体の和集合を A の内部と呼び、 A^i で表す。すなわち、

$$A^i = \bigcup_{\substack{O \subseteq A \\ O \in \tau}} O \quad (2.4)$$

である。

定義 3 [内部] さらに、 τ の構成法により

$$A^i = \bigcup_{\substack{O \subseteq A \\ O \in \tau}} O = \bigcup_{\substack{B \subseteq A \\ \beta \in \mathcal{B}}} \beta \quad (2.5)$$

となる。つまり、 A の内部は A に含まれる開基全体の和集合となる。

実際の画像を例にとり、画像の内部を求める。1.3節で述べたように、濃淡画像はファジィ集合であるとみなして考える。画像の内部は、原画像の各点において、ファジィテンプレートがその内部に含まれる度合を表す。

また、ファジイテンプレート t は図 2.1 に示すように、 3×3 画素のマスク内に収まるもので、上下左右対称なものを選んだ。グレードは、中心の値が h で、その上下左右が $0.5h$ とした。この h の値は、 $0.0 \leq h \leq 1.0$ である。 h の選び方により境界抽出の善し悪しが決定するが、これについては後述する。

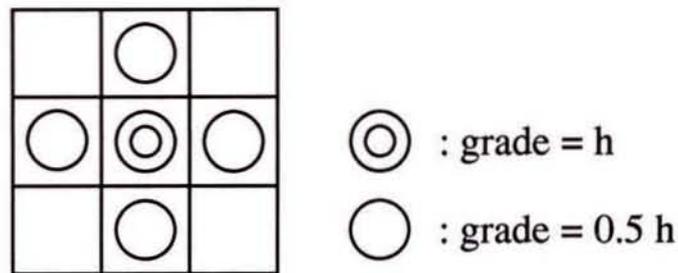


図 2.1: ファジイテンプレート

このファジイテンプレート t の集合全体の部分族である T から、その有限個の元の共通部分の全体である開基 B を構成すると、 B の元は図 2.2 の (a), (b), (c) の形のもの $\beta_1 \sim \beta_5$ に分類される。

これらは、上下左右に平行移動させることにより、

$$\beta_1 \subseteq \beta_2, \beta_3, \beta_4 \subseteq \beta_5 (= t) \quad (2.6)$$

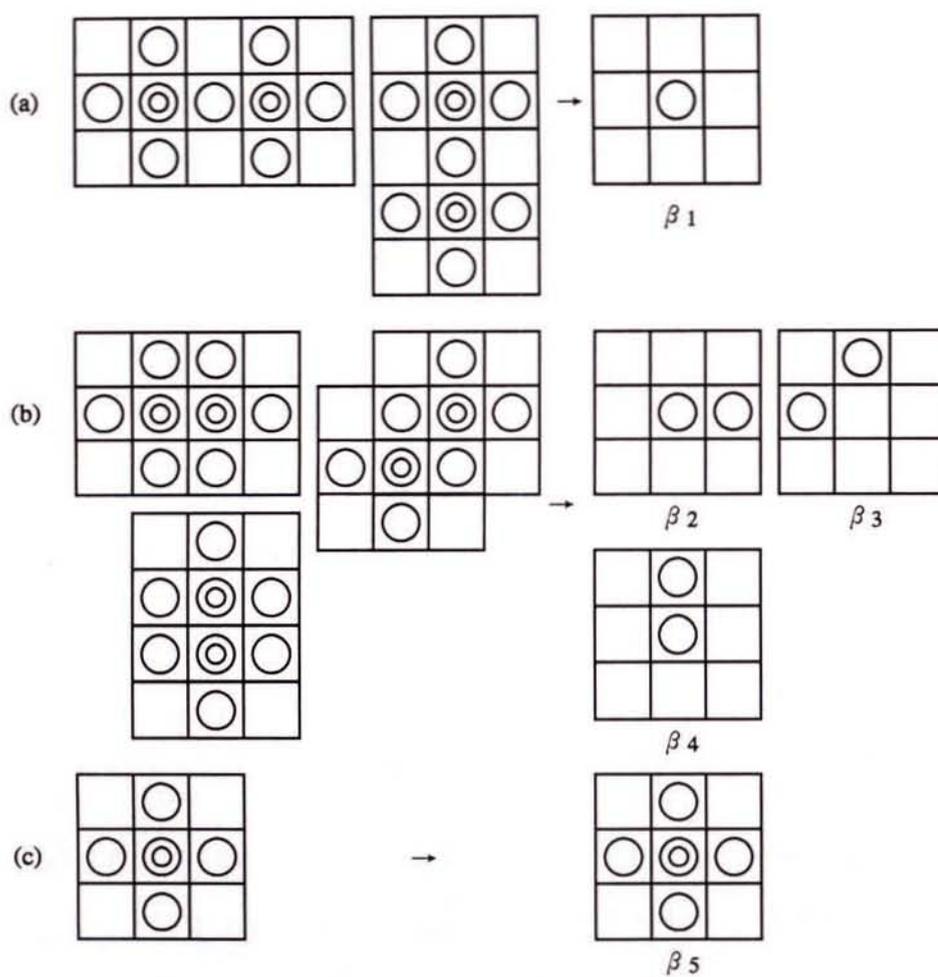


図 2.2: 開基の分類

という包含関係が成り立つ。

定義3より、内部を求めるには画像 A と開基との包含関係を調べればよい。 $\beta_2 \sim \beta_4$ と画像との包含関係は、 β_1 と画像との包含関係から調べられるので、内部を求めるには β_1 と β_5 の形のものについてのみ、画像との包含関係を調べればよいことになる。

また、画像 A が十分大きな X で定義されていて、 X 自身の縁の部分（画像がはみ出してしまう部分）の処理は考慮しなくてもよいものとする。

以上の理論を用い、ファジイテンプレートの h の値を変化させ画像の内部を求める。図 2.3 の画像を原画像とする。これは手首の X 線写真である。256 × 256 画素で 256 階調なので、ファジイ集合として扱うために、濃度を $[0, 1]$ の範囲に正規化して考える必要がある。

ファジイテンプレートの h の値を変化させて内部を求めたものが図 2.4、2.5 である。それぞれ、 h の値を画像の濃度の最大値 (255) の $x/8$ ($x = 1, \dots, 8$) としている。

これらの図から、 h の値がパラメータとなり、内部の抽出のされ方が変化することが分かる。これは、 h によりファジイテンプレートが画像に含まれる度合いが変化するためである。内部と同様に、この後定義する外部や境界の抽出され方も変化するので、ファジイテンプレートが原画像にうまく含まれるような調整が必要である。そこで今回の

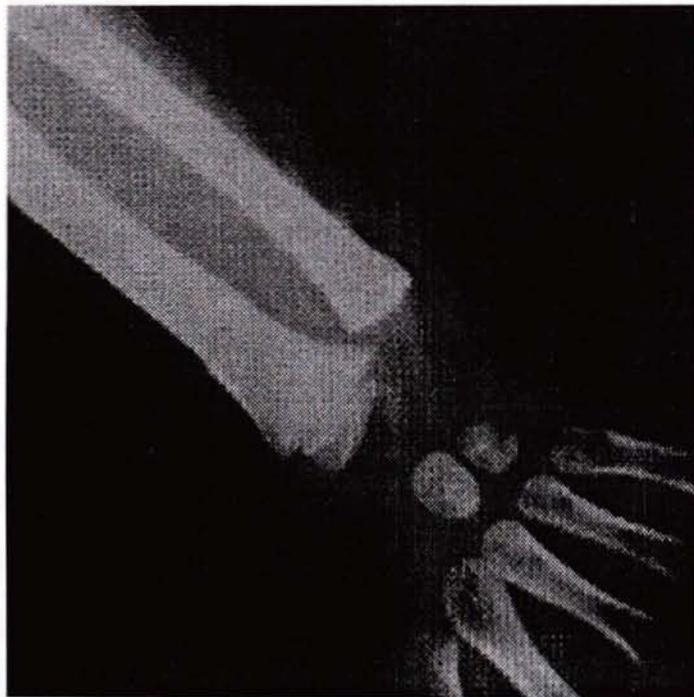


図 2.3: 画像1 (濃淡画像)

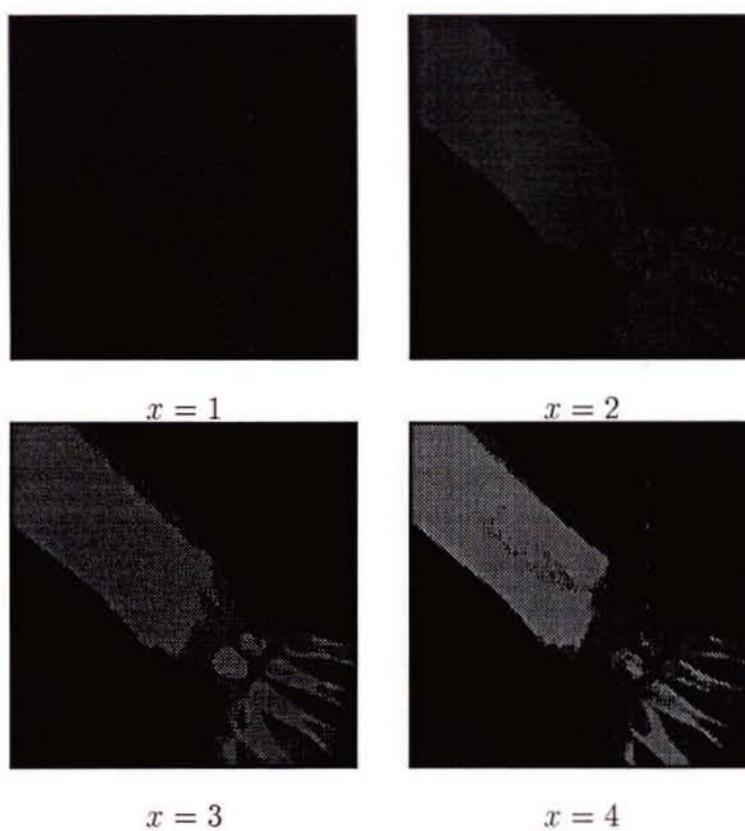


図 2.4: 画像 1 の内部 ($h = x/8, x = 1 \sim 4$)

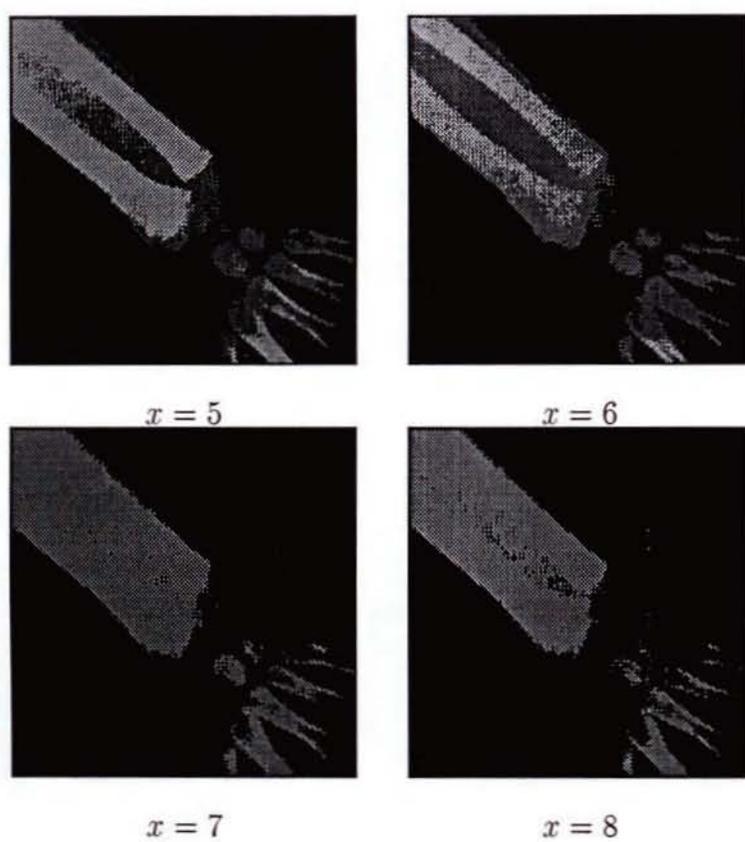


図 2.5: 画像1 の内部 ($h = x/8, x = 5 \sim 8$)

実験では、原画像の濃度の最大値の $3/4$ を用いたものを内部として選んだ (図 2.6)。濃淡が白に近いほど、画像の内部である度合が高くなっている。

定義 4 [外部] A の補集合の内部 $(A^c)^i$ を A の外部と呼び、 A^e で表す。つまりある点の、画像に属していない度合を表すものである。

$$A^e = (A^c)^i \quad (2.7)$$

h の値を原画像の濃度の最大値の $3/4$ として、画像 (図 2.3) の外部を求めたものが図 2.7 である。白に近いほど、画像の外部である度合が高くなっている。

定義 5 [境界] さらに、 A の内部でも外部でもない部分を A の境界と呼び、 ∂A で表す。つまりある点の、画像の内部でも外部でもない度合いを表している。

$$\partial A = (A^i \cup A^e)^c \quad (2.8)$$

h の値を内部や外部と同様にして、画像 (図 2.3) の境界を求めたものが図 2.8 である。白に近いほど、画像の境界である度合が高くなっている。

原画像を変えてこの処理を行ってみる。セラミック表面の電子顕微鏡写真である図 2.9 を原画像、ファジィテンプレートを図 2.1、 h の値も同じとして境界を求めたものが図 2.10 である。



図 2.6: 画像 1 の内部

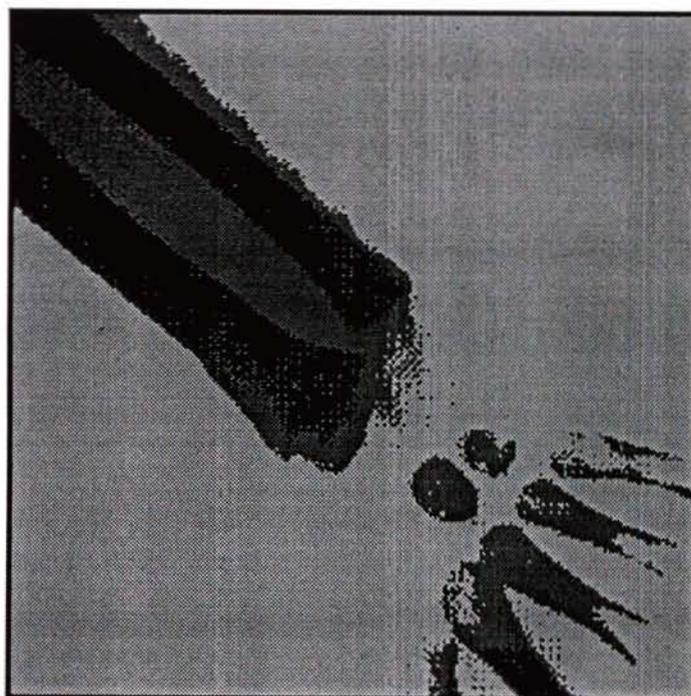


図 2.7: 画像 1 の外部

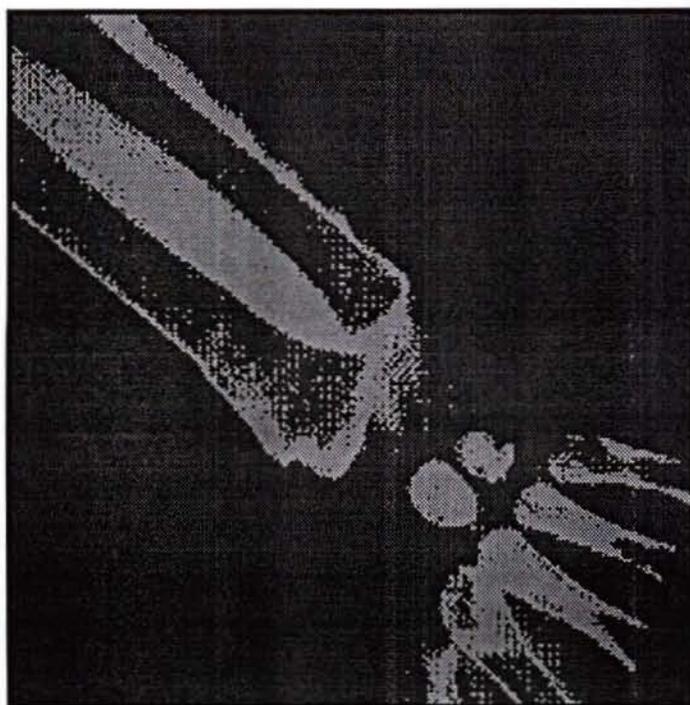


図 2.8: 画像 1 の境界

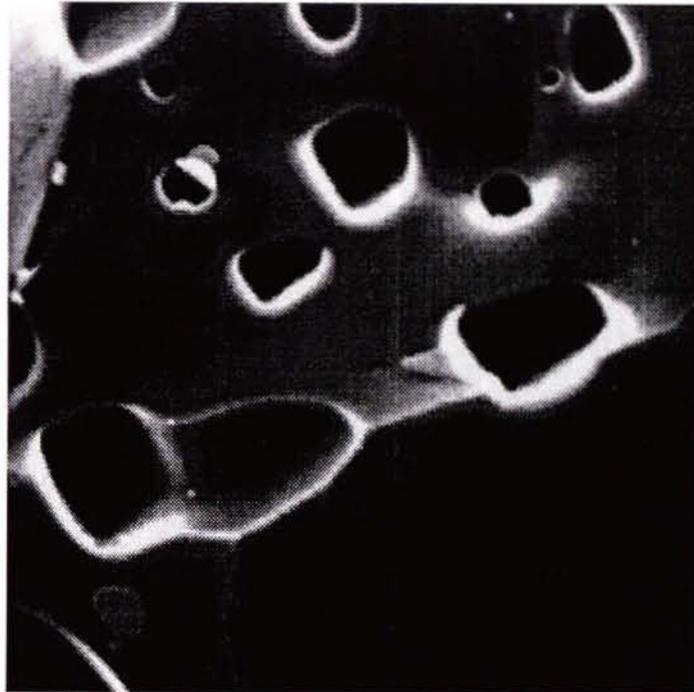


図 2.9: 画像 2 (濃淡画像)

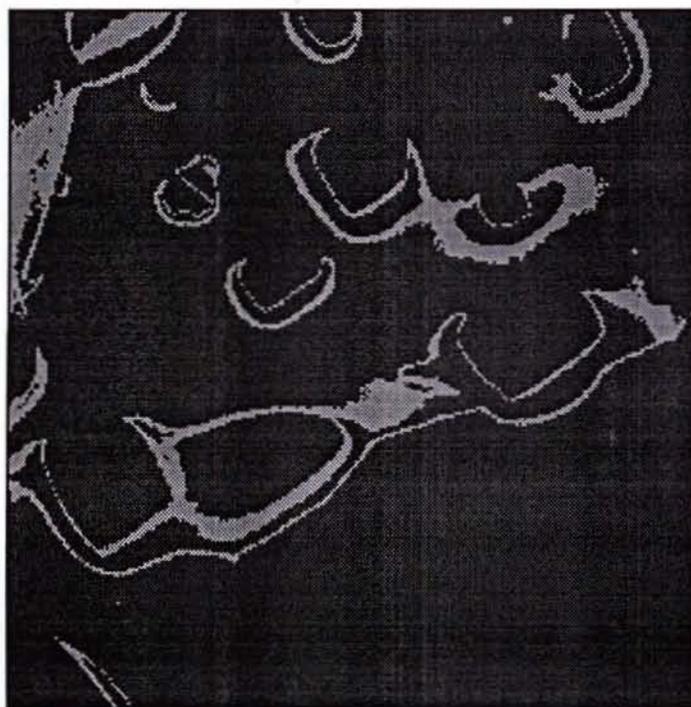


図 2.10: 画像 2 の境界

2.2 従来の方法との比較

前節で求めた境界は、一般に画像処理で扱われるエッジの概念 [2] と類似したものである。そこで、本研究による境界抽出と Sobel オペレータを用いたエッジ抽出の処理時間を比較してみる。図 2.11 が図 2.3 を、図 2.12 が図 2.9 を Sobel オペレータを用いてエッジ抽出した画像である。

前述したように、ファジイテンプレートとして、濃度値が $h, 0.5h$ だけの上下左右対称の最も単純なものを用いたことから、単純に速度のみを比較すると、表 2.1 のようになる。速度的には、従来のものより速いことがわかる。

方法	処理時間 [秒]
ファジイテンプレートを用いたもの	0.89
Sobel オペレータを用いたもの	6.01

表 2.1: 速度の比較

しかしながら、本法では濃淡の変化の大きいところでは十分その境界が明確になっているが、変化の緩やかな部分ではその大部分が境界として表示されてしまっている。これはファジイテンプレートの選択

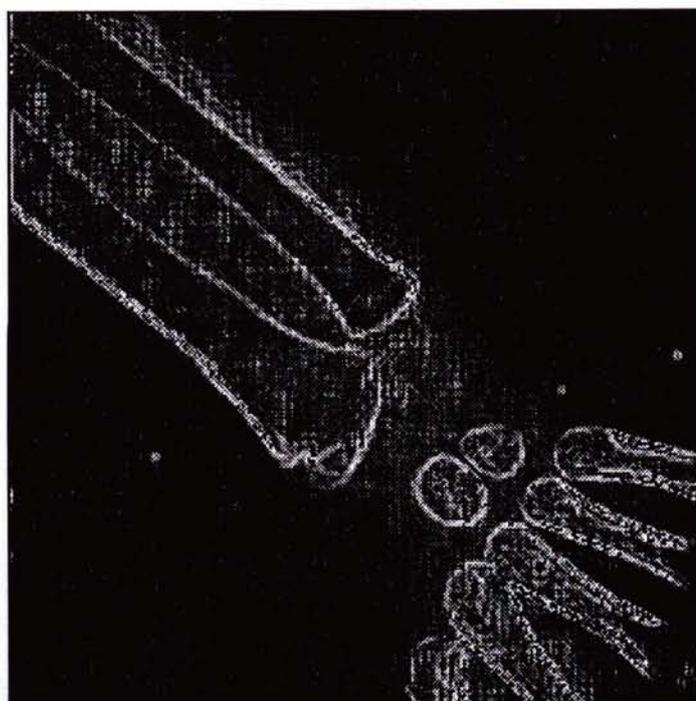


図 2.11: Sobel オペレータによる画像 1 のエッジ抽出



図 2.12: Sobel オペレータによる画像 2 のエッジ抽出

に工夫が必要なことを示している。

2.3 α -近傍と連結性

前述してきたように画像をファジィ集合とみなすと、画素一点一点はその意味を失う。そこで α -近傍の概念を導入し、一点を対象とする処理を取り扱うことができるようにする。

定義 6 [α -近傍]

開ファジィ集合 O が存在し、

$$\mu_O(x) \geq \alpha, \quad O \subseteq U \quad (2.9)$$

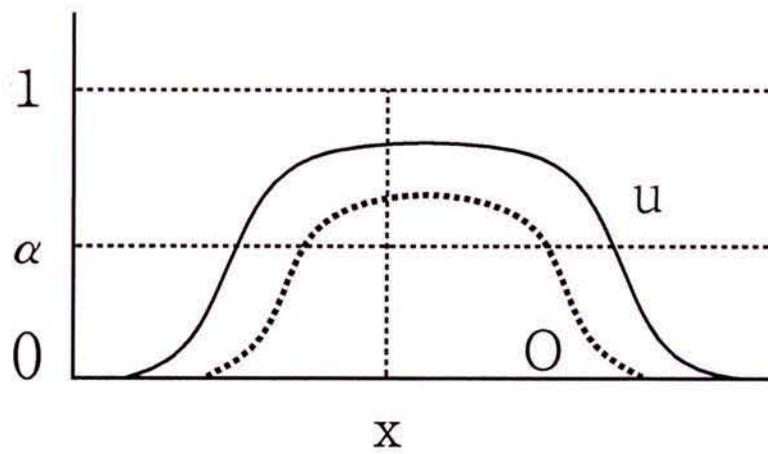
が成り立つとき、 U を $x \in X$ の α -近傍と呼ぶ。ただし、 μ_O は O のメンバーシップ関数である。

図 2.13 に α -近傍の例をあげる。

定義 6 によれば、通常近傍の概念と同様に以下の命題が成り立つ。これらの証明は付録 A.2 につける。

命題 7

- ① (1) U が $x \in X$ の α -近傍で $U' \supseteq U$ ならば、
 U' も $x \in X$ の α -近傍である。

図 2.13: α -近傍の例

(2) $\{U_i\}_{i=1}^{i=n}$ が $x \in X$ の α -近傍の有限族のとき、
 $\bigcap_{i=1}^n U_i$ も $x \in X$ の α -近傍である。

- ② O が開ファジィ集合ならば、
 すべての $x \in X, \mu_O(x) \neq 0 (> 0)$ について、
 O は $x \in X$ の $\mu_O(x)$ -近傍である。
 逆もまた成り立つ。

開ファジィ集合 O が存在し、 $A \subseteq O \subseteq U$ が成り立てば、 U は A の近傍と呼ばれる [4]。このとき、次の命題が成り立つ。

命題 8

U が A の近傍ならば、すべての $x \in X, \mu_A(x) \neq 0$ に対して、
 U は x の $\mu_A(x)$ -近傍である。

写像 $f: X \rightarrow Y$ について、任意の Y の開集合 \mathcal{Y} の逆像 $f^{-1}(\mathcal{Y})$ が X の開集合であれば、 f は F -連続写像であるといわれる [4]。これについても、次の命題が成り立つ。

命題 9

f が F -連続ならば、
 すべての $x \in X$ 及びすべての $0 \leq \alpha \leq 1$ について、

$f(x)$ の任意の α -近傍 v の逆像 $f^{-1}(v)$ は x の α -近傍である。
逆もまた成り立つ。

そこで、次の定義をする。

定義 10 [α -連続]

$f(x)$ の任意の α -近傍の逆像が x の α -近傍のとき、 f は x で α -連続であると呼ぶ。

以上のようにして、連続性や点近傍の概念が導入できた。次に連結性の概念を導入する [8]。

定義 11 [α -連結]

X 上の 2 点 P, Q について、 P から Q への点列 $P = P_0, P_1, \dots, P_n = Q$ が存在し、各 $1 \leq i \leq n$ について、 P_i の任意の α -近傍 U_i は P_{i-1} の α -近傍でもあるとき、 P, Q は α -弧状連結であると呼ぶ。

この α -弧状連結性の概念を用いれば、 X 上のファジィ集合 A の連結性を判定することも可能である (図 2.14)。

2.4 近傍によるファジィ位相の導入

2.1 節ではファジィテンプレートというある特定のファジィ集合を用いてファジィ位相を導入したが、近傍を用いてもファジィ位相を導

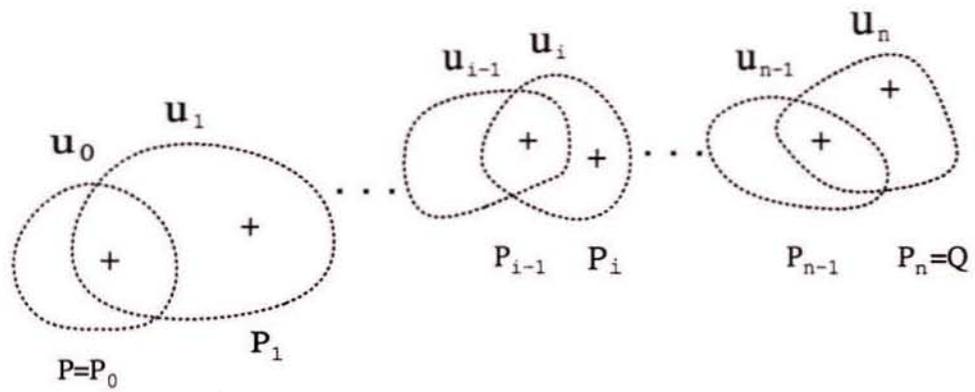


図 2.14: α -連結

入することができる [7]。

ファジィ集合が定義されている空間全体を X とする。ファジィ集合 U_x ($x \in X, U_x \neq \emptyset$) がすべての $x \in X$ に対して定まっているとき、 (X, U) をファジィ位相とし、 U_x を x の近傍とする。実際の画像処理において、 X は有限個の画素全体を表しているから、この X 上に定義されたファジィ位相を有限ファジィ位相と呼ぶことにする [7]。

定義 12 [内部 2]

A を X 上のファジィ集合とする。 A に含まれる近傍 U_x 全体の和集合を A の内部と呼び、 A^i で表す。すなわち、

$$A^i = \bigcup_{\substack{U_x \subseteq A \\ x \in X}} O \quad (2.10)$$

である。

定義 13 [外部 2] A の補集合の内部 $(A^c)^i$ を A の外部と呼び、 A^e で表す。つまりある点の、画像に属していない度合を表すものである。

$$A^e = (A^c)^i \quad (2.11)$$

定義 14 [境界 2] さらに、 A の内部でも外部でもない部分を A の境界と呼び、 ∂A で表す。つまり、ある点の、画像の内部でも外部でもない度合いを表している。

$$\partial A = (A^i \cup A^e)^c \quad (2.12)$$

ここで定義した内部、外部、境界を実際の画像で処理してみる。原画像は図 2.3、近傍として図 2.1 のファジィテンプレートと同じ形のものを用いる。内部、外部、境界はそれぞれ図 2.15、図 2.16、図 2.17 となり、2.1 節で求めたものと同様な結果が得られている。

また、2.3 節の α -近傍を x の近傍 U_x と考えることにより、 α -連結と同様に連結の概念を導入することができる。



図 2.15: 画像 1 の内部 2

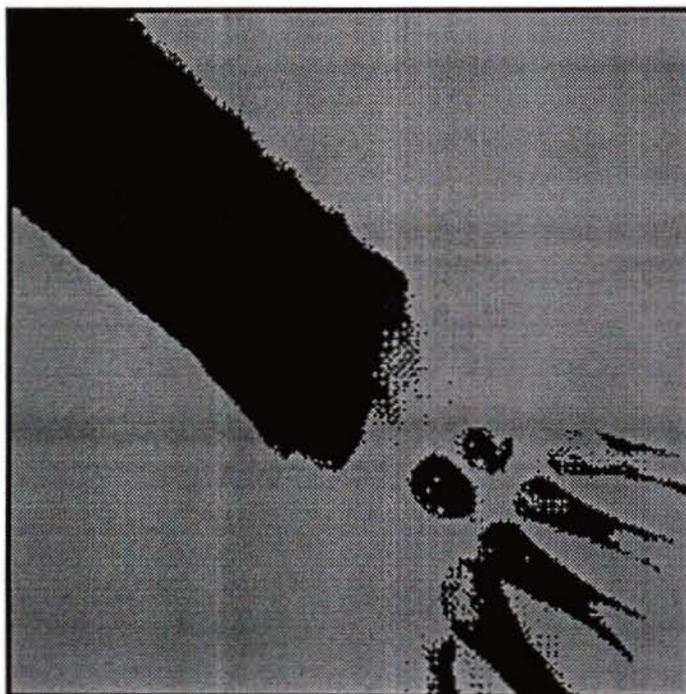


図 2.16: 画像1の外部2

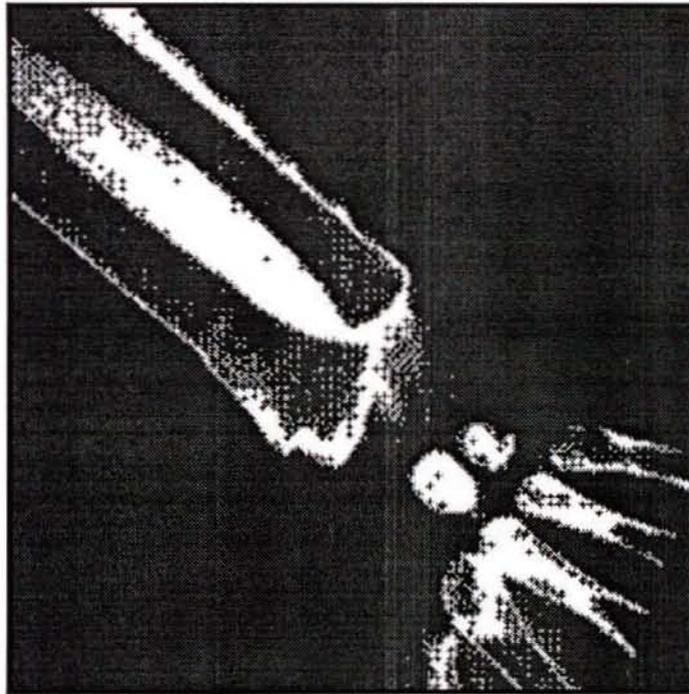


図 2.17: 画像 1 の境界 2

第3章

画像の代数的処理

前章では、画像の位相的処理について述べた。本章では画像の代数的処理を導入する。これは従来の数理形態学のファジィ版といえる。

数理形態学 [9][10] は、与えられた2値画像または濃淡画像を集合とみなし、これらの特徴抽出を目的とした理論である。原画像に対し、構成要素と呼ばれる集合を作用させるような集合論的操作からなる画像の変形手法である。

3.1 2値の数理形態学

2値の数理形態学は2値画像を点の集合として扱う。例えば白黒2値の画像において、白い部分を選択された点、黒い部分を選択されない点とし、選択された点の集まりである集合を画像とみなす。

その集合に対し、構成要素と呼ぶ、ある特定な形の集合を作用させ、画像の変換を得る。基本的な変換として dilation, erosion があり、それぞれ記号 \oplus, \ominus で表される。dilation は集合要素のベクトル加算を、erosion はベクトル減算を用いて二つの集合を結合させるものである。

定義 15 [dilation]

画像の定義されている空間を 2次元平面 $X \times Y$ とする。 A, B が $X \times Y$ 上の集合であり、それぞれの要素 a, b が、座標 $a = (a_x, a_y)$ と $b = (b_x, b_y)$ であるとき、 B による A の dilation は、 A, B おのおのから一つずつ得た要素の対のあらゆるベクトル和の集合である。つまり、

$$A \oplus B = \{c \in X \times Y \mid c = a + b, a \in A, b \in B\} \quad (3.1)$$

である。

定義 16 [erosion]

A, B が $X \times Y$ 上の集合であり、それぞれの要素 a, b が、座標 $a = (a_x, a_y)$ と $b = (b_x, b_y)$ であるとき、 B による A の erosion は、 $b \in B$ なるすべての b に対して、 $x + b \in A$ となる全要素の集合である。つまり、

$$A \ominus B = \{x \in X \times Y \mid x + b \in A, \forall b \in B\} \quad (3.2)$$

である。

つまり、dilation は画像 A に B をずらして重ね、 A を膨張させるような変換であり、erosion は画像 A から B を掻き取り、 A を収縮させるような変換である。実際には、dilation と erosion は対にして用いられる。

また、dilation の後に erosion 処理を行ったものを closing、erosion の後に dilation 処理を行ったものを opening といい、次式のように書く。

$$\text{closing } A^B = (A \oplus B) \ominus B \quad (3.3)$$

$$\text{opening } A_B = (A \ominus B) \oplus B \quad (3.4)$$

opening は境界を滑らかにし、狭い地峡形状、小島、および鋭く尖った岬形状を除去する作用を持ち、closing は境界を滑らかにし、狭い間隙、細長い割れ目、および小さな穴を熔融する作用を持つ。これまで説明した2値画像に対する数理形態学の各処理を求めてみる。原画像を図3.1の2値画像(256×256画素。白い部分が1、他が0)、構成要素を図3.2の2値画像(9×9画素。色のついた部分が1、他が0)としたとき、それぞれ dilation (図3.3)、erosion (図3.4)、closing (図3.5)、opening (図3.6)となる。

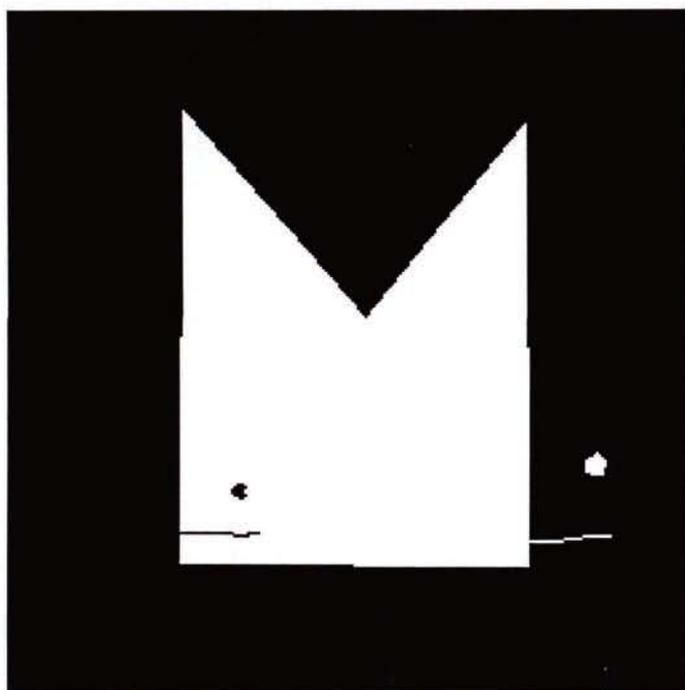


図 3.1: 画像 3 (2 値画像)

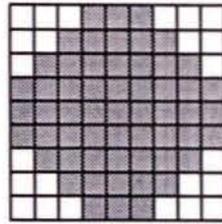


図 3.2: 構成要素 1

3.2 ファジィ集合を用いた数理形態学

前節で説明した2値の数理形態学を濃淡画像に拡張した理論も考えられている [9][10]。これは、濃淡画像を3次元ユークリッド空間上の集合であり、 $x \in \mathbf{R}^2$ で画像の空間領域を表し、 $y \in \mathbf{R}$ でその濃度値を表す。さらに、陰影変換等を用いて2値の数理形態学の集合操作を関数に拡張することにより、濃淡画像の操作を行うものである。

本研究では、1.3節の方法で濃淡画像をファジィ集合のメンバーシップ関数で表し、構成要素もファジィ集合で表すことにより、2値の数理形態学を濃淡画像の処理に拡張し、濃淡画像を代数的に扱う手法を提案する。次のようにして数理形態学の基本的な演算である dilation、erosion を定義する。

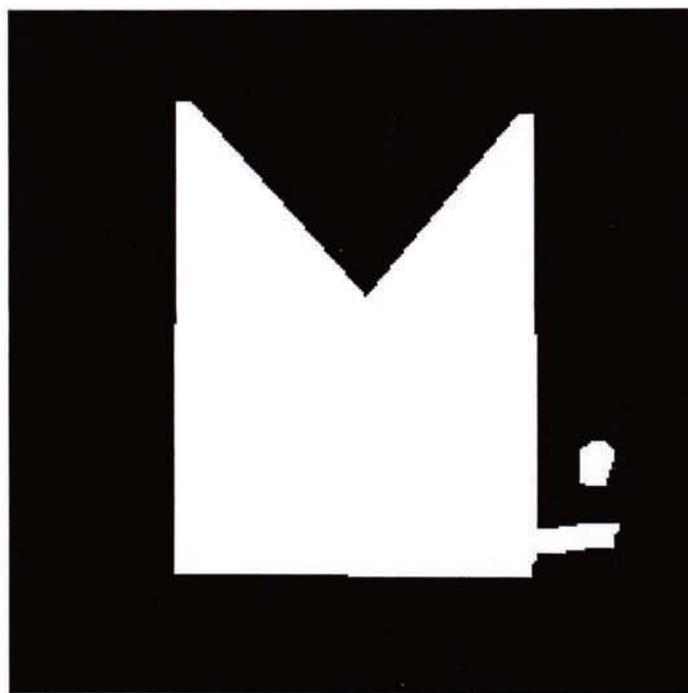


図 3.3: 画像 3 の dilation

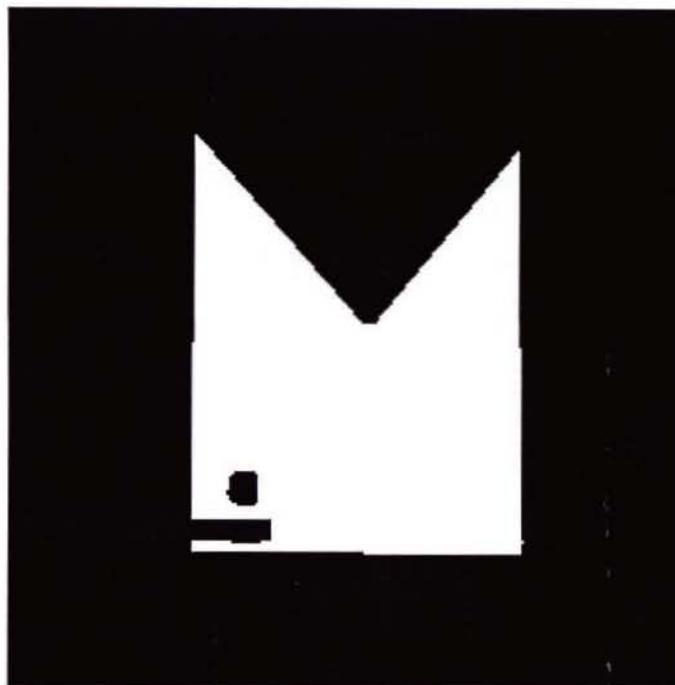


図 3.4: 画像 3 の erosion



図 3.5: 画像 3 の closing



図 3.6: 画像 3 の opening

定義 17 [ファジイ理論を用いた dilation, erosion]

対象とする画像を P 、構成要素を Q というファジイ集合とする。 \mathbf{x}, \mathbf{y} は座標を表すベクトル、 μ_P, μ_Q をそれぞれのファジイ集合のメンバーシップ関数とする。 \vee は大きな方、 \wedge は小さな方の値をとる演算である。

$$\text{dilation } \mu_{P \oplus Q}(\mathbf{x}) = \bigvee_{\mathbf{y}} \{ \mu_P(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \wedge \mu_Q(\mathbf{y}) \} \quad (3.5)$$

$$\text{erosion } \mu_{P \ominus Q}(\mathbf{x}) = \bigwedge_{\mathbf{y}} \{ \mu_P(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \vee \mu_Q(\mathbf{y}) \} \quad (3.6)$$

dilation は次のような代数的規則（交換則、結合則、分配則）を満たしている（証明は付録 A.3）。erosion も同様である。よって、ここで定義した演算を代数的処理という。

命題 18

- (1) $\mu_{P \oplus Q}(\mathbf{x}) = \mu_{Q \oplus P}(\mathbf{x})$
- (2) $\mu_{(P \oplus Q) \oplus R}(\mathbf{x}) = \mu_{P \oplus (Q \oplus R)}(\mathbf{x})$
- (3) $\mu_{(P \cup Q) \oplus R}(\mathbf{x}) = \mu_{(P \oplus R) \cup (Q \oplus R)}(\mathbf{x})$

ここで定義した代数的処理の処理結果を示す。原画像は図 2.3 を用い、構成要素として図 3.7 の形のものを選んだ。 h の値は画像の濃度の最大値の $3/4$ を用いた。

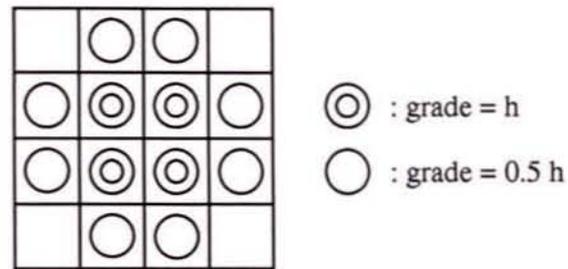


図 3.7: 構成要素 2

図 3.8、3.9はそれぞれ原画像に対する dilation, erosion の処理結果である。図 3.10、3.11は closing, opening の処理結果である。

また、構成要素を同じ図 3.7とした図 2.9の dilation, erosion, closing, opening の処理結果が図 3.12～図 3.15である。

さらに、これらの代数的処理を組み合わせ、様々な処理ができることが知られている [10]。その一例として、エッジ抽出を行った結果を示す。

原画像を図 2.3とする。図 3.16は $(P \oplus Q) - P$ すなわち、原画像を膨張させた画像 (図 3.8) から原画像を引いたもの、図 3.17は $P - (P \ominus Q)$ すなわち、原画像から収縮させた画像 (図 3.9) を引いたものである (濃度値が 0 より小さい場合は 0 とする)。

同様に、原画像 (図 2.9) を膨張させた画像から自身を引いたもの

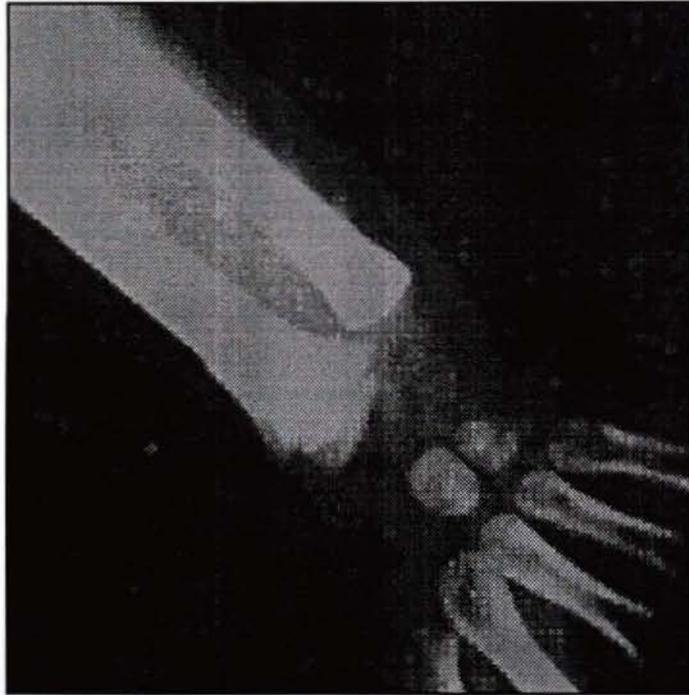


図 3.8: 画像 1 の dilation



図 3.9: 画像 1 の erosion

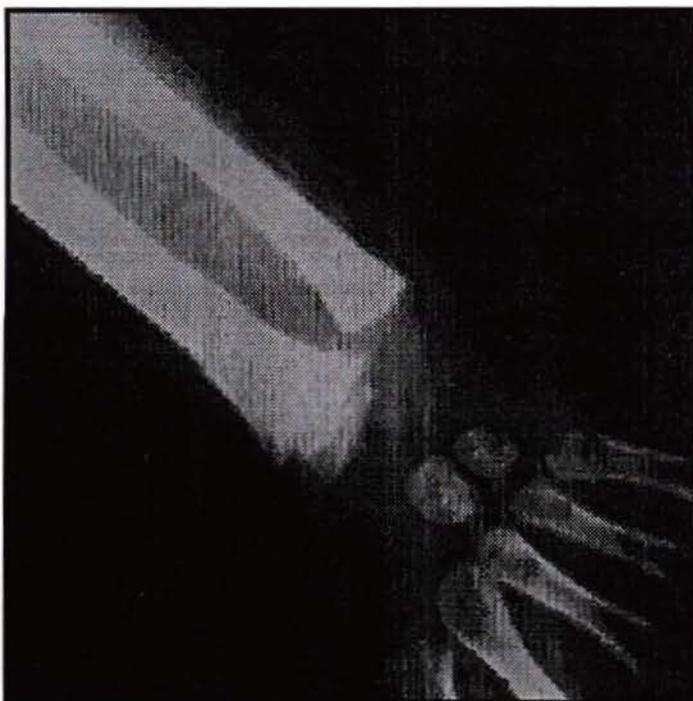


図 3.10: 画像1 の closing



図 3.11: 画像 1 の opening

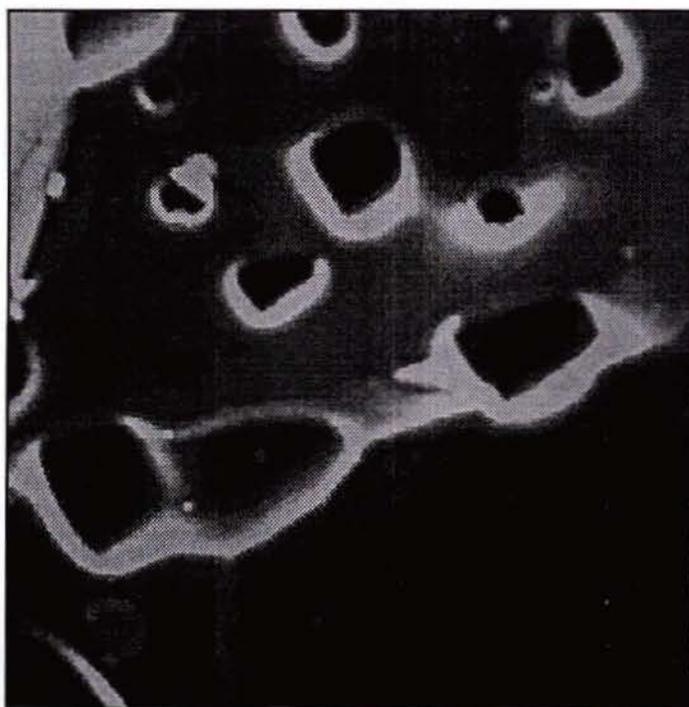


図 3.12: 画像 2 の dilation

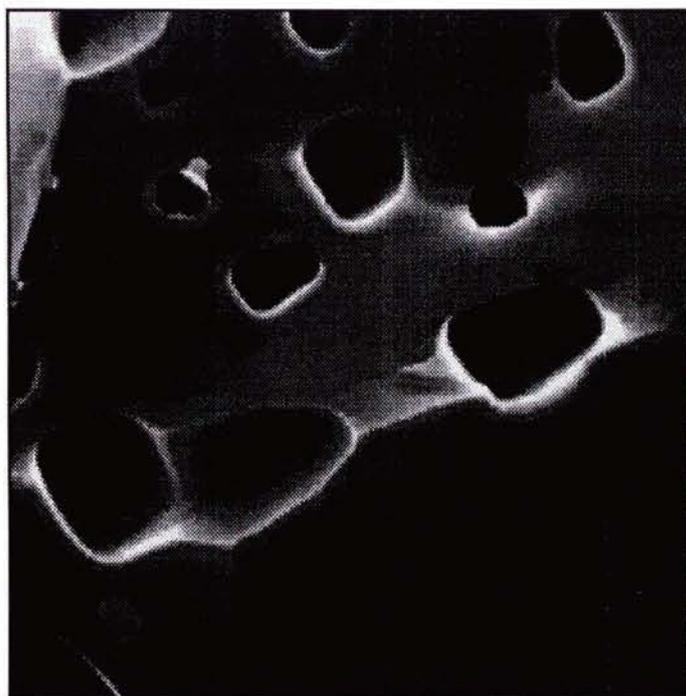


図 3.13: 画像 2 の erosion

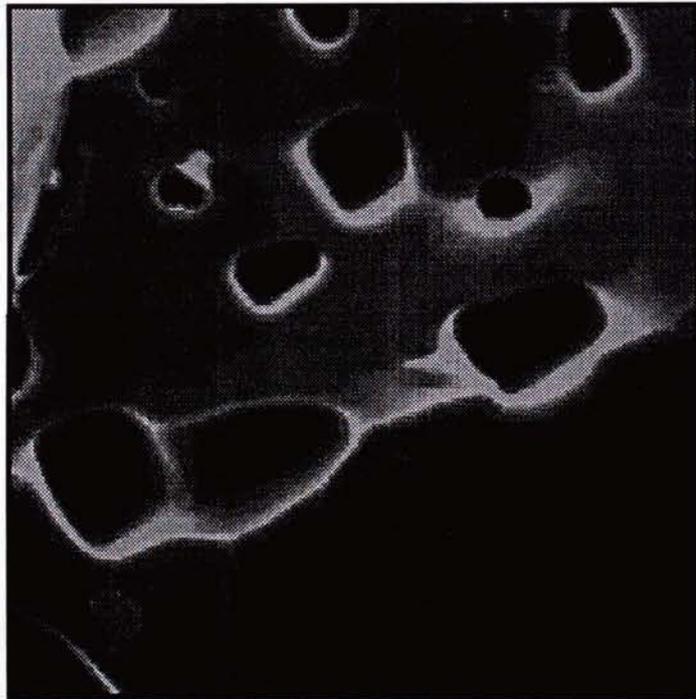


図 3.14: 画像 2 の closing

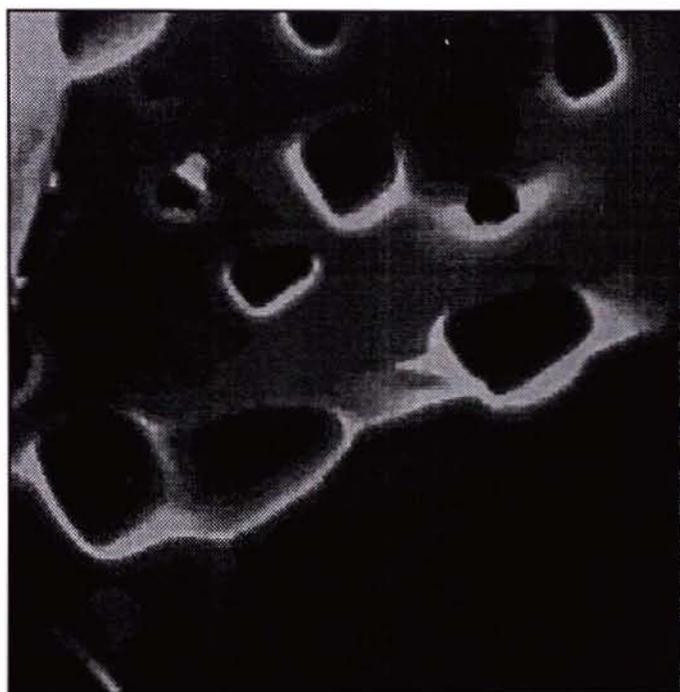


図 3.15: 画像 2 の opening



図 3.16: 画像 1 のエッジ 1 : $(P \oplus Q) - P$



図 3.17: 画像1のエッジ 2: $P - (P \ominus Q)$

が図 3.18 で、原画像から収縮させた画像を引いたものが図 3.19 である。

これらの処理は従来のエッジ抽出処理と類似した処理である。従来のエッジは濃度変化を調べ、それが急激に変化する部分を求めるものである [2]。図 3.16, 3.18 は原画像を膨張させた部分だけを求めたもの、図 3.17, 3.19 は原画像を収縮させた部分だけを求めたものであり、画像の縁（境界）の部分を探している。

3.3 位相的処理と代数的処理との関係

定義 17 で得られた dilation, erosion の代数的処理と、前節で得られた位相的処理との関係を考える。

数理形態学における構成要素 Q を開ファジィ集合としたとき、ある開基 \mathcal{B} の部分集合 \mathcal{B}' が存在して、

$$\mu_Q(\mathbf{x}) = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}'} \mu_\beta(\mathbf{x}) \quad (3.7)$$

と表せるとすると、dilation, erosion は次のようになる。

$$\mu_{P \oplus Q}(\mathbf{x}) = \bigvee_{\mathbf{y}} \{ \mu_P(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \wedge \mu_Q(\mathbf{y}) \}$$



図 3.18: 画像 2 のエッジ 1 : $(P \oplus Q) - P$



図 3.19: 画像 2 のエッジ 2: $P - (P \ominus Q)$

$$\begin{aligned}
&= \bigvee_{\mathbf{y}} \left\{ \mu_P(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \wedge \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}'} \mu_{\beta}(\mathbf{y}) \right\} \\
&= \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}'} \left[\bigvee_{\mathbf{y}} \{ \mu_P(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \wedge \mu_{\beta}(\mathbf{y}) \} \right] \\
&= \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}'} \mu_{P \oplus \beta}(\mathbf{x}) \tag{3.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{P \ominus Q}(\mathbf{x}) &= \bigwedge_{\mathbf{y}} \{ \mu_P(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \vee \mu_Q(\mathbf{y}) \} \\
&= \bigwedge_{\mathbf{y}} \left\{ \mu_P(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \vee \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}'} \mu_{\beta}(\mathbf{y}) \right\} \\
&= \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}'} \left[\bigwedge_{\mathbf{y}} \{ \mu_P(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \vee \mu_{\beta}(\mathbf{y}) \} \right] \\
&= \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}'} \mu_{P \ominus \beta}(\mathbf{x}) \tag{3.9}
\end{aligned}$$

つまり、画像 P と開集合である構成要素 Q との dilation(erosion) は、 P と開基 \mathcal{B} の部分集合 \mathcal{B}' の元 β との dilation(erosion) の合併となる。

第4章

カラー画像の処理

4.1 RGB空間による処理

カラー画像をコンピュータで処理する場合、画素の色を赤、緑、青 (RGB)3つの色に分解すると、それぞれの成分が濃淡画像とみなせるので、2章、3章で述べた濃淡画像の処理法が有効である。

しかしながら RGB に分割する場合、人間が見た時の色の差は考慮されない。また、見た目で色に差がある場合であっても平滑化されているような画像の場合、境界を出すことは困難である。図 4.1 がこのような場合の画像であり、RGB に分割してからそれぞれの境界抽出を行い、和をとると図 4.2 のようになり、うまく抽出されない。

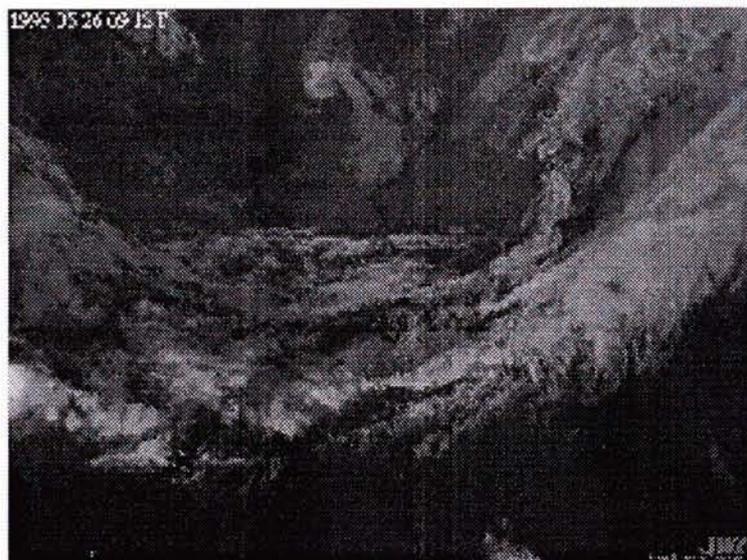


図 4.1: 画像 4 (カラー画像)

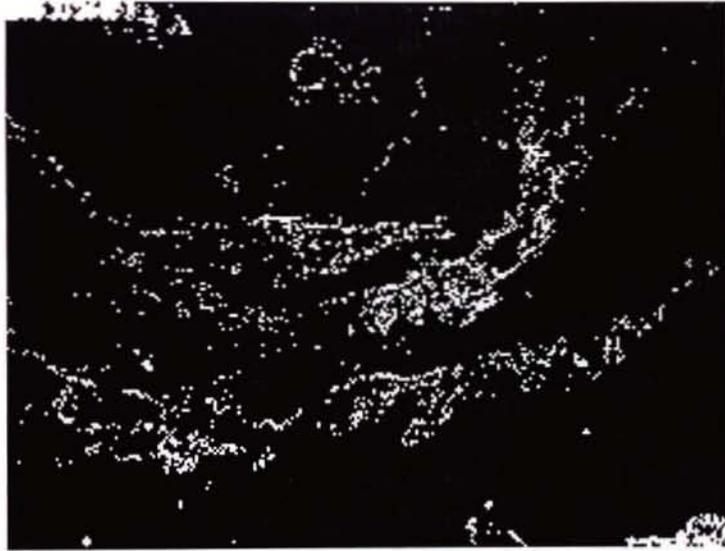


図 4.2: 画像 4 の境界 1

4.2 色距離を考慮した処理

前節の問題点を解決するため、位相的処理や代数的処理の前に、色の差を用いた簡単な分割をする手法を提案する。

4.2.1 色の距離

通常コンピュータで画像を処理する場合、RGB 表色系が使われる [2][6]。これは、RGB の各成分のスペクトルを変化させ、それら 3 刺激値の加色混合により色を作り出している。しかし、RGB 表色系では色の差の概念が無く、色の距離を扱いたい場合には不適當である。そこで、本研究ではカラー画像の分割に均等色空間 (uniform color scal) と呼ばれる色空間の 1 つである $L^*u^*v^*$ 空間 [2][6] を用いて色の距離を扱い、分割を行う。 $L^*u^*v^*$ 空間での色の差は、ユークリッド距離にほぼ一致しており、色の差 ΔE^* は

$$\Delta E^* = [(\Delta L^*)^2 + (\Delta u^*)^2 + (\Delta v^*)^2]^{(1/2)} \quad (4.1)$$

で計算できる。

4.2.2 RGB 空間から $L^*u^*v^*$ 空間への変換

RGB 空間から $L^*u^*v^*$ 空間への変換は

$$\text{RGB 空間} \rightarrow \text{XYZ 空間} \rightarrow u'v' \text{空間} \rightarrow L^*u^*v^* \text{空間} \quad (4.2)$$

という流れになる [2][6][11]。

XYZ 表色系は、国際照明委員会 (CIE:Commission Internationale de l'Eclairage) が、RGB 空間の計算上の不都合を修正し、色の統一的な表現をした空間である。Y は明度に対応しており、X:Y:Z=1:1:1 の割合で混合すると等エネルギー白色になる。 $u'v'$ 空間は色度図の上での距離がそのまま色の差を示すように xy を射影変換した空間で、均等色度図 (UCS diagram) と呼ばれる。均等色度図では、明るさに関する情報が考慮されていないので、明るさも考慮に入れた $L^*u^*v^*$ 均等色空間に変換する。実際の変換式は以下のようになる。

RGB \rightarrow XYZ 変換

$$X = 0.49000R + 0.31000G + 0.20000B \quad (4.3)$$

$$Y = 0.17697R + 0.81240G + 0.01063B \quad (4.4)$$

$$Z = 0.00000R + 0.01000G + 0.99000B \quad (4.5)$$

$$x = X/(X + Y + Z) \quad (4.6)$$

$$y = Y/(X + Y + Z) \quad (4.7)$$

$$z = Z/(X + Y + Z) \quad (4.8)$$

$$x + y + z = 1 \quad (4.9)$$

$xyz \rightarrow u'v'$

$$u' = 4x/(-2x + 12y + 3) \quad (4.10)$$

$$v' = 9y/(-2x + 12y + 3) \quad (4.11)$$

$u'v' \rightarrow L^*u^*v^*$

$$L^* = 116(Y/Y_0)^{1/3} - 16 \quad (4.12)$$

$$u^* = 13L^*(u' - u'_0) \quad (4.13)$$

$$v^* = 13L^*(v' - v'_0) \quad (4.14)$$

Y_0 は、基準白色面のルミナンス・ファクター、 u'_0, v'_0 は、基準白色面の u', v' の値である。

4.2.3 実際の処理

前節で述べた色の距離を踏まえながら、次の手順で処理を行う。

1. 原画像と基準色との $L^*u^*v^*$ 空間での距離を求める。
2. 次に図 4.3のようなマッピング関数を用いて、色の差をファジィ集合に変換する。 α は、個々の基準色により決める。

- 最後に、変換したファジィ集合ごとに、2章、3章で提案した処理を行い、それぞれの和集合をとる。

今回、基準色については単純に白・赤・緑・青の4色とし、 α はそれぞれの基準色から白までの距離を基準に決めた。

以上のような色距離を考慮に入れた位相的処理により境界抽出を行った結果が、図 4.4である。図 4.2と比較して良好な結果を得ることが出来る。

ただし画像によっては、パラメータ・基準色を適切に選ばないと雑音を拾いやすくなる傾向がある。この点については、個々の画像に対応したパラメータ・基準色を選ぶことなどによりある程度軽減できるが、まだ更に検討の余地がある。

ファジィ集合を用いた数理形態学の場合にも、この手法は有効である。

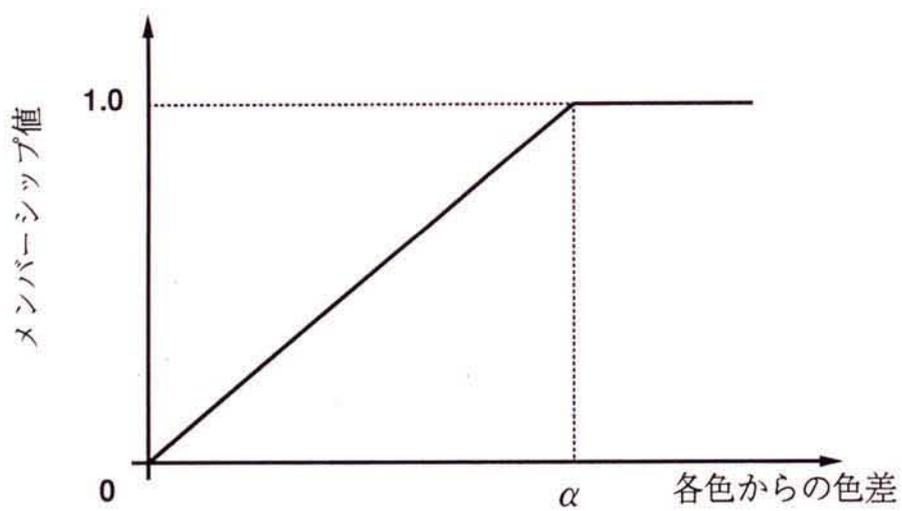


図 4.3: マッピング関数

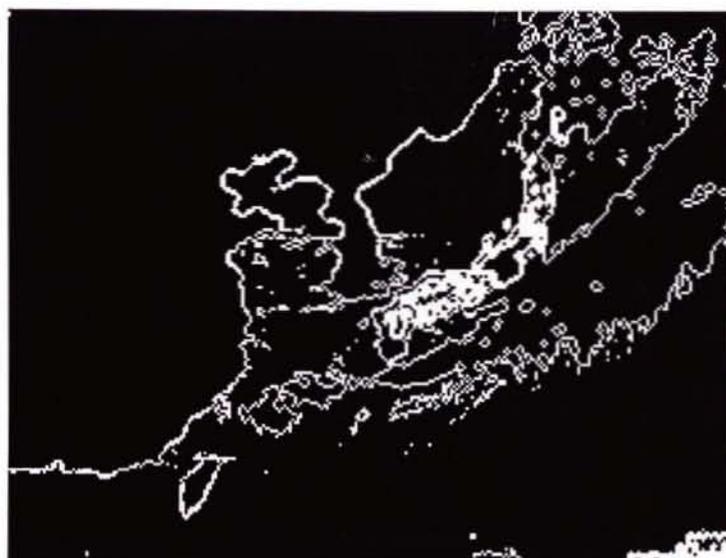


図 4.4: 画像 4 の境界 2

第5章

結論

本研究では、まず濃淡画像をファジィ集合として捉える方法を説明した。そして、ファジィテンプレートと名付けたある特定のファジィ集合を用いて有限ファジィ位相を構成し、2値画像に対する位相的处理「内部」「外部」「境界」と同様な演算を定義し、濃淡画像の内部、外部、境界抽出を行った。また、 α -近傍というある点におけるファジィ近傍を定義し、濃淡画像の連結性を扱うことを可能とした。さらに、近傍からファジィ位相を定義する方法を提案した。

次に、2値の数理形態学をファジィ集合を用いて拡張し、濃淡画像に対して簡単に dilation, erosion 等の代数的処理を行えるようにした。さらに、ファジィ位相から導かれた画像の位相的处理とファジィ理論による数理形態学から導かれる画像の代数的処理との関連性について論じた。

最後に、カラー画像を色の差を用いて色空間に分割し、その分割した画像に対して処理を行う、カラー画像に対する位相的処理・代数的処理を提案した。

位相的処理におけるファジイテンプレートや近傍、代数的処理における構成要素、カラー画像処理における基準色等、パラメータ選択の課題は存在するが、本研究における濃淡画像やカラー画像処理のファジイによる定式化をさらに体系的に整理する事によって、従来の画像処理を含む濃淡画像やカラー画像の処理法の数理的かつ体系的な手法を構成することが可能となると考える。

謝辞

本研究を進めるにあたって様々な御指導を賜った師玉康成教授に深甚の謝意を表す。

山浦弘夫教授、中村八束教授、不破泰助教授においては、本論文を通読していただくとともに有益な御助言を頂き、深甚の謝意を表す。

また、本研究に御協力いただいた長野工業高等専門学校 宮崎敬助教授に深く感謝する。

さらに、田村易男君、中岡伸夫君を始め、山浦研究室の方々から頂いた御支援に対し、謝意を表す。

最後に、私に長年における勉学の期間と経済的な援助を与えてくれた父 河原稔、母 河原美枝子に心から感謝する。

参考文献

- [1] 田村: “コンピュータ画像処理”, 総研出版 (1985)
- [2] 高木, 下田: “画像解析ハンドブック”, 東京大学出版会 (1991)
- [3] 日本ファジィ学会: “ファジィ画像処理”, 日刊工業新聞社 (1993)
- [4] 水本: “ファジィ理論とその応用”, サイエンス社 (1988)
- [5] 竹之内: “入門集合と位相”, 実教出版 (1971)
- [6] 日本色彩学会: “新編色彩科学ハンドブック”, 東京大学出版会 (1985)
- [7] Y.Nakamura, Y.Fuwa, H.Imura: “A Theory of Finite Topology and Image Processing”, Journal of The Faculty of Engineering Shinsyu University, No.69, pp.11-24(1991)
- [8] A.Rosenfeld: “Fuzzy Digital Topology”, Information and Control, 40, pp.76-87(1979)
- [9] R.M.Haralick, S.R.Sternberg, X.Zhuang: “Image Analysis Using Mathematical Morphology”, IEEE Trans. On Pattern Anal. Machine Intell., Vol.PAMI-9, 4, pp.532-550(1987)

- [10] 間瀬, 上田: “モルフォロジーと画像解析 (1), (2)”, 電子情報通信学会誌, Vol.74, No.2, pp.166-174, 3, pp.271-279(1991)
- [11] 原田, 宮腰, 新保: “カラー画像セグメンテーションのためのファジィ・クラスタリング手法”, 日本ファジィ学会誌, Vol.6, No.5, pp.1021-1036(1994)

研究業績

論文

- (1) K.Kawahara, T.Miyazaki, Y.shidama, H.Yamaura,: “FINITE TOPOLOGY BASED ON FUZZY TEMPLATES AND ITS APPLICATIONS”, Proc. of the 1st MAGNETO-ELECTRONICS International Symposium, pp.461–464(1994)
- (2) Kazuyoshi KAWAHARA, Yasunari SHIDAMA, Takashi MIYAZAKI, Yatsuka NAKAMURA, Hiroo YAMAURA, Hiromi KOBAYASHI: “Image Processing with Fuzzy Set Theory”, Proc. of the 2nd Asian Conference On Computer Vision (ACCV'95), Vol. I, pp.494–498(1995)
- (3) 河原和好, 師玉康成, 宮崎敬, 中村八束, 山浦弘夫: “ファジー集合論を用いた画像処理”, 電子情報通信学会論文誌 D-II, Vol.J80-D-II, No.1, pp.166–174(1997)
- (4) Kazuyoshi Kawahara, Takashi Miyazaki, Yasunari Shidama, Hiroo Yamaura, Hidetoshi Miyao: “Fuzzy Image Processing with Mathematical Morphology and Topology”, Proc. of 1997 IEEE

Region 10 Annual Conference(TENCON'97), Vol.1, pp.333-334
(1997)

- (5) Kazuyoshi Kawahara, Satoru Ichinose, Takashi Miyazaki, Yasunari Shidama, Hiroo Yamaura, Hidetoshi Miyao: "Image Processing using Mathematical Morphology and Topology with Fuzzy Set", Proc. of 1997 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA'97), Vol. 2, pp.1013-1016(1997)

口頭発表

- (1) 河原和好, 宮崎敬, 師玉康成, 山浦弘夫, 中村八束: "ファジイテンプレートを基にしたファジイ位相とその画像処理への応用", 第2回日本ファジイ学会北信越支部ミニシンポジウム, pp.51-52(1993)
- (2) 田村易男, 河原和好, 宮崎敬, 師玉康成, 山浦弘夫: "ファジイテンプレートを用いた画像の位相的处理及び代数的処理", 第3回日本ファジイ学会北信越支部ミニシンポジウム, pp.49-52(1994)
- (3) 中岡伸夫, 河原和好, 宮崎敬, 師玉康成, 山浦弘夫: "ファジイ位相を用いた濃淡画像の処理", 第3回日本ファジイ学会北信越支部ミニシンポジウム, pp.53-54(1994)

- (4) 河原和好, 宮崎敬, 中岡伸夫, 師玉康成, 中村八束, 山浦弘夫: “濃淡画像の位相による処理”, 平成6年度電子情報通信学会信越支部大会, pp.369-370(1994)
- (5) 河原和好, 宮崎敬, 田村易男, 師玉康成, 中村八束, 山浦弘夫: “ファジィテンプレートを用いた画像の代数的処理法”, 平成6年度電子情報通信学会信越支部大会, pp.373-374(1994)
- (6) 田村易男, 宮崎敬, 河原和好, 師玉康成, 山浦弘夫: “ファジィ位相を用いた画像処理のカラー画像への応用”, 第4回日本ファジィ学会北信越支部ミニシンポジウム, pp.40-41(1995)
- (7) 河原和好, 宮崎敬, 師玉康成, 山浦弘夫: “ファジィ位相論を用いた画像処理”, 第4回日本ファジィ学会北信越支部ミニシンポジウム, Vol.42-43(1995)

その他の論文

- (1) 河原和好, 宮崎敬, 師玉康成, 山浦弘夫, 中村八束: “ファジィテンプレートを基にしたファジィ位相とその画像処理への応用”, 信州大学工学部紀要, Vol.74, pp.113-122(1994)

研究業績と本論文の関係

本論文の各章と研究業績との関係を以下に示す。

- 第2章 論文(1)
 - 口頭発表(1)(3)(4)
 - その他の論文(1)
- 第3章 論文(2)(3)
 - 口頭発表(2)(5)
- 第4章 論文(4)(5)
 - 口頭発表(6)(7)

付録 A

種々の証明

A.1 τ が位相構造を定義していることの証明

(証明) (I) については

$$\bigcup_{t \in T} t = X$$

より $T \subseteq B$ であることに注意すると $X \in \tau$ である。

また、 $\emptyset \in T \subseteq B \subseteq \tau$ である。

(II) については帰納法による (有限集合 M の要素数を n とする)。

① $n = 2$ のとき、

$$O_1, O_2 \in \tau$$

とすると、 B の部分族 $(\beta_i^1)_{i \in I}, (\beta_j^2)_{j \in J}$ があって

$$O_1 = \bigcup_{i \in I} \beta_i^1 \quad O_2 = \bigcup_{j \in J} \beta_j^2$$

ゆえ

$$\begin{aligned} O_1 \cap O_2 &= \left(\bigcup_{i \in I} \beta_i^1 \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} \beta_j^2 \right) \\ &= \bigcup_{(i,j) \in I \times J} \beta_i^1 \cap \beta_j^2 \end{aligned}$$

$\beta_i^1, \beta_j^2 \in B$ だから

$$\beta_i^1 \cap \beta_j^2 \in B$$

よって、

$$O_1 \cap O_2 \in \tau$$

② $n \leq m$ のとき成り立つと仮定する。

$O_1, O_2, \dots, O_m, O_{m+1} \in \tau$ のとき

$$\bigcap_{i=1}^{i=m+1} O_i = \left(\bigcap_{i=1}^{i=m} O_i \right) \cap O_{m+1} \text{ で}$$

$\bigcap_{i=1}^{i=m} O_i \in \tau$ かつ $O_{m+1} \in \tau$ だから

$$\bigcap_{i=1}^{i=m+1} O_i \in \tau$$

(III) については、 $(O_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}$ とするとき $O_i \in \mathcal{T}(i \in I)$ だから、各 i について B の部分族 $(\beta_k^i)_{k \in K_i}$ があって

$$O_i = \bigcup_{k \in K_i} \beta_k^i$$

$$\text{よって } \bigcup_{i \in I} O_i = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{k \in K_i} \beta_k^i \right) \in \mathcal{T}$$

□

A.2 α -近傍の定義から導かれる命題の証明

(命題 7 の証明)

- ① (i) の証明

U が $x \in X$ の α -近傍であるから、開ファジィ集合 O が存在して

$$\mu_O(x) \geq \alpha, O \subseteq U$$

$$U \subseteq U' \text{ より } O \subseteq U'$$

よって、 U' も $x \in X$ の α -近傍である。

□

- ① (ii) の証明

\mathcal{U}_i が $x \in X$ の α -近傍であるから開ファジィ集合 O_i が存在して

$$\mu_{O_i}(x) \geq \alpha, O_i \subseteq \mathcal{U}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

となる。 $O \triangleq \bigcap_{i=1}^{i=n} O_i$ とすると

$$\mu_O(x) \geq \alpha$$

O は開ファジィ集合で、

$$O \subseteq O_i \subseteq \mathcal{U}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$O \subseteq \bigcap_{i=1}^{i=n} \mathcal{U}_i$$

よって、 $\bigcap_{i=1}^{i=n} \mathcal{U}_i$ も $x \in X$ の α -近傍である。 □

• ②の証明

(\Rightarrow) O を開ファジィ集合とし、 $x \in X, \mu_O(x) \neq 0 (> 0)$ とすると、 O 自身が x の $\mu_O(x)$ -近傍となる。

(\Leftarrow) O を $x \in X$ の $\mu_O(x)$ -近傍とすると、開ファジィ集合 O_x が存在して

$$\mu_{O_x}(x) \geq \mu_O(x), O_x \subseteq O$$

である。 $O' \triangleq \bigcup_{x \in X, \mu_o(x) \neq 0} O_x$ とすると $O' \subseteq O$

また、

$$\mu_O(x) \leq \mu_{O_x}(x) \leq \mu_{O'}(x)$$

$$(x \in X, \mu_O(x) \neq 0)$$

$$\mu_O(x) = 0 \text{ のとき } \mu_{O'}(x) \geq 0 \text{ ゆえ}$$

$$\text{すべての } x \in X \text{ について } \mu_O(x) \leq \mu_{O'}(x)$$

$$\therefore O \subseteq O'$$

$$\therefore O \text{ は開ファジイ集合}$$

□

(命題 8 の証明)

U が A の近傍ならば、開ファジイ集合 O が存在し、 $A \subseteq O \subseteq U$ である。

これより、すべての $x \in X, \mu_A(x) \neq 0$ に対して

$$\mu_O(x) \geq \mu_A(x), O \subseteq U$$

よって、 U は $x \in X$ の $\mu_A(x)$ 近傍となる。

□

(命題 9 の証明)

(\Rightarrow) f が F -連続のとき、 v が $f(x)$ の α -近傍とすると開ファジイ集合 \mathcal{Y} が存在して

$$\mu_{\mathcal{Y}}(f(x)) \geq \alpha, \mathcal{Y} \subseteq v$$

\mathcal{Y} が開ファジイ集合ゆえ、 $\mathcal{X} \triangleq f^{-1}(\mathcal{Y})$ は開ファジイ集合で

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{X}}(x) &= \mu_{f^{-1}(\mathcal{Y})}(x) \\ &= \mu_{\mathcal{Y}}(f(x)) \geq \alpha \end{aligned}$$

$f^{-1}(v) \supseteq f^{-1}(\mathcal{Y}) = \mathcal{X}$ ゆえ、 $f^{-1}(v)$ は x の α -近傍

(\Leftarrow) \mathcal{Y} を開集合とすると、すべての $y \in Y, \mu_{\mathcal{Y}}(y) \neq 0$ に対し、 \mathcal{Y} は y の $\mu_{\mathcal{Y}}(y)$ -近傍である。

$O \triangleq f^{-1}(\mathcal{Y})$ とおき、

$x \in X, \mu_O(x) = \mu_{\mathcal{Y}}(f(x)) \neq 0$ とすると \mathcal{Y} は $f(x)$ の $\mu_{\mathcal{Y}}(f(x))$ -近傍である。

\therefore 仮定から $O = f^{-1}(\mathcal{Y})$ は x の $\mu_{\mathcal{Y}}(f(x))$ -近傍。

$\mu_{\mathcal{Y}}(f(x)) = \mu_O(x)$ ゆえ、 O は x の $\mu_O(x)$ -近傍。

\therefore すべての $x \in X, \mu_O(x) \neq 0$ に対して、 O は x の $\mu_O(x)$ -近傍。

よって O は開集合

すなわち、任意の開ファジィ集合 \mathcal{Y} の逆像 $O = f^{-1}(\mathcal{Y})$ は開ファジィ集合。

よって f は F -連続

□

A.3 代数的規則を満たすことの証明

(命題 18 の証明)

[証明]

$$(1) P \oplus Q = Q \oplus P$$

$$\mu_{P \oplus Q}(\mathbf{x}) = \bigvee_{\mathbf{y}} \{ \mu_P(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \wedge \mu_Q(\mathbf{y}) \}$$

ここで $z = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ とおく

$$\begin{aligned} \mu_{P \oplus Q}(\mathbf{x}) &= \bigvee_{\mathbf{x} - \mathbf{z}} \{ \mu_P(\mathbf{z}) \wedge \mu_Q(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \} \\ &= \mu_{Q \oplus P}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

□

$$(2) (P \oplus Q) \oplus R = P \oplus (Q \oplus R)$$

$$\mu_{(P \oplus Q) \oplus R}(\mathbf{x})$$

$$\begin{aligned}
&= \bigvee_{\mathbf{y}} \{ \mu_{P \oplus Q}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \wedge \mu_R(\mathbf{y}) \} \\
&= \bigvee_{\mathbf{y}} \left[\bigvee_z \{ \mu_P(\mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{z}) \wedge \mu_Q(\mathbf{z}) \} \wedge \mu_R(\mathbf{y}) \right] \\
&= \bigvee_{\mathbf{y}} \bigvee_z \{ \mu_P(\mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{z}) \wedge \mu_Q(\mathbf{z}) \wedge \mu_R(\mathbf{y}) \} \\
&\quad \text{ここで } \mathbf{v} = \mathbf{y} + \mathbf{z} \text{ とおくと、}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mu_{(P \oplus Q) \oplus R}(\mathbf{x}) \\
&= \bigvee_{\mathbf{y}} \bigvee_{\mathbf{v} - \mathbf{y}} \{ \mu_P(\mathbf{x} - \mathbf{v}) \wedge \mu_Q(\mathbf{v} - \mathbf{y}) \wedge \mu_R(\mathbf{y}) \} \\
&= \bigvee_{\mathbf{v} - \mathbf{y}} \left[\mu_P(\mathbf{x} - \mathbf{v}) \wedge \bigvee_{\mathbf{y}} \{ \mu_Q(\mathbf{v} - \mathbf{y}) \wedge \mu_R(\mathbf{y}) \} \right] \\
&= \bigvee_{\mathbf{v} - \mathbf{y}} \{ \mu_P(\mathbf{x} - \mathbf{v}) \wedge \mu_{Q \oplus R}(\mathbf{v}) \} \\
&= \mu_{P \oplus (Q \oplus R)}(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

□

$$(3) (P \cup Q) \oplus R = (P \oplus R) \cup (Q \oplus R)$$

$$\begin{aligned}
&\mu_{(P \cup Q) \oplus R}(\mathbf{x}) \\
&= \bigvee_{\mathbf{y}} \{ \mu_{P \cup Q}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \wedge \mu_R(\mathbf{y}) \} \\
&= \bigvee_{\mathbf{y}} \left[\{ \mu_P(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cup \mu_Q(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \} \wedge \mu_R(\mathbf{y}) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \bigvee_{\mathbf{y}} \left[\{ \mu_P(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \wedge \mu_R(\mathbf{y}) \} \cup \{ \mu_Q(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \wedge \mu_R(\mathbf{y}) \} \right] \\ &= \mu_{(P \oplus R) \cup (Q \oplus R)}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

□