

第3章 逆問題解析手法

3.1 はじめに

測定データから未知量を同定する逆解析は一般に非線形問題であり，そのうえ，不適切性を有するため取り扱いが難しい．逆問題解析手法としては，仮定した数理モデルを順解析した結果が，測定データに一致し既知情報と整合するように対象のモデルパラメータの最適値を決定する方法が多く採用されている．本研究では開発済みの順解析プログラムを有効に利用した方法を採用する．ここでは決定論に基づいた手法と確率論に基づいた二種類の逆解析手法を提案する．

一つは，逆問題を，未知量を最適化パラメータと考え，これを測定データと順解析による計算結果から構成する目的関数を最小化するように決定する，最適化問題に帰着させて解析する方法である．もう一つは，未知量を系の状態量と考え，フィルター理論により観測データに基づいて確率密度関数の極値を与えるような状態量の最適値を，反復計算によって決定する逆解析手法である．本章ではこれら二つの逆解析手法について説明する．また，逆解析においては，用いる情報の量や質による結果への影響が大きいため，これらの取扱い方に注意を要する．そこで，限られた少数の測定点配置に対して情報を補う手法と選択する手法を提案する．さらに，対象をモデル化する場合の手法として，遺伝的アルゴリズムを適用してモデルパラメータを決定する方法についても述べる．最後に，本逆解析手法においては，対象の数値解析が必須である．数値解析手法として，動弾性問題および非定常熱伝導問題の境界要素解析法について説明する．

3.2 最適化手法の適用

3.2.1 最適化手法による逆解析

測定データに基づき，数値解析手法を援用して未知量を同定する逆解析は，未知量

を最適化パラメータに取り，対象とする境界上あるいは領域内のいくつかの測定点および測定時刻で計測される測定データと，未知量を仮定して対象領域に対するモデルを数値解析して得られる対応する計算値との残差二乗和を目的関数にとると，目的関数を最小化する最適化パラメータを拘束条件のもとで決定する最適化問題として考えることができる。

最適化問題は一般に次のように定式化することができる⁽¹⁾⁻⁽⁸⁾。

” 制約条件：

$$g_i(\mathbf{p}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, I \quad (3.1)$$

$$h_j(\mathbf{p}) = 0, \quad j = 1, \dots, J \quad (3.2)$$

のもとで，目的関数 W ：

$$W = W(\mathbf{p}) \quad (3.3)$$

を最小にするような最適化パラメータ \mathbf{p} ：

$$\mathbf{p} = \{p_1 \ p_2 \ p_3 \ \dots \ p_P\}^T \quad (3.4)$$

を求める。”

ここで， P は未知パラメータの総数であり，添え字 T は行列の転置を表す。

さて，逆問題を最適化問題に帰着させて記述する。まず，目的関数は m 番目の測定点 \mathbf{x}_m における応答の計測値 $\bar{\mathbf{d}}(\mathbf{x}_m)$ と，数値解析により求められた対応する点での計算値 $\mathbf{d}(\mathbf{x}_m)$ との残差二乗和として，次のように定義することができる。

$$W = \sum \{ \mathbf{d}(\mathbf{x}_m) - \bar{\mathbf{d}}(\mathbf{x}_m) \}^2 \quad (3.5)$$

ただし， Σ は \mathbf{d} の成分と測定点 m にわたって総和をとることを示す。 $\bar{\mathbf{d}}(\mathbf{x}_m)$ は具体的に次のような測定データ列を表わす。

$$\bar{\mathbf{d}}(\mathbf{x}_m) = \{ \bar{d}_1 \ \bar{d}_2 \ \bar{d}_3 \ \dots \ \bar{d}_N \}^T \quad (3.6)$$

これらは，たとえば測定点ごとの変位成分を順番に並べたものとなる。 N は測定データの総数を表す。したがって，逆問題は制約条件式(3.1), (3.2)のもとに，式(3.5)で表される測定値と計算値に関する残差で構成された目的関数 W を最小にするような，未知パラメータ \mathbf{p} を決定する最適化問題に帰着させて解析することができる。

動弾性逆問題を考える場合、最適化の目的関数 W は、境界上の測定点における動応答の計測値と、境界要素法により解析された対応する点での計算値との残差二乗和として定義される。

測定値に変位を用いる場合、目的関数は境界上の m 番目の測定点 \mathbf{x}_m における変位の測定値 $\bar{u}_i(\mathbf{x}_m)$ と境界要素法により計算された対応する点での変位 $u_i(\mathbf{x}_m)$ との残差二乗和として、次式のように定義する。

$$W = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^D \{u_i(\mathbf{x}_m) - \bar{u}_i(\mathbf{x}_m)\}^2 \quad (3.7)$$

ただし、 M は境界上の測定点数、 D は考える問題の次元数で、2次元問題では $D=2$ 、3次元問題では $D=3$ である。

一方、境界上のひずみ応答を用いる場合には、目的関数は次式に示すように、境界上の測定点において計測されたひずみ $\bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{x}_m)$ と境界要素法により求められる対応する点でのひずみ $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}_m)$ との残差二乗和となる。

$$W = \sum_{m=1}^M \sum_{i,j=1}^D \{\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}_m) - \bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{x}_m)\}^2 \quad (3.8)$$

非定常熱伝導逆問題においては、時間軸方向の測定データも利用できることから、この情報も目的関数に加える。温度の測定データを用いる場合、目的関数は次のように表すことができる。

$$W = \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M \{T(\mathbf{x}_m, t_l) - \bar{T}(\mathbf{x}_m, t_l)\}^2 \quad (3.9)$$

ただし、 $\bar{T}(\mathbf{x}_m, t_l)$ は時刻 t_l における測定点 \mathbf{x}_m での温度を表し、 $T(\mathbf{x}_m, t_l)$ はそれに対応する時刻と測定点で境界要素法により解析された温度の計算値である。 L は時間軸方向における全測定点数を表す。

先験情報などの未知パラメータに関する拘束は、制約条件として目的関数に組み込むことができる。制約条件は最適化手法において一般に採用されているペナルティ関数法(penalty function method)やラグランジュ乗数法(Lagrangian multiplier method)などの手法により取り扱うことができる⁽¹⁾⁻⁽⁸⁾。

3.2.2 未知量の近似

最適化手法を適用する際には、最適化パラメータをいかに少なくするかが、解析の

率の向上や有効な解を得るための重要なポイントとなる．2.2節と2.3節で述べた未知量を取り扱う場合，形状同定逆解析においては形状を単純な幾何形状で近似することが考えられる．たとえば，欠陥を球や楕円体で近似し，き裂は線分や楕円形平面などで近似する．このようにすれば，欠陥を位置を表す代表点の座標値と形状のパラメータで規定でき，少ない自由度を取り扱えば済むことになる．また，境界値分布などは境界値を位置座標に対する大きさとして曲面で近似することが考えられ，曲面を表す関数のパラメータを未知量に選ぶことが可能である．一方，未知量のいくつかの代表点または代表値を直接パラメータとして扱うこともできる．

次に，逆解析で取り扱う未知量の近似方法について示す．未知量を近似するパラメータが最適化手法を用いた逆解析における最適化パラメータとなる．また，フィルタ理論を用いた手法における未知量である状態量にも同じものを用いる．

[1]境界形状

(1)空洞欠陥の位置形状 図3.1に示すように空洞欠陥を回転楕円体で近似するものとするれば，未知パラメータは次の7つとなる．

$$\mathbf{p} = \{ X_1 \ X_2 \ X_3 \ a \ b \ \theta \ \varphi \}^T \quad (3.10)$$

ただし， X_1, X_2, X_3 は回転楕円体の中心座標， a と b は短軸と長軸の長さ， θ と φ は長軸が座標軸となす角度を表す． θ と φ は長軸の単位方向ベクトル $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3)$ のうちの二つの成分 n_1 と n_2 で表してもよい．また，さらに単純に球で近似するとすれば， a, b, θ と φ は球の半径 R で代表され，次式のようになる．

$$\mathbf{p} = \{ X_1 \ X_2 \ X_3 \ R \}^T \quad (3.11)$$

(2)き裂の位置形状 図3.2に示すように内部き裂を楕円形で近似するものとするれば，未知パラメータは次式で表される．

$$\mathbf{p} = \{ X_1 \ X_2 \ X_3 \ a \ b \ n_1 \ n_2 \}^T \quad (3.12)$$

ただし， $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3)$ は楕円形き裂を含む面の法線ベクトルであり次式が成り立つ．

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (3.13)$$

円形で近似する場合は，式(3.12)の a, b を半径 R で置き換えた次式で表される．

$$\mathbf{p} = \{ X_1 \ X_2 \ X_3 \ R \ n_1 \ n_2 \}^T \quad (3.14)$$

図3.3に示すような長さ L_c の直線き裂は次のように近似できる．

$$\mathbf{p} = \{ X_1 \ X_2 \ X_3 \ L_c \ n_1 \ n_2 \}^T \quad (3.15)$$

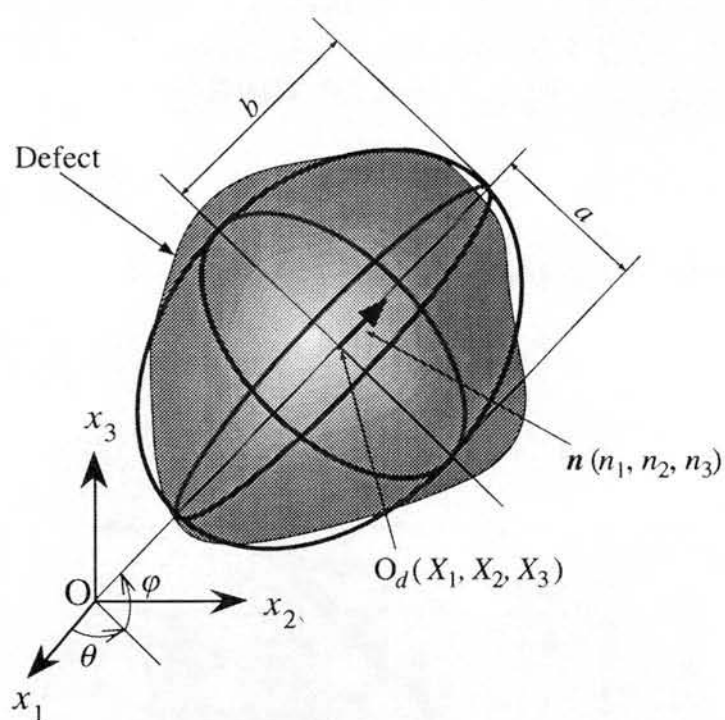


図3.1 回転楕円体による空洞欠陥の近似

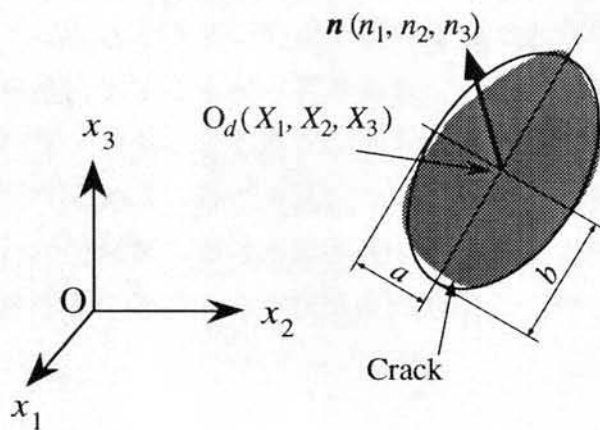


図3.2 楕円形による内部き裂の近似

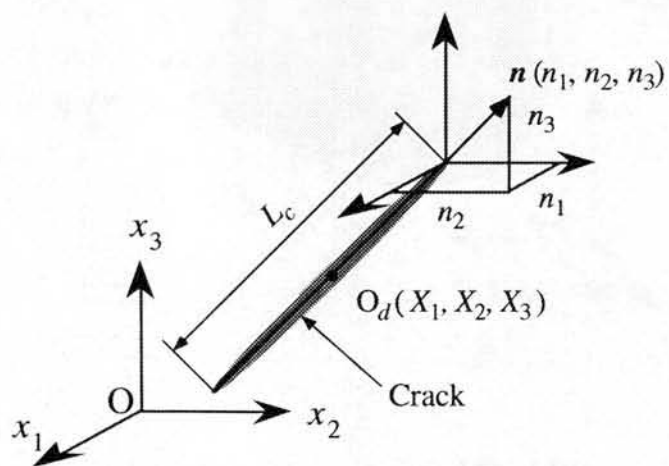


図3.3 内部直線き裂の近似

- (3)介在物の位置形状および材料定数 介在物を表す未知パラメータは、位置形状に関しては空洞欠陥の場合と同様にとることができ、それらに材料定数のパラメータが加わる．たとえば介在物を球形で近似し、介在物内で材料定数が一定であると仮定すれば次のように表される．

$$\mathbf{p} = \{ X_1 \ X_2 \ X_3 \ R \ E_d \ \nu_d \ \rho_d \}^T \quad (3.16)$$

ただし、 E_d は介在物のYoung率、 ν_d はPoisson比、 ρ_d は密度を表す．

- (4)表面欠陥形状 観測できない部分の表面欠陥としてはパイプや圧力容器内面などに発生する腐食によるくぼみなどが挙げられる．また、表面き裂なども代表的な例である．この場合、くぼみに対しては半球面などで近似する．表面き裂は半楕円形で近似する．これらの位置形状を表すパラメータは内部欠陥と同様に式(3.11)や式(3.12)で表される．一方、図3.4に示すようにき裂開口部が物体表面に出現しており測定可能な場合において、き裂深さを推定したいときは、き裂面を半楕円形または半円形で近似するものとして、未知パラメータは次のようになる．

$$\mathbf{p} = \{ d \ \theta \}^T \quad (3.17)$$

ただし、 d はき裂深さを表し、 θ はき裂開口部がある面と、き裂面とのなす角を表す．

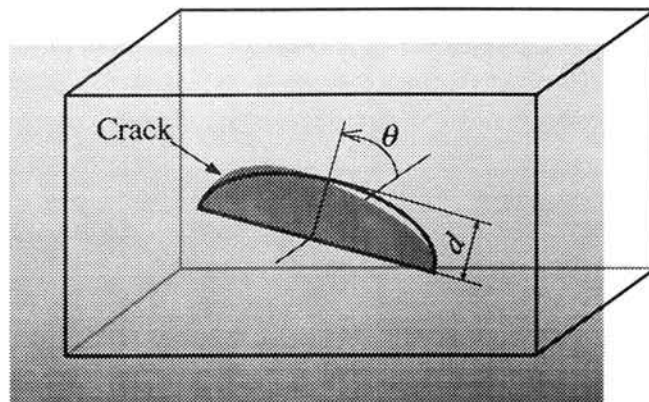


図3.4 半楕円形による表面き裂の近似

- (5)代表点近似 境界形状をいくつかの代表点で表すこともできる．この場合，境界要素の節点座標をパラメータとして扱うことが考えられる．

$$p = \{ X_1^1 \ X_2^1 \ X_3^1 \ X_1^2 \ X_2^2 \ X_3^2 \ \cdots \ X_1^i \ X_2^i \ X_3^i \ \cdots \ X_1^P \ X_2^P \ X_3^P \}^T \quad (3.18)$$

ただし， X_1^i, X_2^i, X_3^i ($i=1, 2, \dots, P$)は i 番目の節点座標を表す．

- (6)2次元問題 逆解析手法の有効性を確認するための数値シミュレーションは2次元問題を中心に解析する．この場合，(1)から(4)で述べた欠陥のパラメータは座標の自由度が一つ減少し，さらに単純な平面幾何形状の位置と形状を表すものとなる．たとえば，楕円形欠陥を近似するパラメータは次のようになる．

$$p = \{ X_1 \ X_2 \ a \ b \ \theta \}^T \quad (3.19)$$

ここで， θ は長軸と x_1 軸とのなす角度である．

[2]境界値

- (1)曲面による近似 変位 $u(x)$ や表面力 $p(x)$ ，温度 $T(x, t)$ ，熱流束 $q(x, t)$ ，熱伝達率 $h(x, t)$ などの境界値分布は，その値をある点における高さとして表すと，3次元曲面として近似できる．この場合，曲面を表す関数のパラメータが未知パラメータとなる．たとえば，図3.5(a)に示すように温度分布 $T(x, t)$ は，空間座標 x_i および時間方向 t に関する3次元曲面 $f(x_i, t)$ 上の値として近似できる．また，図3.5(b)に示すように変位分布 $u(x)$ はその成分 u_i の値を，空間座標 x に対するある投影面上の点 (x, y) における高さとして表すことで3次元曲面 $f(x, y)$ として近似できる．

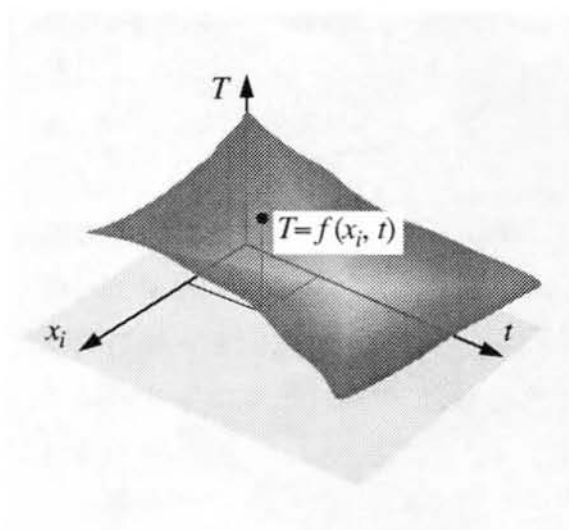
一般に3次元曲面 $f(x, y)$ は助変数 ξ と η を用いて，次のように表現することができる．

$$x = x(\xi, \eta) \quad (3.20)$$

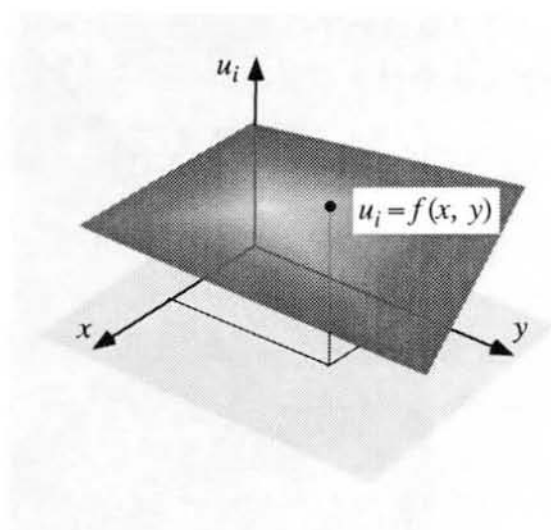
$$y = y(\xi, \eta) \quad (3.21)$$

$$f = f(\xi, \eta) \quad (3.22)$$

本研究では， x, y, f に関する曲面を ξ と η に関するB-スプライン関数により表す．B-スプライン関数による曲面表示については文献(9)から(12)に詳しく記述されている．以下には，境界値をB-スプライン曲面により近似する手順を示す．



(a) 温度分布の曲面近似



(b) 変位分布の曲面近似

図3.5 境界値の関数近似

$f(x, y)$ は図3.6に示す座標系のもとでBースプライン曲面上の点として、次のように表すことができる。

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{j=1}^{p_2} \alpha_{ij} B_{ik_1}(\xi) B_{jk_2}(\eta) \quad (3.23)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{j=1}^{p_2} \beta_{ij} B_{ik_1}(\xi) B_{jk_2}(\eta) \quad (3.24)$$

$$f(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{j=1}^{p_2} \gamma_{ij} B_{ik_1}(\xi) B_{jk_2}(\eta) \quad (3.25)$$

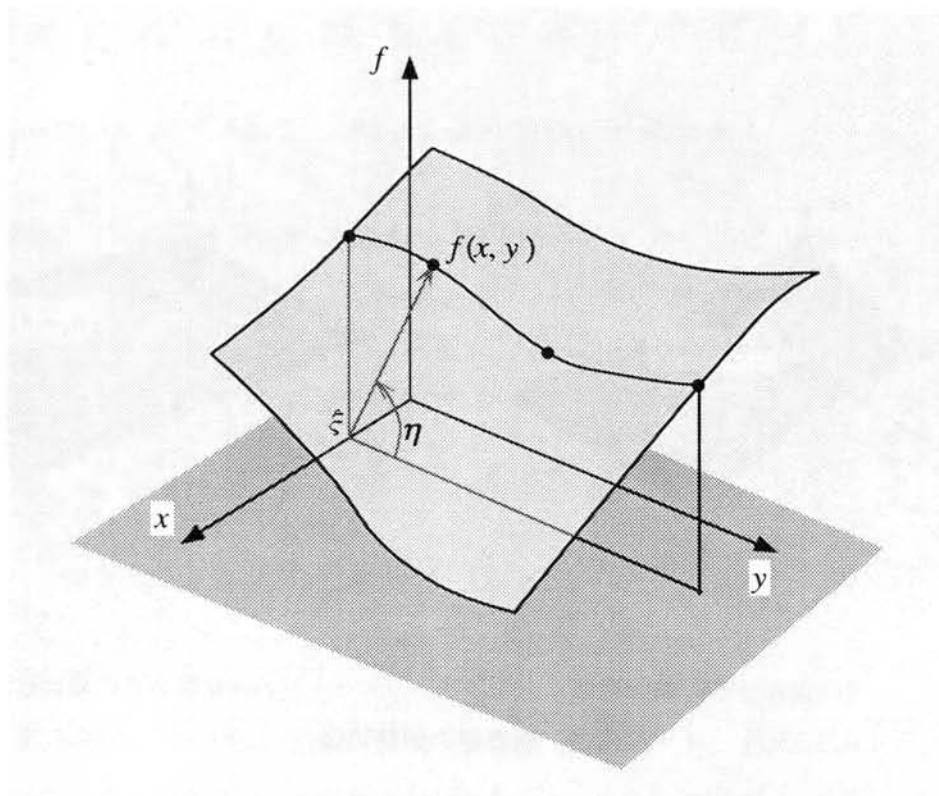


図3.6 B-スプライン曲面による境界値の近似

ただし, B_{ik_1} と B_{jk_2} はそれぞれ k_1 階 ($k_1 - 1$ 次) と k_2 階 ($k_2 - 1$ 次) の B-スプライン関数である. α_{ij} , β_{ij} , γ_{ij} はスプライン関数の係数であり, 未知パラメータとなる.

式(3.23)から式(3.25)により $f(x, y)$ を表すには, まず, $p (= p_1 p_2)$ 個のデータ点を準備する.

$$f(x_i, y_j), \quad i = 1, 2, \dots, p_1, \quad j = 1, 2, \dots, p_2 \quad (3.26)$$

データ点に対応して以下のデータ列をつくる.

$$(\xi_i, \eta_j, x_{ij}), \quad (\xi_i, \eta_j, y_{ij}), \quad (\xi_i, \eta_j, f_{ij}) \quad (3.27)$$

つぎに、スプライン関数のノードを選定する。スプライン関数による曲面表示ではノードの選び方によって得られる曲面が異なってくる。安定な曲面を得るためには、データ点に適したノードを選定する必要がある。ここでは、Schoenberg-Whitneyの条件⁽¹¹⁾を用いてノードを決定する。

これらのノードと式(3.27)のデータ列を用いて、 ξ と η に関するB-スプライン関数 B_{ik_1} と B_{jk_2} を構成し、式(3.23)から式(3.25)を、式(3.26)のデータ点を代入して連立して解き、 α_{ij} , β_{ij} , γ_{ij} を求めれば、 $f(x, y)$ を表すB-スプライン曲面が得られる。

- (2)関数曲線による近似 実用上は境界上の未知量を曲線で近似すれば十分である場合が多い。たとえば、ある1点の温度変化 T を求めたい場合には $T=f(t)$ として、時間に関する関数で近似できる。また、変位分布が座標 x_j の関数 f で近似できるものと仮定すると、 i 方向の変位成分 $u_i(x_j)$ は、曲線関数 f を用いて $u_i=f(x_j)$ のように表される。

曲線関数を用いた近似方法⁽¹³⁾には、次のようなものが考えられる。

(i)多項式

未知境界値 $f(u)$ を N 個の点を通る $(N-1)$ 次多項式で近似できるものとする、 N 式のように表すことができる。

$$f(u) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n u^n \quad (3.28)$$

この場合、未知パラメータは N 個の a_n である。

(ii)フーリエ級数

未知境界値が u 、区間 $[l_1, l_2]$ を一周期とする周期関数で表されると仮定してフーリエ級数で近似した場合、次式のように表すことができる。

$$f(u) = \sum_{n=0}^{N/2} a_n \cos\left\{\frac{2\pi n}{l_1 - l_2}(u - l_1)\right\} + \sum_{n=0}^{N/2} b_n \sin\left\{\frac{2\pi n}{l_1 - l_2}(u - l_1)\right\} \quad (3.29)$$

ここで、 a_n と b_n はフーリエ係数であり、これを未知パラメータとして扱う。決定すべきパラメータの数は N 個である。

(iii)スプライン関数

未知境界値を k 階 $((k-1)$ 次)のB-スプライン関数⁽⁹⁾⁻⁽¹⁴⁾で近似するものとする、次式のようになる。

$$f(u) = \sum_{n=1}^N C_n B_{nk}(u) \quad (3.30)$$

ここで、 $B_{nk}(u)$ は階数 k のB-スプラインである。パラメータは N 個の C_n である。スプライン関数による近似では、スプライン関数のノードと付加ノードの取り方が近似に影響する。これらのノードをどのように取るかは任意であるが、ここでは、全ノード $N+k$ 個のうち $N-k$ 個のノードは推定区間内に等間隔に取り、 $2k$ 個の付加ノードは推定区間の両端にそれぞれ k 重ノードとして与えるルールを仮定した。

- (3)直接近似 未知境界値分布を境界上のいくつかの代表点における境界値そのもので表すこともできる。この場合、境界要素の節点値 u をパラメータとして扱うことが考えられ、次式のように書ける。未知パラメータ数は節点値の数であり P 個となる。

$$p = \{ u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_P \}^T \quad (3.31)$$

[3]材料定数

弾性体構成材料の材料定数は、介在物を除いた領域にわたって一様であると仮定して Young率 E , Poisson比 ν , 密度 ρ の三つで表す。未知パラメータは次のように書ける。

$$p = \{ E \ \nu \ \rho \}^T \quad (3.32)$$

温度場構成材料の熱物性値の場合も領域にわたって一様であり、時間にも依存しないと仮定して、熱伝導率 λ , 比熱 c , 密度 ρ の三つのパラメータで表す。

$$p = \{ \lambda \ c \ \rho \}^T \quad (3.33)$$

3.2.3 共役勾配法

非線形最適化問題に対して、目的関数 W の最小値を求める数多くの手法が開発されている。これらには目的関数 W の値のみを使う直接探索法と W の勾配を使う勾配探索法に分類される。直接探索法にはランダムサーチや試行錯誤法などがあり、勾配探索法には目的関数の1階導関数の符号を用いて探索方向を求める最急降下法や2階導関数

まで利用して探索方向ベクトルの大きさを求めるNewton-Raphson法などがある⁽¹⁾⁻⁽⁸⁾。本研究では最小値探索法として、1階導関数を使う勾配法のなかで、収束が速く実用的なFletcher-Reavesの共役勾配法を適用する。

非線形最適化手法では、未知パラメータの初期値から出発して、目的関数 W が最小になるようにパラメータを修正していく反復計算を行う。パラメータ \mathbf{p} の反復計算式は次式で表される。

$$\mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{p}^k + \alpha^k \boldsymbol{\delta}^k \quad (3.34)$$

ただし、 k は反復回数を表し、 $\boldsymbol{\delta}^k$ は探索方向ベクトルである。係数 α^k は探索方向ベクトルの大きさを決定するステップ幅であり、1次元探索を用いて探索方向に沿って目的関数を最小にするように決定される。

共役勾配法における探索方向ベクトル $\boldsymbol{\delta}^k$ は次式で表される。

$$\boldsymbol{\delta}^{k+1} = -\nabla W^{k+1} + \beta^k \boldsymbol{\delta}^k \quad (k \geq 1) \quad (3.35)$$

ただし、

$$\boldsymbol{\delta}^0 = -\nabla W^0 \quad (3.36)$$

$$\beta^k = \frac{\|\nabla W^k\|^2}{\|\nabla W^{k-1}\|^2} \quad (k \geq 1) \quad (3.37)$$

ただし、 $\|\cdot\|$ は行列のノルムを表す。ここで、 ∇W は目的関数が式(3.7)から(3.9)のように残差二乗和の形で定義されているので、次式のように書くことができる。

$$\nabla W^k = 2(\mathbf{J}^k)^T \mathbf{w}^k \quad (3.38)$$

$$\mathbf{w}^k = \{w_1^k \ w_2^k \ \dots, w_n^k, \ \dots, w_N^k\}^T \quad (3.39)$$

ただし、 $(\mathbf{J}^k)^T$ は k 番目の反復計算におけるヤコビアン(jacobian) \mathbf{J} の転置行列を表す。また、 \mathbf{J} は次のように書くことができる。

$$\mathbf{J}^k = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_1^k}{\partial p_1} & \frac{\partial w_1^k}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial w_1^k}{\partial p_P} \\ \frac{\partial w_2^k}{\partial p_1} & \frac{\partial w_2^k}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial w_2^k}{\partial p_P} \\ \vdots & \vdots & \frac{\partial w_n^k}{\partial p_j} & \vdots \\ \frac{\partial w_N^k}{\partial p_1} & \frac{\partial w_N^k}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial w_N^k}{\partial p_P} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

N はデータ数, P は未知パラメータ数を表す. 式(3.39)の \mathbf{w}^k の成分 w_n^k は, k 回目の反復における n 番目の測定データ d_n に関する残差を表している. 目的関数が変位応答で構成される場合には次式で表される.

$$w_n^k = u_i^k(n) - \bar{u}_i(n) \quad (3.41)$$

ただし, $u_i^k(n)$ は k 回目の反復計算におけるパラメータの推定値 \mathbf{p}^k に対して境界要素法により解析された変位成分を並べたもののうち n 番目のデータを表し, $\bar{u}_i(n)$ は対応する測定データを表している. 同様に, 目的関数がひずみ応答あるいは温度応答で構成される場合には次式で表される.

$$w_n^k = \varepsilon_{ij}^k(n) - \bar{\varepsilon}_{ij}(n) \quad (3.42)$$

$$w_n^k = T^k(n) - \bar{T}^k(n) \quad (3.43)$$

また, Jacobian の成分 $J_{n,j}^k$ は次式のように書くことができ, パラメータ p_j に対する n 番目の測定データに関する残差 w_n^k の感度を表している.

$$J_{n,j}^k \equiv \frac{\partial w_n^k}{\partial p_j} \quad (3.44)$$

本研究では, この感度を次式による差分近似を用いて計算する.

$$J_{n,j}^k \equiv \frac{w_n^k(p_1, p_2, \dots, p_j + \Delta p_j, p_P) - w_n^k(p_1, p_2, \dots, p_P)}{\Delta p_j} \quad (3.45)$$

ただし, Δp_j は j 番目のパラメータの微小変化量を表す.

3.2.4 1次元探索

式(3.34)における探索方向ベクトル δ^k の大きさを決定するステップ幅 α^k は2次補間法による1次元探索⁽¹⁾⁻⁽⁸⁾を用いて計算する。目的関数 W の最小点を求める場合、最小値の推定値 p と探索方向 δ が得られると、探索方向に沿って1次元探索を行う。探索方向ベクトル上において目的関数の最小点の近傍で目的関数を2次関数で近似できるとすれば、目的関数 W は次式のように近似される。

$$W = W(\alpha) = A_1\alpha^2 + A_2\alpha + A_3 \quad A_1 \neq 0 \quad (3.46)$$

ここで、 A_1, A_2, A_3 は係数である。

図3.7に示すように、探索方向 δ に沿って $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$, $W(\alpha_1) > W(\alpha_2) < W(\alpha_3)$ となる3点 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ を見つければ最小値は必ず区間 $[\alpha_1, \alpha_3]$ の間にある。そこでこの3点を1次元探索を用いて求め、2次補間法により3点を通る2次関数を決定する。この2次関数の最小点 α^* は次式により与えられる。

$$\alpha^* = \frac{3W(\alpha_1) - 4W(\alpha_2) + W(\alpha_3)}{2W(\alpha_1) - 4W(\alpha_2) + 2W(\alpha_3)} l_f \quad (3.47)$$

ここで、 l_f は1次元探索におけるステップ幅の最終値である。すなわち、この α^* が探索方向ベクトルの大きさとなる。なお、ここで求められた2次関数は目的関数を近似したものであるため、2次関数の最小値は必ずしも目的関数の最小値とはならない。あらためて探索方向 δ を求めて1次元探索を行い、収束するまでこれを繰り返す。

次に1次元探索のアルゴリズムを示す。ステップ幅 α^* を求めるアルゴリズムは次のステップからなる。また、 $\alpha_1=0$, $W_1=W(\alpha_1)$, $W_2=W(\alpha_2)$, $W_3=W(\alpha_3)$ とする。出発点を $l=0$ とし、 $l=0$ のときの関数値 W を $W_0=W(0)$ とする。

Step 1 $W_1=W(0)$, $W'=W(l)$ とおく。

Step 2 $W_1 \leq W'$ ならば、 $W_3=W'$, $l=l/2$ とおき $W'=W(l)$ を計算し、Step 3へ進む。 $W_1 > W'$ ならば、 $W_2=W'$, $l=2l$ とおき $W'=W(l)$ を計算し、Step 4へ進む。

Step 3 $W_1 > W'$ ならば、 $W_2=W'$, $l_f=l$ とおきStep 5へ進む。 $W_1 \leq W'$ ならば、Step 2へ戻る。

Step 4 $W_2 < W'$ ならば、 $W_3=W'$, $l_f=l$ とおきStep 5へ進む。 $W_2 \geq W'$ ならば、Step 2へ戻る。

Step 5 δ の方向に添って目的関数を最小にする $\alpha_{Optimum}$ の近似値 α^* を式(3.47)により計算する.

図3.8に1次元探索のフローチャートを示す.

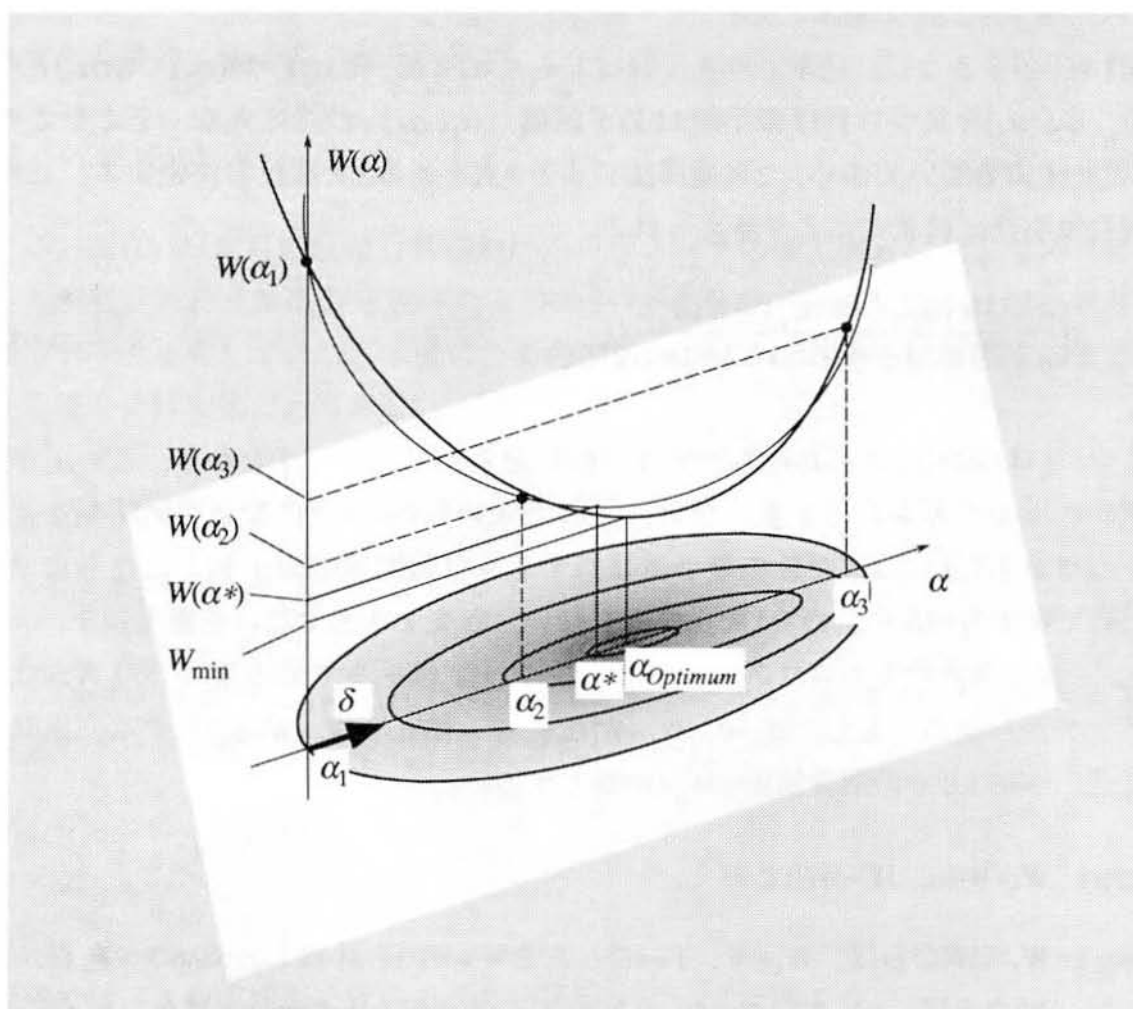
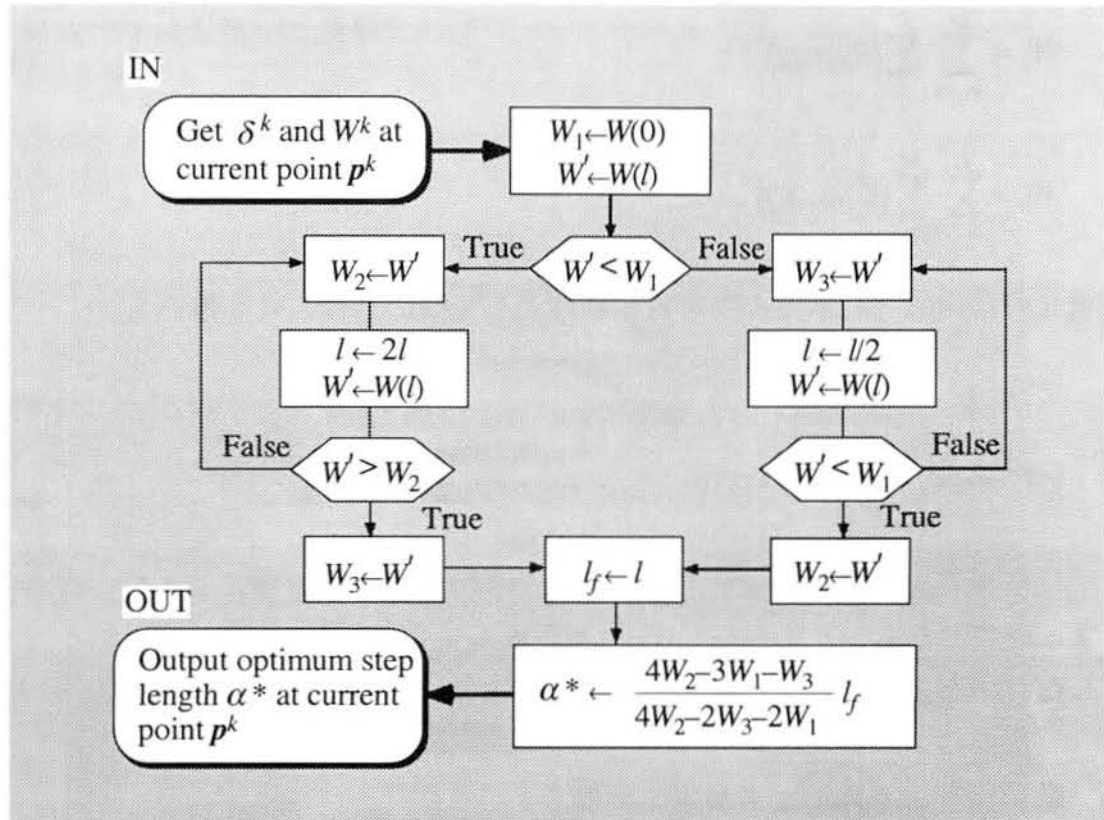


図3.7 1次元探索におけるステップ幅 α^* の決定



3.2.5 収束判定

目的関数 W を次式のように無次元化した無次元量 Z を定義する.

$$Z^k = \frac{1}{2} \log_{10}(W^k / W_0) \quad (3.48)$$

ただし, W_0 は次式で与えられる測定データの二乗和である.

$$W_0 = \sum_{n=1}^N \{d_n\}^2 \quad (3.49)$$

変位応答，ひずみ応答，温度応答を利用する場合に対して， W_0 はそれぞれ次のよう定義される。

$$W_0 = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^D \{\bar{u}_i(\mathbf{x}_m)\}^2 \quad (3.50)$$

$$W_0 = \sum_{m=1}^M \sum_{i,j=1}^D \{\bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{x}_m)\}^2 \quad (3.51)$$

$$W_0 = \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M \{\bar{T}(\mathbf{x}_m, t_l)\}^2 \quad (3.52)$$

最適化の反復計算における収束判定条件として次の二つの式を用いる.

$$Z^k < \eta_1 \quad (3.53)$$

$$|Z^k - Z^{k-1}| < \eta_2 \quad (3.54)$$

η_1 と η_2 は収束判定基準値を表す. 式(3.53)は無次元量 Z が収束判定基準値 η_1 以下になったときに収束したものと見なし, 式(3.54)は無次元量 Z の変化量が η_2 以下になったとき収束したものと見なすものである.

3.2.6 最適化手法を用いた逆解析の手順

最適化手法を用いた逆解析の手順は次のステップからなる.

Step 1 境界要素法による数値解析に必要な領域に関するデータおよび境界上の測定点で計測される測定データ $\bar{\mathbf{d}}$ を入力する.

Step 2 未知パラメータの初期値 \mathbf{p}^0 を仮定する.

Step 3 k 回目の反復におけるパラメータの推定値 \mathbf{p}^k に対して境界要素解析を行い測定点における計算値 \mathbf{d} を求める.

Step 4 共役勾配法により探索方向ベクトル $\boldsymbol{\delta}^k$ を求める.

Step 5 2次補間法を用いた1次元探索により, 目的関数 W を最小にする探索方向ベクトル $\boldsymbol{\delta}^k$ のステップ幅 α^k を計算する.

Step 6 パラメータ \mathbf{p}^k を修正する.

Step 7 修正されたパラメータ \mathbf{p}^{k+1} に対するモデルについて, 境界要素解析を行ない目的関数を計算する. また, 無次元量 Z を計算する.

Step 8 収束判定を行い，収束している場合はこのパラメータの値を同定結果として計算を終了する．収束していない場合はStep 3へ戻り，計算を繰り返す．

図3.9に最適化手法を用いた逆解析のフローチャートを示す．

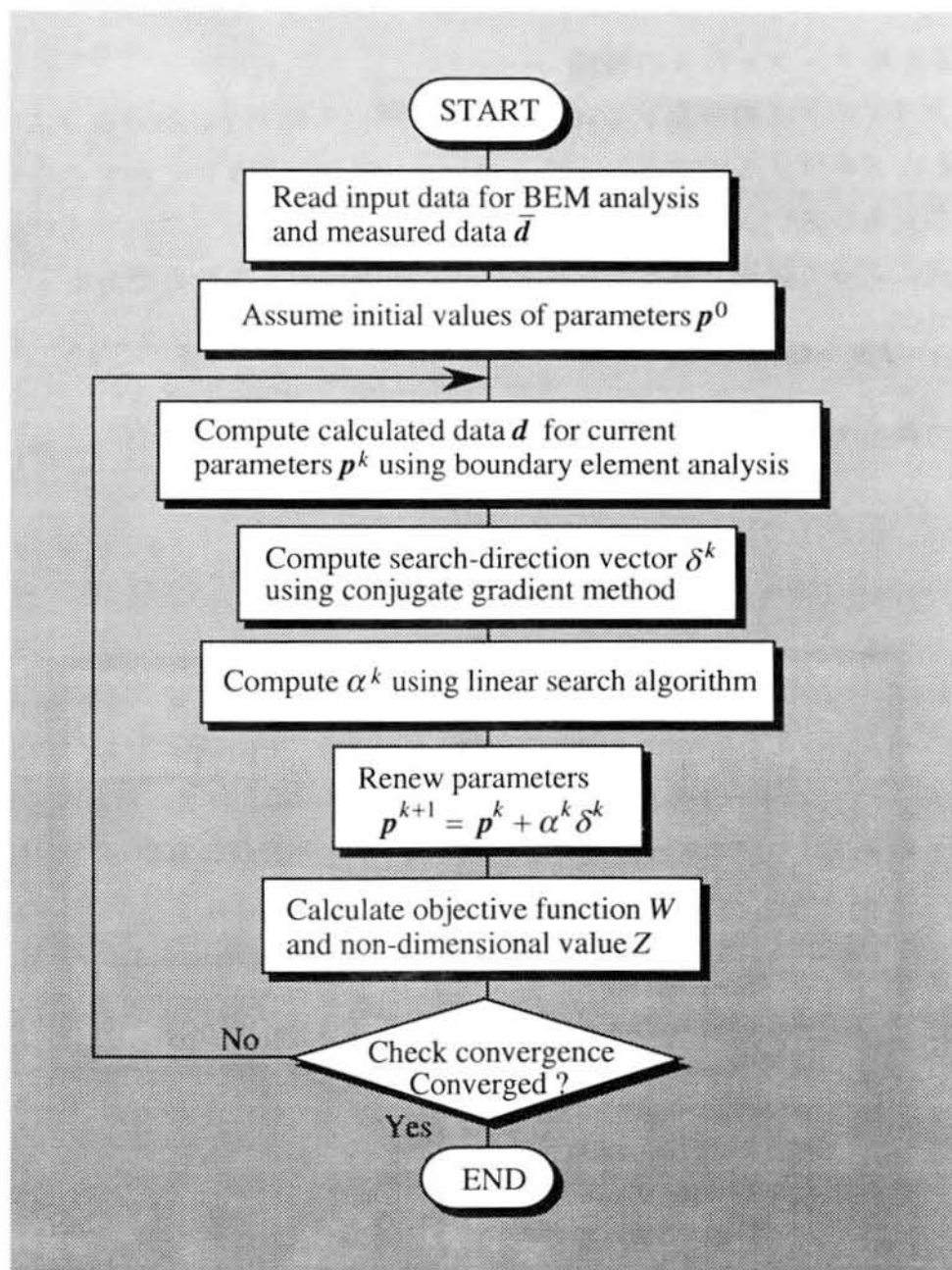


図3.9 最適化手法を用いた逆解析のフローチャート

3.3 カルマンフィルタ理論の適用

カルマンフィルタ理論⁽¹⁵⁾⁻⁽²⁴⁾による未知量の推定解析では，既知の入力および雑音を受ける確率システムの状態を離散時間における観測値を用いて推定する．そのため，測定誤差を含んだ測定データを用いて，考えている領域(システム)に関する未知量を同定しようとする逆問題の解析手法として適用可能である．まず，フィルタ理論の概要について述べ，次に，逆解析手法への適用について説明する．

3.3.1 拡張カルマンフィルタの理論

カルマンフィルタは観測量 y_t ($t=0, 1, 2, \dots$)を用いて時刻 t におけるシステムの状態量 x_t を求めるアルゴリズムである．カルマンフィルタは図3.10に示すような状態変数線図で表されるシステムを対象としている．このシステムは，次に示す状態方程式と観測方程式によって記述される線形な有限次元離散時間システムである⁽¹⁵⁾⁻⁽²⁴⁾．

$$x_{t+1} = F_t x_t + G_t w_t \quad (3.55)$$

$$y_t = H_t x_t + v_t \quad (3.56)$$

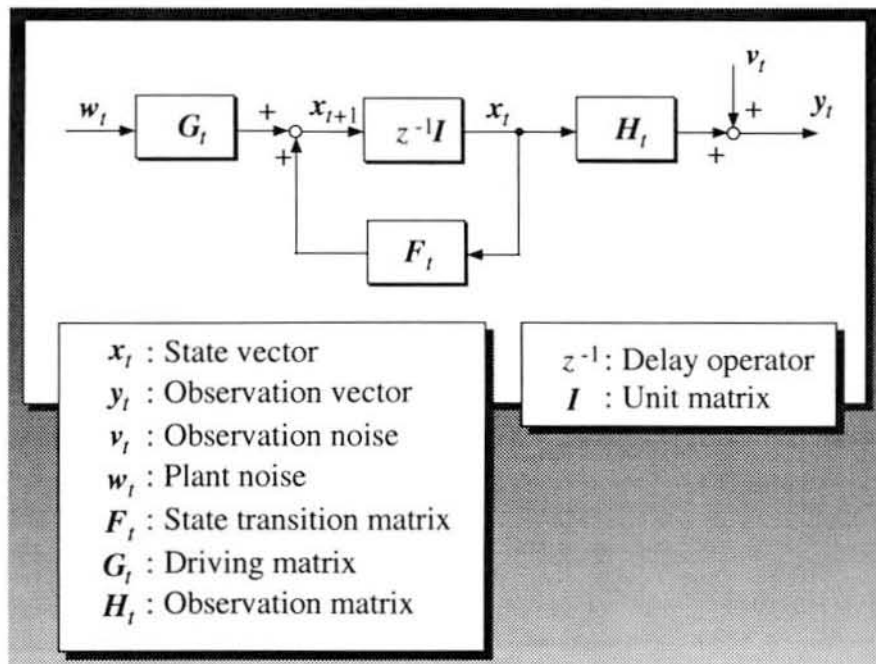


図3.10 カルマンフィルタの対象とする線形確率システムのモデル

ここで、 \mathbf{x}_t は状態量ベクトル(p)、 \mathbf{y}_t は観測量ベクトル(n)、 \mathbf{H}_t は観測行列($n \times p$)、 \mathbf{F}_t は状態遷移行列($p \times p$)、 \mathbf{G}_t はシステム雑音係数行列($p \times m$)、 \mathbf{v}_t は観測雑音ベクトル(n)、 \mathbf{w}_t はシステム雑音ベクトル(m)である。ただし、()内の文字はベクトルの次元および行列の大きさを示す。

式(3.55)は状態量の時間的遷移を記述し、式(3.56)は状態量と観測量との関係を示すものである。さらに、雑音ベクトル \mathbf{v}_t と \mathbf{w}_t は平均値0のガウス白色雑音であり、以下の性質を有するものと仮定される。

$$E\{\mathbf{w}_t\} = \mathbf{0} \quad (3.57)$$

$$E\{\mathbf{v}_t\} = \mathbf{0} \quad (3.58)$$

$$E\{\mathbf{w}_t \mathbf{w}_{t'}^T\} = \mathbf{Q}_t \delta_{tt'} \quad (3.59)$$

$$E\{\mathbf{v}_t \mathbf{v}_{t'}^T\} = \mathbf{R}_t \delta_{tt'}, \quad \mathbf{R}_t > \mathbf{0} \quad (3.60)$$

$$E\left\{\begin{bmatrix} \mathbf{w}_t & \mathbf{v}_{t'}^T \end{bmatrix}\right\} = E\left\{\begin{bmatrix} \mathbf{v}_t & \mathbf{w}_{t'}^T \end{bmatrix}\right\} = \mathbf{0} \quad (3.61)$$

$$E\{\mathbf{x}_0 \mathbf{w}_t^T\} = \mathbf{0} \quad (3.62)$$

$$E\{\mathbf{x}_0 \mathbf{v}_t^T\} = \mathbf{0} \quad (3.63)$$

ここで、 $E\{\cdot\}$ は平均値、 $\delta_{tt'}$ はクロネッカーのデルタである。また、式(3.59)と式(3.60)で表される \mathbf{Q}_t 、 \mathbf{R}_t はシステム雑音および観測雑音の共分散行列であり、それぞれの対角項はそれ自身の分散を表しており、非対角項は0である。式(3.61)は \mathbf{w}_t と $\mathbf{v}_{t'}$ の確率的直交性を表しており、これら二つの雑音が独立であることを示す。式(3.62)、式(3.63)は雑音ベクトルが初期状態 \mathbf{x}_0 とは独立であることを示し、さらに、初期状態 \mathbf{x}_0 は次に示すような平均値 $\bar{\mathbf{x}}_0$ および共分散行列 Σ_0 のGauss確率ベクトルが仮定される。

$$E\{\mathbf{x}_0\} = \bar{\mathbf{x}}_0 \quad (3.64)$$

$$E\left\{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0 \end{bmatrix}^T\right\} = \Sigma_0 \quad (3.65)$$

カルマンフィルタは、式(3.57)から式(3.65)の仮定のもとに、式(3.55)と式(3.56)で与えられる線形観測方程式と線形システム状態方程式を基本として、最小分散推定の理論を用いてシステムの最適状態推定を得るものであり、次の漸化式により構成される。

[フィルタ方程式]

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1/t} = \mathbf{F}_t \hat{\mathbf{x}}_{t/t} \quad (3.66)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{t/t} = \hat{\mathbf{x}}_{t/t-1} + \mathbf{K}_t [\mathbf{y}_t - \mathbf{H}_t \hat{\mathbf{x}}_{t/t-1}], \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (3.67)$$

[カルマンゲイン]

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_{t/t-1} \mathbf{H}_t^T [\mathbf{H}_t \mathbf{P}_{t/t-1} \mathbf{H}_t^T + \mathbf{R}_t]^{-1} \quad (3.68)$$

[推定誤差共分散行列]

$$\mathbf{P}_{t+1/t} = \mathbf{F}_t \mathbf{P}_{t/t} \mathbf{F}_t^T + \mathbf{G}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{G}_t^T \quad (3.69)$$

$$\mathbf{P}_{t/t} = \mathbf{P}_{t/t-1} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t \mathbf{P}_{t/t-1}, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (3.70)$$

[初期状態]

$$\hat{\mathbf{x}}_{0/-1} = \bar{\mathbf{x}}_0 \quad (3.71)$$

$$\mathbf{P}_{0/-1} = \Sigma_0 \quad (3.72)$$

ただし、ハット(^)は推定値であることを示しており、たとえば、 $\hat{\mathbf{x}}_{t/t-1}$ は時刻 $t-1$ での観測量により得られた現時刻 t における状態量の推定値を表す。また、 $\mathbf{P}_{t/t}$ は推定誤差共分散行列($p \times p$)、 \mathbf{K}_t はカルマンゲイン($p \times p$)、 $\bar{\mathbf{x}}_0$ は状態量の推定値の初期値(p)、 Σ_0 は推定誤差共分散行列の初期値($p \times p$)である。カルマンゲイン \mathbf{K}_t は、式(3.67)と式(3.70)を用いて状態量の推定値 $\hat{\mathbf{x}}_{t/t-1}$ と推定誤差共分散行列 $\mathbf{P}_{t/t-1}$ の更新を行う際の修正量を決するものである。

推定誤差共分散行列 $\mathbf{P}_{t/t}$ は、次式に示すように状態量の推定値 $\hat{\mathbf{x}}_{t/t}$ と真の値 \mathbf{x}_t との差の共分散を表す。

$$\mathbf{P}_{t/t} = E\{[\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t/t}][\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t/t}]^T\} \quad (3.73)$$

図3.11はカルマンフィルタの構成を表したものである。 \mathbf{y}_t が入力され、推定値 $\hat{\mathbf{x}}_{t/t}$ が出力される線形システムとなっている。

一方、対象とする確率システムが非線形の場合には線形システムに対するカルマンフィルタを利用した、拡張カルマンフィルタが適用できる。非線形確率システムは次式のように状態方程式と観測方程式で表すことができる。

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_t) + \mathbf{g}_t(\mathbf{x}_t) \mathbf{w}_t \quad (3.74)$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t) + \mathbf{v}_t \quad (3.75)$$

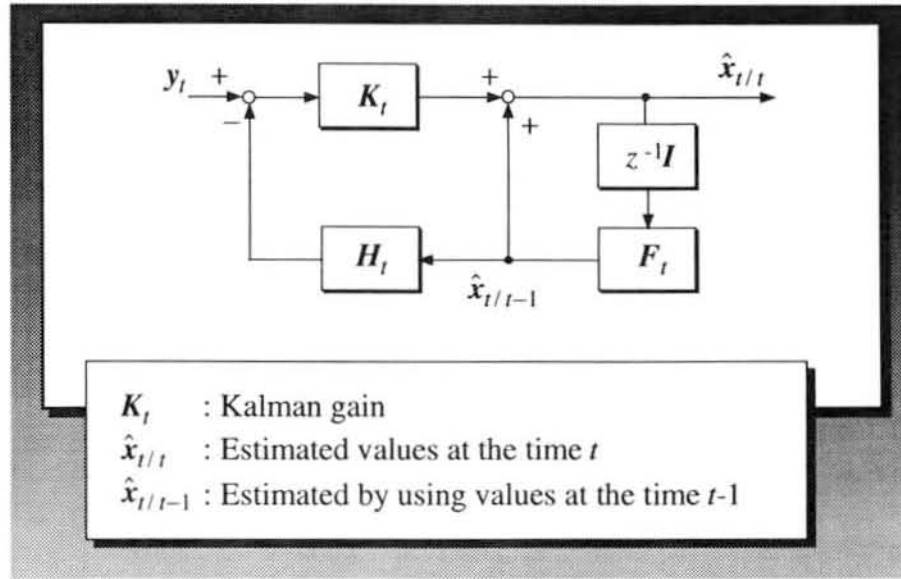


図3.11 カルマンフィルタの構成

これらの式を，線形システムに対するアルゴリズムが適用できるように線形化する．すなわち，非線形関数 f_t と h_t が滑らかであるという仮定のもとに，推定値 $\hat{x}_{t/t}$ と $\hat{x}_{t/t-1}$ のまわりでTaylor展開すると，次式のように書ける．

$$f_t(x_t) = f_t(\hat{x}_{t/t}) + F_t(x_t - \hat{x}_{t/t}) + \dots \quad (3.76)$$

$$h_t(x_t) = h_t(\hat{x}_{t/t-1}) + H_t(x_t - \hat{x}_{t/t-1}) + \dots \quad (3.77)$$

ただし， F_t と H_t は次式で定義される $(p \times p)$ と $(n \times p)$ のマトリックスである．

$$F_t = \left. \frac{\partial f_t(x_t)}{\partial x_t} \right|_{x_t = \hat{x}_{t/t}} \quad (3.78)$$

$$H_t = \left. \frac{\partial h_t(x_t)}{\partial x_t} \right|_{x_t = \hat{x}_{t/t-1}} \quad (3.79)$$

式(3.74)と式(3.75)に式(3.76)と式(3.77)を代入して2次以上の高次項を無視すると，それぞれ次のようになる．

$$x_{t+1} = f_t(\hat{x}_t) + F_t[x_t - \hat{x}_t] + G_t w_t \quad (3.80)$$

$$y_t = h_t(\hat{x}_{t/t-1}) + H_t[x_t - \hat{x}_{t-1}] + v_t \quad (3.81)$$

ここで,

$$r_t = f_t(\hat{x}_{t/t}) - F_t \hat{x}_{t/t} \quad (3.82)$$

$$\eta_t = y_t - h_t(\hat{x}_{t/t-1}) - H_t \hat{x}_{t/t-1} \quad (3.83)$$

とおくと式(3.80)と式(3.81)から, 次式のような線形化システムが得られる.

$$x_{t+1} = F_t x_t + r_t + G_t w_t \quad (3.84)$$

$$\eta_t = H_t x_t + v_t \quad (3.85)$$

式(3.84)と式(3.85)で表される線形化システムに対する拡張カルマンフィルタは, 次のように構成される.

[フィルタ方程式]

$$\hat{x}_{t+1/t} = f_t(\hat{x}_{t/t}) \quad (3.86)$$

$$\hat{x}_{t/t} = \hat{x}_{t/t-1} + K_t[y_t - h_t(\hat{x}_{t/t-1})], \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (3.87)$$

[カルマンゲイン]

$$K_t = P_{t/t-1} H_t^T [H_t P_{t/t-1} H_t^T + R_t]^{-1} \quad (3.88)$$

[推定誤差共分散行列]

$$P_{t+1/t} = F_t P_{t/t} F_t^T + G_t Q_t G_t^T \quad (3.89)$$

$$P_{t/t} = P_{t/t-1} - K_t H_t P_{t/t-1}, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (3.90)$$

[初期状態]

$$\hat{x}_{0/-1} = \bar{x}_0 \quad (3.91)$$

$$P_{0/-1} = \Sigma_0 \quad (3.92)$$

拡張カルマンフィルタは, 観測量 y_t を用いて時刻 t における非線形確率システムの状態量 x_t に対する準最適な推定量 $\hat{x}_{t/t}$ を求めるものとなっている. 拡張カルマンフィ

ルタはその構成上カルマンフィルタと類似しているが、 F_t, G_t, H_t が $\hat{x}_{t/t}, \hat{x}_{t/t-1}$ の関数であるため、あらかじめ $P_{t/t}$ と K_t を計算しておくことができず、各時刻において計算する必要がある。

3.3.2 拡張カルマンフィルタを用いた逆解析手法

本研究で取り扱う逆問題の解析手法としてカルマンフィルタを適用する場合、観測量には測定データが相当し、状態量には3.2節で述べた未知量を表すパラメータが相当する。また、逆問題を考えているシステムは測定データと未知量すなわち観測量と状態量の関係が非線形となる。したがって、ここでは拡張カルマンフィルタのアルゴリズムを適用して、未知量を推定することになる。次に、前節で述べた拡張カルマンフィルタの定式化に逆解析を当てはめて説明する。

システムの状態方程式は、システムが時間的遷移構造を持たないとして次式のように表される。

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{I}\mathbf{x}_t \quad (3.93)$$

この場合、時刻 t は時間的な遷移を示すかわりに、繰り返し計算のステップを表す。 \mathbf{I} は単位マトリックスを表す。たとえば、動弾性逆問題においては状態量は領域の形状や変位、表面力、材料定数を表すパラメータであり、これらは時間的に変化しない量である。また、非定常熱伝導逆問題においても、領域形状や熱物性値は時間的に一定なものを取り扱う。一方、非定常熱伝導逆問題における境界値は時間的に変化するものを対象としているが、全時間、全空間にわたる測定データを得たうえで、時空間にわたるシステムの構造としてまとめて推定を行うことになるので、時間構造を含んだこのようなシステムも状態量推定の反復計算に対して一定であり、結局この場合もシステムの状態方程式は時間構造を持たないものと解釈できる。

観測方程式は観測量 y_t が状態量の非線形関数 $f(\mathbf{x}_t)$ で与えられる次式となる。

$$y_t = f(\mathbf{x}_t) + v_t \quad (3.94)$$

観測量 y_t には測定データ d_n ($n=1, 2, \dots, N$) が与えられる。この場合、

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= \{d_1 \ d_2 \ \cdots \ d_n \ \cdots \ d_N\}^T \\ y_1 &= \{d_1 \ d_2 \ \cdots \ d_n \ \cdots \ d_N\}^T \\ &\vdots \\ y_t &= \{d_1 \ d_2 \ \cdots \ d_n \ \cdots \ d_N\}^T \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (3.95)$$

であり、 t に対しては同じデータが繰り返し与えられることになる。 N は測定データの総数である。

$f(\mathbf{x}_t)$ は t におけるパラメータに対して境界要素法により解析された計算値から求められる未知パラメータの推定値であり、次式のように表される。

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t) + \mathbf{v}_t = \mathbf{d}_t + \mathbf{v}_t \quad (3.96)$$

先に述べた雑音に関するGauss性や独立性，すなわち，式(3.57)から式(3.63)などの仮定が成り立つ必要がある。雑音のGauss性や独立性は，測定データに含まれる雑音はGauss分布に従うことが実験的に確認されていることから妥当であると考えられる。また，式(3.64)，式(3.65)に示す初期状態 $\bar{\mathbf{x}}_0$ ， Σ_0 は事前情報として既知である必要があるが，これらの値は一般に不明であり，ある値を仮定してアルゴリズムを適用することになる。したがって，得られた推定値は $\bar{\mathbf{x}}_0$ と Σ_0 に依存する。

観測マトリックス \mathbf{H}_t は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_t &= \left. \frac{\partial \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t)}{\partial \mathbf{x}_t} \right|_{\mathbf{x}_t = \hat{\mathbf{x}}_{t/t-1}} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial x_1} & \frac{\partial d_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial d_1}{\partial x_p} \\ \frac{\partial d_2}{\partial x_1} & \frac{\partial d_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial d_2}{\partial x_p} \\ \vdots & \vdots & \frac{\partial d_i}{\partial x_j} & \vdots \\ \frac{\partial d_N}{\partial x_1} & \frac{\partial d_N}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial d_N}{\partial x_p} \end{bmatrix}_{t/t-1} \end{aligned} \quad (3.97)$$

ここでは，上式の偏微分係数を差分近似により求める。

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t)}{\partial \mathbf{x}_t} \right|_{\mathbf{x}_t = \hat{\mathbf{x}}_{t/t-1}} &= \left. \frac{\partial d_i}{\partial x_j} \right|_{t/t-1} \\ &\cong \left. \frac{d(x_1, x_2, \dots, x_j + \Delta x_j, \dots, x_p) - d(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_p)}{\Delta x_j} \right|_{t/t-1} \end{aligned} \quad (3.98)$$

ただし，ここでは x_j は \mathbf{x} の成分 x_1, x_2, \dots, x_p を表している。

3.3.3 フィルタ理論を適用した逆解析の手順

拡張カルマンフィルタを適用して未知パラメータを推定する逆解析の手順をまとめると次のようになる。

- Step 1 境界要素解析に必要な領域の形状データ，境界条件および拡張カルマンフィルタに用いるパラメータの初期値 $\hat{\mathbf{x}}_{0/-1} = \bar{\mathbf{x}}_0$ と $\mathbf{P}_{0/-1} = \mathbf{\Sigma}_0$ を入力する。
- Step 2 測定点での観測量 \mathbf{y}_i を読み込み，それに含まれる誤差を仮定し共分散値 \mathbf{R}_i を与える。
- Step 3 パラメータの推定値を用いて境界要素解析により測定点での測定データ \mathbf{d}_i と感度行列 \mathbf{H}_i を計算する。
- Step 4 カルマンフィルタアルゴリズムに従ってカルマンゲイン \mathbf{K}_i を計算し，推定値 $\hat{\mathbf{x}}_{i/i-1}$ と推定誤差共分散行列 $\mathbf{P}_{i/i-1}$ を更新する。
- Step 5 収束判定を行う。収束していない場合はStep 2へ戻る。

3.3.4 拡張カルマンフィルタアルゴリズムにおける収束判定

ここでは，収束判定としてすべてのパラメータの変化量が，それぞれの基準値 ξ^p より小さくなった場合を収束したものとみなす。すなわち次式を収束判定に用いる。

$$|\hat{\mathbf{x}}_{i/i}^p - \hat{\mathbf{x}}_{i/i-1}^p| < \xi^p, \quad p = 1, 2, \dots, P \quad (3.99)$$

ただし， P はパラメータの総数である。また，上式の判定基準のほかに，次式に示すように測定データの残差二乗和 W を無次元化してその対数をとった値 Z を考え，収束判定として用いる。

$$Z^i < \eta_1 \quad (3.100)$$

$$|Z^i - Z^{i-1}| < \eta_2 \quad (3.101)$$

$$Z = \frac{1}{2} \log_{10}(W/W_0) \quad (3.102)$$

ただし， W には式(3.5)，具体的には式(3.7)から式(3.9)を用い， W_0 には式(3.49)，具体的には式(3.50)から式(3.52)を用いる。 η_1 と η_2 は収束判定基準値を表す。

図3.12に拡張カルマンフィルタを適用した逆解析のフローチャートを示す。

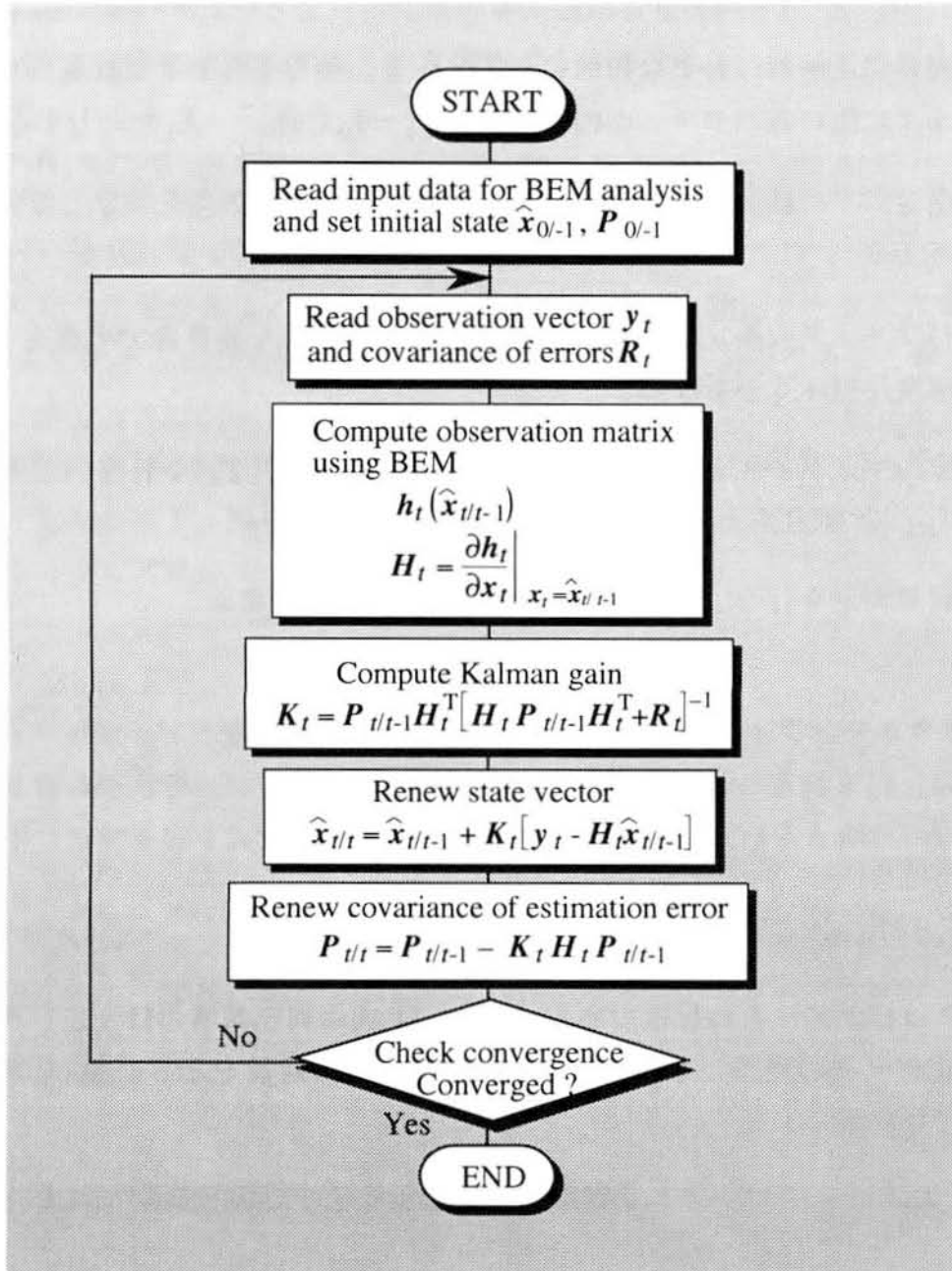


図3.12 拡張カルマンフィルタを適用した逆解析のフローチャート

3.4 情報の付加と選択手法

逆解析は測定データに基づいて行われる。限られた情報から解を導くため、与える情報によっては真の解と異なる解を導きだしたり、解が得られないといった不適切な問題が生じる。有効な解を精度良く効率的に得るためには、情報の取り扱いが重要となる。ここでは、限られた測定点から得られる測定データを有効に利用するための、量と質に関する測定データの取り扱い方を述べる。

3.4.1 複数実験による情報の付加

逆解析では未知量の情報を含んだより多くの測定データを用いることが、有効な解を得るうえで基本となる。情報量を増やすには測定点を数多く設定することも一つの手段であるが、計測の面からコストがかかったり、空間的制約により測定点を自由に設定することが困難である場合が多い。そこで、測定位置は不変のままで、境界条件をいくつか変えて実験を行い、実験条件の異なる測定データを収集することで測定データ量を増やす。この場合、データの独立性は必ずしも保証されないが、必要とする量の測定データを得ることが可能である。

複数実験により情報を補う方法を動弾性問題に適用したものがマルチ加振法と呼ぶ手法である。これは、幾通りかの加振実験を別々に行い、各実験ごとの測定データを得て情報量を増やすものである。マルチ加振法は久保らの電気ポテンシャルCT法におけるマルチ電流付加法⁽²⁵⁾と同じ考えに基づいている。

動弾性逆問題のうち、最適化手法を用いた欠陥同定にマルチ加振法を適用する方法を示す。図3.13に示すように、欠陥が内在する構造要素に調和加振力 F_1 が加えられているものとする。この加振によって得られる測定データから構成した目的関数を W_1 とする。次に調和加振力 F_1 とは異なる位置に調和加振力 F_2 を加える別の実験を行い、この場合の目的関数を W_2 とする。加振状態の異なるいくつかの実験を別々に行い、各実験に対する目的関数の和をとり、それを最適化計算に用いる目的関数とする。すなわち、 N_{exp} 通りの加振実験を行う場合について考えると、最適化の目的関数 W は次式で与えられる。

$$W = \sum_{i=1}^{N_{exp}} W_i \quad (3.103)$$

複数実験による情報を補うことにより、複数の測定データの組が得られる。それに対して、境界要素解析による対応する測定データの計算値も複数個必要となり、順解析の回数が増加する。しかしながら、境界要素法では離散化して得られる最終的な代

数方程式において、境界値ベクトルが次式のように係数マトリックス $[A]$ と境界上の未知ベクトル $\{X\}$ の積で表される(3.6節および3.7節で述べる).

$$[A]\{X\} = \{B\} \quad (3.104)$$

したがって、変更した境界条件に対する解析結果を得るには、影響係数マトリックス $[A]$ を保持しておけば境界値ベクトルの並べかえをするだけでよく、計算量の大幅な増加にはつながらず効率的である.

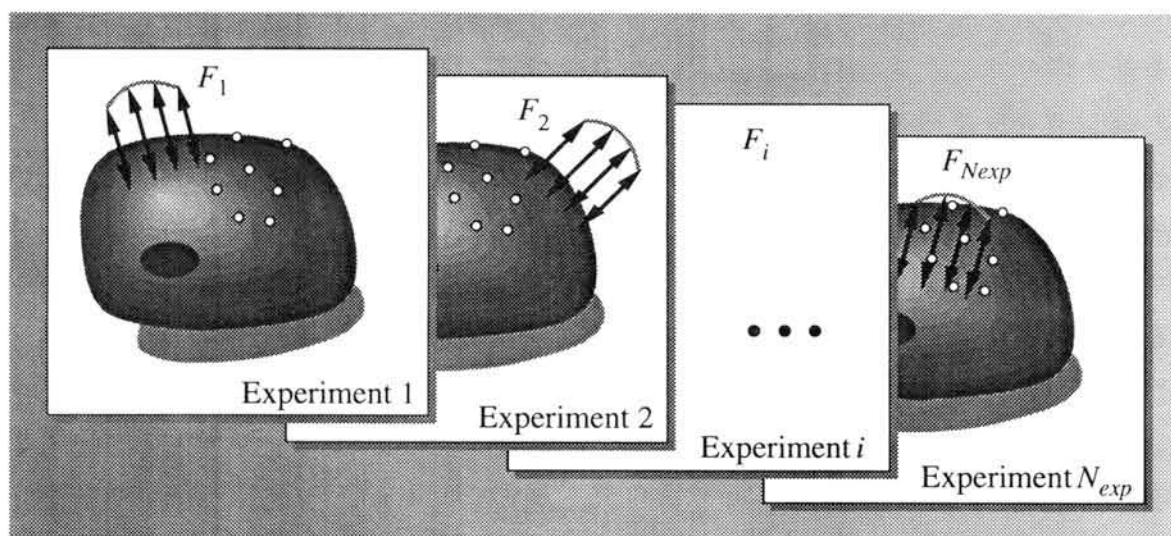


図3.13 複数実験による情報の補助(マルチ加振法の例)

3.4.2 感度を利用した情報選択

情報の量と共に重要なものは情報の質である．ここで言う質の高い情報とは，未知量の影響を多く受ける，すなわち，未知量に対する感度が高い情報と考える．

最適化手法を用いた逆解析の場合，この感度には最適化パラメータに対する目的関数の感度を利用する．すなわち，感度 $J_{n,j}^k$ は次式のように表される．

$$\begin{aligned} J_{n,j}^k &= \frac{\partial w_n^k}{\partial p_j} \\ &= \frac{\partial (d_n^k - \bar{d}_n)}{\partial p_j} = \frac{\partial d_n^k}{\partial p_j} \end{aligned} \quad (3.105)$$

上式は， k 番目の反復計算において， j 番目の最適化パラメータに対する n 番目の測定データ(計算値)の感度を表わしている．

感度を用いて情報選択を行う手法を最適化計算に組み込む．まず，パラメータの初期仮定値について全測定データに対する感度を求める．得られた値の中で感度の絶対値が最大となる測定データを各パラメータに対してそれぞれ選定する．このため，測定データとして選んだ位置を1，それ以外の位置を0とした情報選択マトリックス $[S]$ により，式(3.40)で表される Jacobian $[J]$ を次のように置き換える操作を行なう．すなわち，

$$[J] \leftarrow [J][S] \quad (3.106)$$

ただし，

$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & S_{j,n} & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

$$S_{j,n} = \begin{cases} 1 & \text{Maximum}_{\substack{n=1, \dots, N \\ j=1, \dots, P}} [|J_{n,j}|] \\ 0 & \end{cases} \quad (3.108)$$

ここで， N は全測定データ数， P は全パラメータ数である．また，式(3.108)における $\text{Maximum} [|J_{n,j}|]$ は $J_{n,j}$ の絶対値が最大となる j と n の組み合わせについて，それに対応する成分を1とし，それ以外は0とすることを表している．

最適化パラメータに対する感度が大きいデータは、パラメータの修正に関して有効な情報を含んでいると考えられ、このように各パラメータに対して感度の大きいデータを測定データに選ぶことで質の高い情報を与えることが可能であると考えられる。

同様に、拡張カルマンフィルタを利用した逆解析においても感度を利用することができる。拡張カルマンフィルタにおいては、未知パラメータ、すなわち、状態量に対する観測量の感度を感度マトリックスとして定義している。感度マトリックスをここでもう一度書くと次のようになる。

$$H_t = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial x_1} & \frac{\partial d_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial d_1}{\partial x_p} \\ \frac{\partial d_2}{\partial x_1} & \frac{\partial d_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial d_2}{\partial x_p} \\ \vdots & \vdots & \frac{\partial d_i}{\partial x_j} & \vdots \\ \frac{\partial d_N}{\partial x_1} & \frac{\partial d_N}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial d_N}{\partial x_p} \end{bmatrix}_t \quad (3.109)$$

上式の感度マトリックスの成分を調べることで観測量、すなわち、測定データの未知パラメータに対する感度が得られる。感度の絶対値の大きなデータを選定することで、質の高いデータが選択できる。

感度は未知パラメータや境界条件の関数であり、同じ測定点においてもパラメータが修正されたり、実験条件が変わると変化する。そこで、固定されている測定点から感度の高いデータを選択して逆解析をスタートし、反復計算がある程度進んでから再度感度による情報選択をしない手法が考えられる。また、測定データ全体で感度が高くなるように境界条件、すなわち、実験条件を変更して感度の絶対値の総和が最も大きな実験に対して逆解析を行う手法も、質の高いデータに基づいた解析を行う上で有効であると考えられる。次に、感度を利用した逆解析において考えられる二種類の戦略をまとめる。

(1)測定データ選定戦略

ある実験条件に対して、感度の高い測定データを選定して逆解析を進める。

Step 1 各測定データの感度係数を計算する。

Step 2 感度の絶対値が最大となる測定データを、各パラメータに対して一つ以上選定する。

Step 3 選定された測定データに基づき逆解析を実行する。

Step 4 反復計算が進行して、選定された測定データの感度が低下したと判断される場合には、もう一度感度により測定データを選定し直す。

この戦略は測定点が自由に設定可能であり、逆解析の対象に対して比較的一様に分散した測定点が設定できる場合に有効である。また、同時に測定点を設定しなくても同じ実験条件のまま、測定点を走査して感度の高い位置を探ることも可能である。

(2)実験条件選定戦略

固定した測定点から得られる測定データの感度の総和が最大となる実験条件に基づき逆解析を行う。いくつかの実験条件に対して感度の総和を計算し、その大きさに基づいて実験条件を選定して逆解析を進める。

Step 1 いくつかの実験条件に対して各測定データの感度係数を計算する。

Step 2 感度の絶対値の総和が最大となる実験条件に対する測定データを採用する。

Step 3 採用した測定データに基づき逆解析を実行する。

Step 4 反復計算が進行して、選定された測定データの感度が低下したと判断される場合には、もう一度いくつかの実験条件に対して感度を計算して実験条件を選定し直す。

この戦略は測定位置を容易に移動したり追加できない場合で、実験条件が比較的自由に設定できる場合に有効である。

以上の二つの戦略を組合せて感度が最大となる測定点配置と実験条件を選定すれば、さらに有効な情報が得られる。

3.5 遺伝的アルゴリズムの適用

3.5.1 遺伝的アルゴリズムについて

遺伝的アルゴリズムは生物の進化⁽²⁶⁾⁻⁽²⁹⁾の過程をモデル化したアルゴリズムであり、個体群を、増殖、交叉、突然変異、淘汰の各ステップにより世代交代させ、環境に適応した個体が選択され進化していく仮定を数値的にシミュレートするものである。遺伝的アルゴリズムは、最近、数理科学および工学分野の様々な問題への適用がなされるようになり、組合せ最適化問題や極値探索問題の解析に有効な手法として注目されている⁽³⁰⁾⁻⁽³⁶⁾。

3.5.2 遺伝的アルゴリズムによるモデルパラメータの決定法

逆解析においては対象を数理モデルとして扱い、境界要素法や有限要素法などによる数値解析の結果と、測定値との差を最小にするように解を求める手法が採用されることが多い。この場合、既存の順解析ソフトウェアが有効に利用できる利点があるが、対象のモデルパラメータをあらかじめ仮定する必要がある。本研究における最適化手法またはフィルタアルゴリズムを用いた逆解析手法においても、あらかじめ初期仮定値を設定し反復計算を行う。例えば、欠陥同定の逆解析においては、欠陥の個数や位置形状を表すパラメータを初めに仮定して反復計算によりパラメータの値を決定する。したがって、モデル化する対象の数理モデルをいかに設定するかが重要な課題となる。ここでは、このモデルパラメータを遺伝的アルゴリズムを用いて設定し、その後、動弾性逆解析により複数の欠陥の位置形状を同定する逆解析手法について述べる。

まず、逆問題における未知パラメータを遺伝的アルゴリズムで扱う遺伝子で表現する方法を説明する。ここでは未知パラメータを離散値として、任意のパラメータの値の組合せを一つの順序番号で表し、その整数を一つの遺伝子に当てはめることにする。

逆解析における未知量を次のようなパラメータ \mathbf{p} で表すものとする。

$$\mathbf{p} = \{p_1 \ p_2 \ p_3 \ \cdots \ p_i \ \cdots \ p_P\} \quad (3.110)$$

ただし、 P はパラメータの総数を表す。各パラメータ $p_i (i=1, 2, \dots, P)$ の取り得る値の範囲を次のように表す。

$$a_i \leq p_i \leq b_i \quad (3.111)$$

ただし、 a_i と b_i はそれぞれ i 番目のパラメータの下限值と上限値である。

パラメータは離散的な値を取るものとする。パラメータ p_i の下限値 a_i から数えて α 番目の値 $p_{i,\alpha}$ は、次のように表すことができる。

$$p_{i,\alpha} = a_i + (\alpha - 1) \Delta p_i \quad (3.112)$$

ただし、 $\alpha (=1, 2, \dots, M_i)$ は順序番号を表し、 Δp_i は a_i と b_i 間のきざみ幅を表す。したがって、パラメータ p_i の取り得る値の個数は M_i 個である。

各パラメータの組合せを考えた場合、式(3.110)で表されるパラメータの組合せの総数 M は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 M &= \prod_{i=1}^P M_i \\
 &= \prod_{i=1}^P \left\{ \text{INT} \left(\frac{|b_i - a_i|}{\Delta p_i} + 0.5 \right) + 1 \right\}
 \end{aligned} \tag{3.113}$$

ただし、 $\prod_{i=1}^P ()$ は $()$ 内の i に関する積を表し、 $\text{INT}()$ は $()$ 内の数を越えない最大の整数を表す。

一方、パラメータには数量的関係をもたないようなシンボルも考えることができ、この場合は、パラメータに順番を付けて並べたものを取り扱うものとする。

ここで、未知パラメータが次のような場合を考える。

$$P = \{ p_{1,i} \ p_{2,j} \ p_{3,k} \ \cdots \ p_{P-1,l} \ p_{P,m} \} \tag{3.114}$$

ただし、表記 $A_{,\alpha}$ はパラメータ A の下限值 a_{α} から数えて α 番目の値を表す。式(3.114)の値をとるパラメータの組合せを表す番号 $N_{ijk \cdots lm}$ は、すべてのパラメータが下限値を取る場合の組合せ

$$P = \{ p_{1,1} \ p_{2,1} \ p_{3,1} \ \cdots \ p_{P-1,1} \ p_{P,1} \} \tag{3.115}$$

から数えた順序番号により次式で与えられる。

$$N_{ijk \cdots lm} = (i-1)JK \cdots LM + (j-1)K \cdots LM + \cdots + (l-1)M + m \tag{3.116}$$

ただし、 I, J, K, \dots, L, M は各パラメータの取り得る値の総数である。このような順序番号によりパラメータの離散値の任意の組合せが表現できる。本研究では、式(3.116)で表される組合せの順序番号を遺伝子表現とする。

一方、遺伝子表現からパラメータ表現への変換は、組合せの順序番号である整数 $N_{ijk \cdots lm}$ から各パラメータの順序番号 i, j, k, \dots, l, m を求めて、それに対応するパラメータの値を式(3.112)により求めればよい。

図3.14に組合せの順序番号を一つの遺伝子にあてはめた個体の構造を示す。いくつかの整数の列で個体が表現される。このような個体がいくつか集合したものが集団となる。

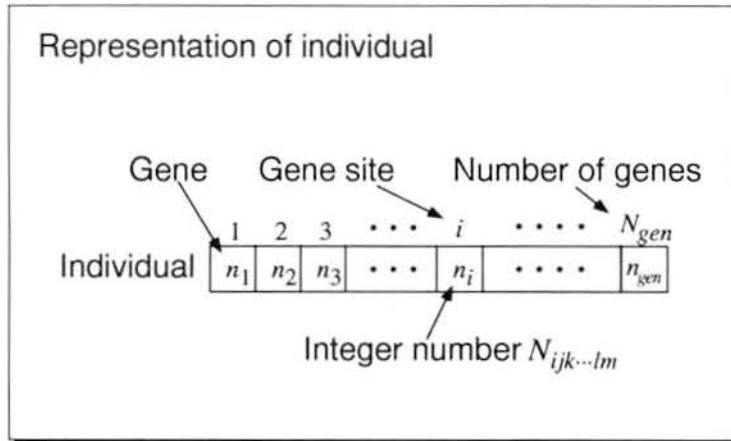


図3.14 組合せの順序番号を一つの遺伝子にあてはめた個体の表現

逆問題における未知パラメータを上述の組合せの順序番号により表す場合、複数の同種のパラメータの組で表されるような問題に対して有効である。たとえば、座標と形状のパラメータを一つのまとまりとして欠陥を表す場合など、複数の欠陥を取り扱うことができる。また、点ソースモデルに基づく熱源同定逆問題の解析などにも適用できる。一方、パラメータの組が一つだけで表現できる場合には順序番号を2進数に変換したものを使用し、各ビットを遺伝子一つずつに対応させれば、遺伝的アルゴリズムの処理を適用できる。

3.5.3 遺伝的アルゴリズムにおける処理手順

遺伝的アルゴリズムを用いたモデルパラメータ設定のプログラムは、図3.15のフローチャートに示す手続きにより構成される。

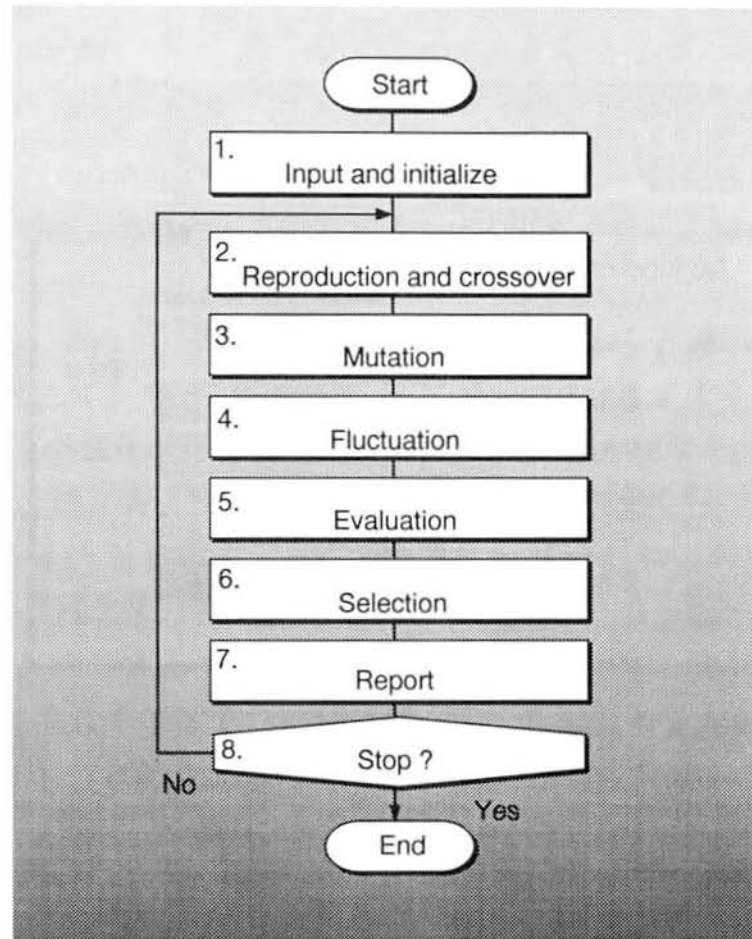


図3.15 遺伝的アルゴリズムのフローチャート

フローチャートにおいて、1. Input and initialize では、適応度の計算に必要なデータを読み込む。また、遺伝的アルゴリズムに必要なデータを読み込み、初期集団を一樣乱数を用いてセットする。

2. Reproduction and crossover では、一樣乱数を用いて個体の組を選定し、多点交叉を行って新たな個体を増殖させる。交叉位置も乱数により決定する。多点交叉では図3.16に示すように、 N_{mpc} 個の交叉位置で二つの個体の遺伝子を入れ替え、新たな個体を生成する操作を行う。

3. Mutation では、新たに生成された個体に対して確率 P_{mu} で突然変異を発生させる。突然変異では、図3.17に示すように遺伝子すなわち組合せの順序番号を乱数により変更する操作を行う。

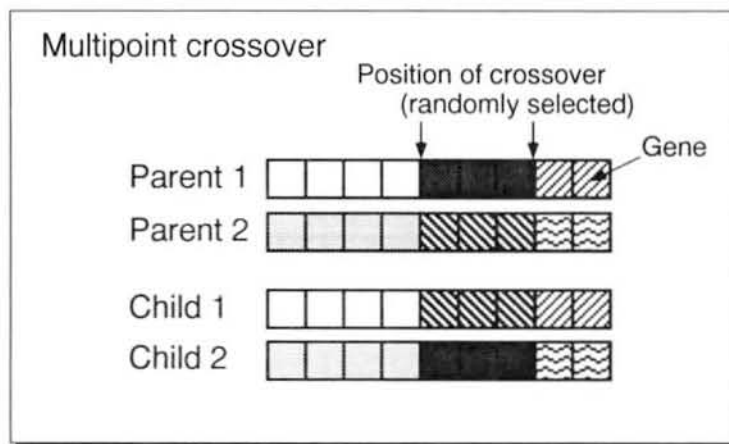


図3.16 多点交叉

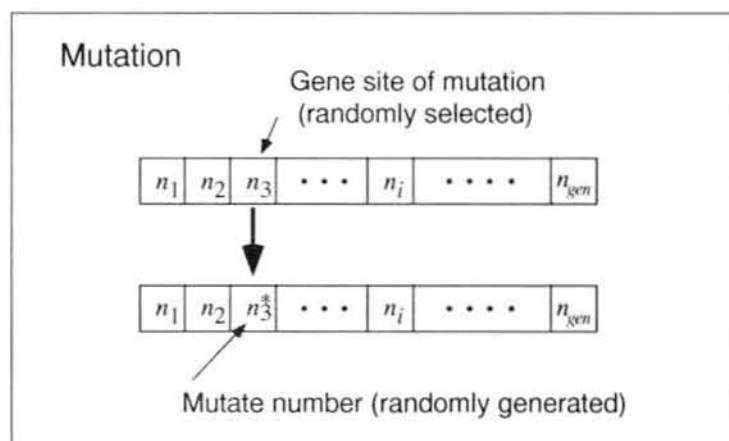


図3.17 突然変異

4. Fluctuationは、各個体の各遺伝子に対応する各パラメータに対して、次式による微小変化を加える操作を行う。

$$\left. \begin{array}{l} p_i \leftarrow p_i + \Delta p_i \\ \text{or } p_i \leftarrow p_i - \Delta p_i \\ \text{or } p_i \leftarrow p_i \end{array} \right\} \quad (3.117)$$

ただし、上式の三つの操作のうちいずれを選択するかは一様乱数により決定する。

5. Evaluation では、各個体の遺伝子表現に対応するモデルに対して適応度 Fit を計算する。

6. Selection は、新たに生成された個体を加えた集団から、適応度の高いものを選択して新たな集団とする操作を行う。適用度の低い個体は除去する。

7. Report では、各個体の適用度や遺伝子列などの集団の情報を出力する。

8. Stop? では、終了判定基準を満足するかどうかの判定を行う。判定基準を満たしている場合には処理を終了する。満たさない場合には、2. Reproduction and crossover に戻り世代交代を続ける。

表3.1に遺伝的アルゴリズムに関するパラメータをまとめておく。各パラメータは問題ごとに決定する必要がある。適応度向上に対して影響を与えるため、遺伝的アルゴリズムを効率的に実行するうえで重要である。

表3.1 遺伝的アルゴリズムにおけるパラメータ

集団の個体数	N_{pop}
最大世代数	$MaxGeneration$
染色体の遺伝子の数	N_{gen}
増殖の割合	R_{rp}
交叉点数	N_{mpc}
突然変異確率	P_{mu}
最大適応度	$FitMax$
平均適応度	$FitAve$

本研究では、文献(31)に記述されているSimple GAを基本としたアルゴリズムを構成しているが、各パラメータを微小変動させる操作(Fluctuation)を加えた。この操作は一世代前のパラメータに対する形質をより滑らかに継承しながら適応度を向上させることに効果がある。また、この操作は、欠陥同定において正解に近い位置形状および個数が生成されている場合に、乱数により近傍の欠陥が生成されるまで適用度の向上が停滞してしまう状態を回避することができ、少ない世代交代で優秀な個体を得るのに有効である。

淘汰においては各個体に対する適応度を計算し、適応度の高い方から決められた個体数 N_{pop} だけを次の世代に残すものとした。

3.5.4 遺伝的アルゴリズムを適用した欠陥同定法

遺伝的アルゴリズムを欠陥同定逆解析における初期仮定値の設定に適用する。遺伝的アルゴリズムによりモデルパラメータが設定された後は、最適化手法またはフィルタアルゴリズムを用いた逆解析手法により、モデルパラメータの値を決定する。

ここでは複数欠陥を遺伝子で表現する方法を説明する。3.5.2節で述べた方法に従い逆解析で扱う欠陥のパラメータを離散値として、一つの欠陥に対するパラメータの任意の値の組合せを順序番号で表し、それを一つの遺伝子に当てはめることにする。

3.2.2節に示したように、欠陥形状を単純な幾何形状で近似する。たとえば、空洞欠陥を球形で近似できるものと仮定すれば、欠陥の位置形状を表すパラメータは次のようになる。

$$\mathbf{p} = \{ X_1 \ X_2 \ X_3 \ R \} \quad (3.118)$$

ただし、 X_1, X_2, X_3 は球の中心座標、 R は半径を表す。

座標 X_1, X_2, X_3 および半径 R はきざみ幅 $\Delta X_1, \Delta X_2, \Delta X_3$ および ΔR の離散的な値をとるものとする。この場合、それぞれのパラメータは次のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} X_{1,i} &= a_1 + (i-1)\Delta X_1, & i &= 1, 2, \dots, I \\ X_{2,j} &= a_2 + (j-1)\Delta X_2, & j &= 1, 2, \dots, J \\ X_{3,k} &= a_3 + (k-1)\Delta X_3, & k &= 1, 2, \dots, K \\ R_{,l} &= a_4 + (l-1)\Delta R, & l &= 1, 2, \dots, L \end{aligned} \right\} \quad (3.119)$$

一つの欠陥を表すパラメータが取り得る組合せの総数 M は $I \times J \times K \times L$ 通りである。

ある欠陥の位置形状を表すパラメータの組合せ

$$p = \{ X_{1,i} \ X_{2,j} \ X_{3,k} \ R_{,l} \} \quad (3.120)$$

は、それぞれのパラメータが1番目の値をとる場合

$$p = \{ X_{1,1} \ X_{2,1} \ X_{3,1} \ R_{,1} \} \quad (3.121)$$

から数えて N_{ijkl} 番目の組合せの順序番号

$$N_{ijkl} = (i-1)JKL + (j-1)KL + (k-1)L + l \quad (3.122)$$

で表すことができる。

N_{gen} 個の欠陥を表すには N_{gen} 個の遺伝子を持つ染色体を用いる。この染色体すなわち遺伝子列を個体と考える。各遺伝子位置には一つの欠陥を表す順序番号が一つずつあてはめられる。遺伝子列の長さを固定した場合には遺伝子の数が最大の欠陥数になる。

遺伝子表現から各欠陥の位置形状を求めるには、式(3.122)における N_{ijkl} に対応する各パラメータの順序番号 i, j, k, l を求め、式(3.119)によりパラメータの値を求めればよい。

ここでは、適応度 Fit には、3.2.5節に示す境界変位の残差二乗和 W に関する無次元量の逆数を用いた。適応度は次式で表される。

$$Fit = \frac{1}{W/W_0} = W_0/W \quad (3.123)$$

遺伝的アルゴリズムの終了判定にはいくつかの基準が考えられる。適応度の変化量を基準として変化量が小さくなったときを終了と判定する場合や、適応度の基準値を設定し、その値を判定基準とする場合が考えられる。また、遺伝的アルゴリズムを終了したとき、最終世代での集団中のもっとも適用度の高い個体を解として採用する。または、いくつかの上位の候補を採用する場合が考えられる。本研究では、まず世代数の上限を決めておき、その世代に達してしかも適応度が基準値より大きい場合に、最大適応度をもつ個体を採用するものとした。世代数の上限に達しても適応度が向上しない場合には、表3.1に示す遺伝的アルゴリズムのパラメータを変更し、再度世代交代させて適応度が基準値を越えるまでこれを繰り返すものとした。

3.6 動弾性問題の境界要素解析法

ここでは、逆解析手法で使用する動弾性問題に対する境界要素解析⁽³⁷⁾⁻⁽⁴²⁾について説明する。境界要素解析法としては非定常問題が解析可能であるLaplace変換解法を採用している。Laplace変換パラメータのうち、調和振動数 ω に対応する一つのパラメータについて計算することで定常振動問題の解を得ることができる。

支配微分方程式から出発して正則化された境界積分方程式による定式化について説明する。プログラムでは、すべての積分が通常のGaussの数値積分公式で積分可能な離散化法を採用している。離散化手法については付録Aで説明する。

3.6.1 動弾性問題の支配微分方程式

本研究の逆解析で対象とする定常動弾性問題の支配微分方程式はすでに第2章で述べたが、ここでは、非定常問題の解析法とともに説明する。図3.18に示すような均質で等方性の線形弾性体に動的な負荷が加わっている場合について考え、ひずみは微小であると仮定する。対象とする物体の占める領域を Ω とし、その境界を Γ とする。直角座標系 $O-x_1x_2x_3$ を用いる。

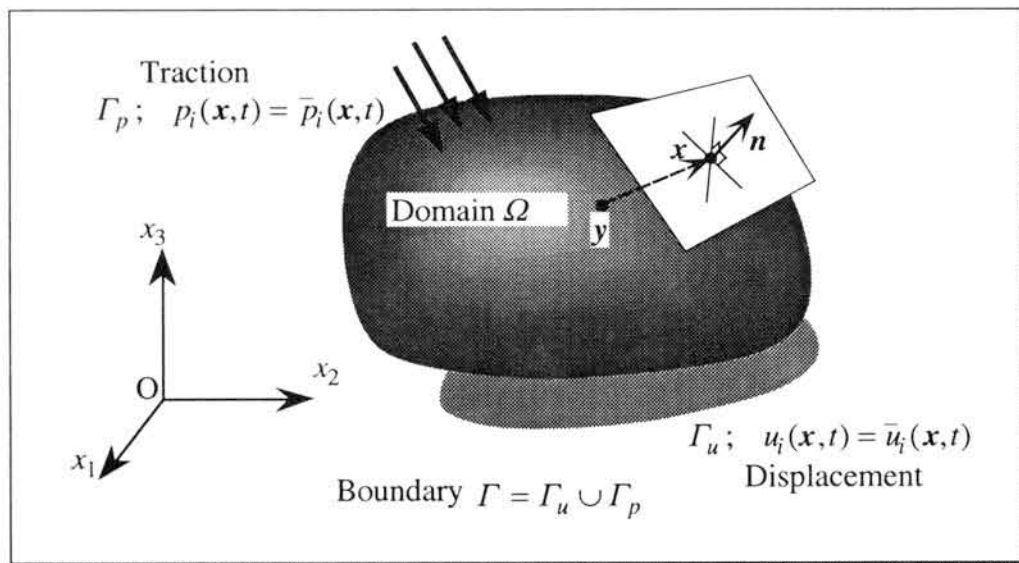


図3.18 座標系と記号の定義

領域 Ω 内の任意点 \mathbf{x} での時間 t における変位を $u_i(\mathbf{x}, t)$ と表すとき、弾性体の運動方程式は次式で表される微分方程式、すなわちNavier-Cauchyの運動方程式となる⁽⁴³⁾⁻⁽⁴⁵⁾。

$$(C_1^2 - C_2^2)u_{i,ij}(\mathbf{x}, t) + C_2^2 u_{j,ii}(\mathbf{x}, t) = \ddot{u}_j(\mathbf{x}, t) \quad (3.124)$$

ただし、動弾性問題では一般に物体力の影響は小さいものと仮定できるので、物体力の項は省略してある。また、上付きドット (\cdot) は時間微分を表し、下付きコンマ $(,)$ はそれに続く添え字による空間微分を表す。繰り返される指標については総和をとるものとする。 C_1 と C_2 は、それぞれ物体中を伝播する縦波(膨張波)と横波(せん断波)の伝播速度であり、次式で表される。

$$C_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (3.125)$$

$$C_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (3.126)$$

ただし、 ρ は物体の密度を示す。 λ と μ はLaméの定数であり、縦弾性係数 E 、Poisson比 ν を用いて次式で表される。

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.127)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.128)$$

初期条件は領域 Ω 内のすべての点に対して、次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} u_i(\mathbf{x}, 0) &= u_{0i}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega \\ \dot{u}_i(\mathbf{x}, 0) &= v_{0i}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega \end{aligned} \right\} \quad (3.129)$$

ただし、 u_{0i} と v_{0i} はそれぞれ既知な初期変位と初期速度を表す。

境界条件は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} u_i(\mathbf{x}, t) &= \bar{u}_i(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Gamma_u \\ p_i(\mathbf{x}, t) &= \bar{p}_i(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Gamma_p \end{aligned} \right\} \quad (3.130)$$

ただし、 $\bar{u}_i(\mathbf{x}, t)$ と $\bar{p}_i(\mathbf{x}, t)$ はそれぞれ変位と表面力の既知量を表す。

また、応力テンソルおよび表面力ベクトルは、それぞれ次式により変位成分と関係づけられている。

$$\sigma_{ij} = \rho(C_1^2 - 2C_2^2)\delta_{ij}u_{k,k} + \rho C_2^2(u_{i,j} - u_{j,i}) \quad (3.131)$$

$$p_j = \sigma_{ij}n_i \quad (3.132)$$

ただし、 δ_{ij} はKroneckerのデルタであり、 n_i は物体表面における法線方向ベクトルを表す。

支配微分方程式(3.124)にLaplace変換を施すことにより、Laplace変換空間での支配微分方程式を得ることができる。

関数 $f(\mathbf{x}, t)$ が区分的に微分可能で、かつ有限個の有限な不連続値を持つとき、関数 f のLaplace変換は次式で定義される⁽⁴⁶⁾⁽⁴⁷⁾。

$$\hat{f}(\mathbf{x}, s) \equiv \mathcal{L}[f(\mathbf{x}, t)] = \int_0^\infty f(\mathbf{x}, t) \exp(-st) dt \quad (3.133)$$

ただし、Laplace変換を \mathcal{L} で、Laplace変換された量をハット付き(^)で表すことにする。 s はLaplace変換パラメータである。

式(3.124)を時間関数からLaplace変換パラメータの関数に変換する。式(3.133)に基づいてLaplace変換を施すと次式が得られる。

$$(C_1^2 - C_2^2)\hat{u}_{i,ij}(\mathbf{x}, s) + C_2^2\hat{u}_{j,ii}(\mathbf{x}, s) = s^2\hat{u}_j(\mathbf{x}, s) - s\hat{u}_{0j}(\mathbf{x}) - \hat{v}_{0j}(\mathbf{x}) \quad (3.134)$$

ここで、 $\hat{u}_{0j}(\mathbf{x})$ はLaplace変換された初期変位ベクトル、 $\hat{v}_{0j}(\mathbf{x})$ はLaplace変換された初期速度ベクトル表している。式(3.134)において初期条件をすべて0と仮定すると、Laplace変換空間での支配微分方程式は次式のようになる。

$$(C_1^2 - C_2^2)\hat{u}_{i,ij}(\mathbf{x}, s) + C_2^2\hat{u}_{j,ii}(\mathbf{x}, s) = s^2\hat{u}_j(\mathbf{x}, s) \quad (3.135)$$

境界条件もLaplace変換されて次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u_i(\mathbf{x}, t) &= \hat{u}_i(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Gamma_u \\ p_i(\mathbf{x}, t) &= \hat{p}_i(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Gamma_p \end{aligned} \right\} \quad (3.136)$$

ここで、調和振動数 ω を用いて

$$s = i\omega \quad (3.137)$$

と置くと式(3.135)は次のようになる.

$$(C_1^2 - C_2^2)\hat{u}_{i,ij}(\mathbf{x}, \omega) + C_2^2\hat{u}_{j,ii}(\mathbf{x}, \omega) = \omega^2\hat{u}_j(\mathbf{x}, \omega) \quad (3.138)$$

上式は式(3.124)をFourier変換した式と同じであり、Laplace変換解法において、Laplace変換パラメータ s のうち、調和振動数 ω に対応する一つのパラメータについて計算することで定常振動問題の解を得ることができる.

次に、式(3.135)に基づいて境界積分方程式の導出を行う.

3.6.2 境界積分方程式の導出

Laplace変換解法に基づく境界要素法による定式化は、Laplace変換空間での支配微分方程式、式(3.135)の両辺に重み関数 $\hat{u}_{jl}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ を掛け、これを領域全体にわたって積分して得られる次式に示す恒等式から出発する⁽³⁷⁾.

$$\int_{\Omega} \left\{ (C_1^2 - C_2^2)\hat{u}_{i,ij}(\mathbf{x}, s) + C_2^2\hat{u}_{j,ii}(\mathbf{x}, s) - s^2\hat{u}_j(\mathbf{x}, s) \right\} \hat{u}_{jl}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) d\Omega(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.139)$$

ここで \mathbf{y} は領域 Ω 内の任意点を表す. この式において部分積分を2回繰り返し、式(3.131)および式(3.132)の関係を用いると次式が得られる.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \int_{\Gamma} \hat{u}_{jl}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \hat{p}_j(\mathbf{x}, s) d\Gamma(\mathbf{x}) - \frac{1}{\rho} \int_{\Gamma} \hat{p}_{jl}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \hat{u}_j(\mathbf{x}, s) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ & + \int_{\Omega} \left\{ (C_1^2 - C_2^2)\hat{u}_{il,ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) + C_2^2\hat{u}_{jl,ii}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) - s^2\hat{u}_{jl}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \right\} \hat{u}_j(\mathbf{x}, s) d\Omega(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (3.140)$$

ただし、 \hat{p}_{jl}^* は式(3.132)の関係から次のように表される.

$$\hat{p}_{jl}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = \rho(C_1^2 - 2C_2^2)\hat{u}_{kl,k}^*n_j + \rho C_2^2(\hat{u}_{il,j}^* - \hat{u}_{jl,i}^*)n_i \quad (3.141)$$

$\hat{u}_{jl}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ を次の微分方程式を満足する基本解とする.

$$(C_1^2 - C_2^2)\hat{u}_{il,ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) + C_2^2\hat{u}_{jl,ii}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) - s^2\hat{u}_{jl}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) + \frac{1}{\rho}\delta_{jl}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0 \quad (3.142)$$

$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ はDiracのデルタ関数であり次の性質を持つ.

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})d\Omega = \begin{cases} f(\mathbf{x}); & \mathbf{y} \in \Omega \\ 0; & \mathbf{y} \in \Omega_{EXT} \end{cases} \quad (3.143)$$

ただし, Ω_{EXT} は領域 Ω の外側を表している. また, $f(\mathbf{x})$ は点 $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ で連続である.

動弾性問題に対する基本解 $\hat{u}_{jl}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ は次式で与えられる⁽³⁷⁾⁻⁽⁴²⁾.

$$\hat{u}_{jl}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = \frac{1}{\alpha\pi\rho C_2^2} \left\{ \psi(r, s)\delta_{jl} - \chi(r, s)r_{,j}r_{,l} \right\} \quad (3.144)$$

ここで, r は2点間の距離であり, $r_{,j}$ は r の x_j による微分を表している. 2次元問題に対しては $\alpha=2$ であり, ψ と χ は次式のようになる.

$$\psi(r, s) = K_0\left(\frac{sr}{C_2}\right) + \frac{C_2}{sr} \left\{ K_1\left(\frac{sr}{C_2}\right) - \frac{C_2}{C_1} K_1\left(\frac{sr}{C_1}\right) \right\} \quad (3.145)$$

$$\chi(r, s) = K_2\left(\frac{sr}{C_2}\right) + \frac{C_2^2}{C_1^2} K_2\left(\frac{sr}{C_1}\right) \quad (3.146)$$

ただし, K_0, K_1, K_2 はそれぞれ0次, 1次, 2次の第2種変形Bessel関数である. また, 3次元問題に対しては $\alpha=3$ であり, ψ と χ は次式のようになる.

$$\psi(r, s) = \frac{\exp\left(\frac{-sr}{C_2}\right)}{r} + \left(\frac{C_2^2}{s^2 r^2} + \frac{C_2}{sr} \right) \frac{\exp\left(\frac{-sr}{C_2}\right)}{r} - \frac{C_2^2}{C_1^2} \left(\frac{C_1^2}{s^2 r^2} + \frac{C_1}{sr} \right) \frac{\exp\left(\frac{-sr}{C_1}\right)}{r} \quad (3.147)$$

$$\chi(r, s) = \left(\frac{3C_2^2}{s^2 r^2} + \frac{3C_2}{sr} + 1 \right) \frac{\exp\left(\frac{-sr}{C_2}\right)}{r} - \frac{C_2^2}{C_1^2} \left(\frac{3C_1^2}{s^2 r^2} + \frac{3C_1}{sr} + 1 \right) \frac{\exp\left(\frac{-sr}{C_1}\right)}{r} \quad (3.148)$$

表面力に対応する基本解 $\hat{p}_{jl}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ は $\hat{u}_{jl}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ を式(3.141)に代入することにより得られ, 次式のようになる.

$$\begin{aligned}
\hat{p}_{jl}^*(x, y, s) = & \frac{1}{\alpha\pi} \left[\left\{ \frac{d\psi(r, s)}{dr} - \frac{\chi(r, s)}{r} \right\} \left(\delta_{jl} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,l} n_j \right) \right. \\
& - \frac{2\chi(r, s)}{r} \left(n_l r_{,j} - 2r_{,j} r_{,l} \frac{\partial r}{\partial n} \right) - 2 \frac{d\chi(r, s)}{dr} r_{,j} r_{,l} \frac{\partial r}{\partial n} \\
& \left. + \left(\frac{C_1^2}{C_2^2} - 2 \right) \left\{ \frac{d\psi(r, s)}{dr} - \frac{d\chi(r, s)}{dr} - \frac{\alpha\chi(r, s)}{2r} \right\} r_{,j} n_l \right] \quad (3.149)
\end{aligned}$$

式(3.142)を式(3.140)に代入し, Diracのデルタ関数の性質を用いると次式が得られる.

$$\hat{u}_l(y, s) = \int_{\Gamma} \hat{u}_{jl}^*(x, y, s) \hat{p}_j(x, s) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} \hat{p}_{jl}^*(x, y, s) \hat{u}_j(x, s) d\Gamma(x) \quad (3.150)$$

さらに, 点 y を境界上の点に移行すると, 次の境界積分方程式が得られる.

$$C_{jl} \hat{u}_l(y, s) = \int_{\Gamma} \hat{u}_{jl}^*(x, y, s) \hat{p}_j(x, s) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} \hat{p}_{jl}^*(x, y, s) \hat{u}_j(x, s) d\Gamma(x) \quad (3.151)$$

式(3.151)において \hat{u}_{jl}^* と \hat{p}_{jl}^* は, 静弾性問題に対する基本解 u_{jl}^* と p_{jl}^* を用いて次のように表すことができる⁽⁴⁰⁾⁽⁴¹⁾.

$$\hat{u}_{jl}^* = u_{jl}^* + u_{jl}^{*R} \quad (3.152)$$

$$\hat{p}_{jl}^* = p_{jl}^* + p_{jl}^{*R} \quad (3.153)$$

ただし, u_{jl}^{*R} と p_{jl}^{*R} はそれぞれ \hat{u}_{jl}^* と \hat{p}_{jl}^* の正則な部分を表す. 正則な部分は C_{jl} の評価に影響しない. したがって, C_{jl} は静弾性問題の基本解と次式で関係付けられる.

$$C_{jl} = - \int_{\Gamma} \hat{p}_{jl}^*(x, y) d\Gamma(x) \quad (3.154)$$

静弾性問題の基本解は次式で与えられる⁽³⁷⁾⁽⁴⁸⁾.

[2次元問題]

$$u_{jl}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \delta_{ij} \ln\left(\frac{1}{r}\right) + r_{,i} r_{,j} \right\} \quad (3.155)$$

$$p_{jl}^* = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (1-2\nu) \delta_{ij} + 2r_{,i} r_{,j} \right\} + (1-2\nu)(r_{,i} n_j - r_{,j} n_i) \right] \quad (3.156)$$

[3次元問題]

$$u_{jl}^* = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} [(3-4\nu)\delta_{kl} + r_{,k}r_{,l}] \quad (3.157)$$

$$p_{jl}^* = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[\{(1-2\nu)\delta_{kl} + 3r_{,k}r_{,l}\}r_{,i}n_i - (1-2\nu)(r_{,k}n_l - r_{,l}n_k) \right] \quad (3.158)$$

式(3.154)を式(3.151)に代入し変形すると、正則化された積分方程式が得られ、次式のように書くことができる。

$$\begin{aligned} & \left[\int_{\Gamma} \{ \hat{p}_{jl}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) - p_{jl}^*(\mathbf{x}, s) \} d\Gamma(\mathbf{x}) \right] \hat{u}_j(\mathbf{y}, s) \\ & - \int_{\Gamma} \hat{p}_{jl}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \{ \hat{u}_j(\mathbf{x}, s) - \hat{u}_j(\mathbf{y}, s) \} d\Gamma(\mathbf{x}) \\ & = \int_{\Gamma} \hat{u}_{jl}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \hat{p}_j(\mathbf{x}, s) d\Gamma(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.159)$$

3.6.3 境界積分方程式の離散化

式(3.159)を境界要素で離散化する場合を考える。図3.19に示すように、境界 Γ をソース点を含む要素 Γ_S とそれ以外の要素 Γ_R とに分けて考えると次のようになる⁽³⁷⁾。

$$\begin{aligned} & \left[\int_{\Gamma_S + \Gamma_R} \{ \hat{p}_{jl}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) - p_{jl}^*(\mathbf{x}, s) \} d\Gamma(\mathbf{x}) \right] \hat{u}_j(\mathbf{y}, s) \\ & + \int_{\Gamma_S} \hat{p}_{jl}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \{ \hat{u}_j(\mathbf{x}, s) - \hat{u}_j(\mathbf{y}, s) \} d\Gamma(\mathbf{x}) \\ & + \int_{\Gamma_R} \hat{p}_{jl}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \hat{u}_j(\mathbf{x}, s) d\Gamma(\mathbf{x}) - \left\{ \int_{\Gamma_R} \hat{p}_{jl}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) d\Gamma(\mathbf{x}) \right\} \hat{u}_j(\mathbf{y}, s) \\ & = \int_{\Gamma_S} \hat{u}_{jl}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \hat{p}_j(\mathbf{x}, s) d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_R} \hat{u}_{jl}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \hat{p}_j(\mathbf{x}, s) d\Gamma(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.160)$$

式(3.160)において、要素 Γ_R に関する積分は特異積分とはならないので、そのまま直接数値積分できる。左辺第1項は基本解の正則な部分に関する積分であるので直接積分でき、右辺第1項は局所座標系の座標変換を行うことにより特異性をキャンセルできる。左辺第2項については、内挿関数を用いて積分核の特異性をキャンセルすることができる。左辺第2項の積分における特異性をキャンセルする方法については、付録Aにおいて説明する。

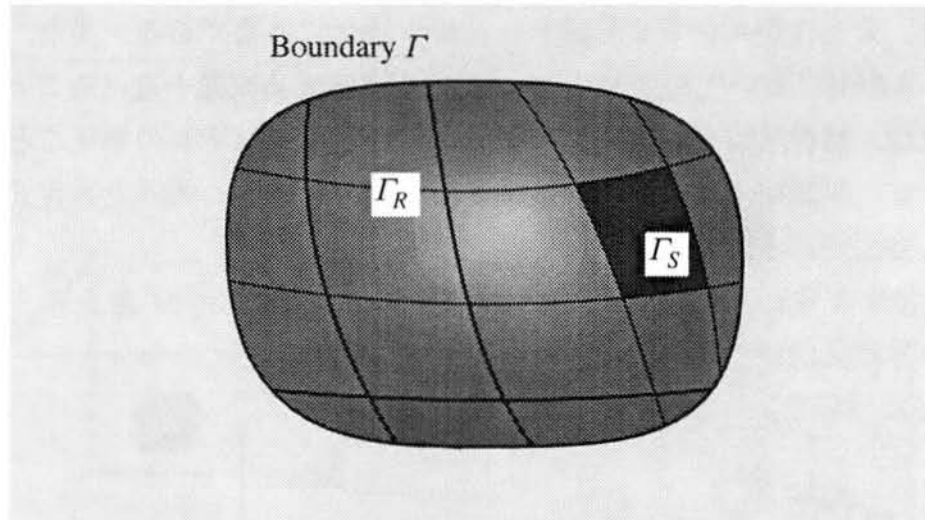


図3.19 境界要素分割

式(3.160)はすべての積分が通常のGauss積分公式を用いて評価できる。式(3.160)を境界要素を用いて離散化し数値積分を実行すると、次式のような連立一次代数方程式が得られる。

$$[H(s)]\{\hat{u}(s)\} = [G(s)]\{\hat{p}(s)\} \quad (3.161)$$

ただし、 $[H(s)]$ と $[G(s)]$ はある s に対して計算される表面力と変位に関する係数マトリックスであり、 $\{\hat{u}(s)\}$ と $\{\hat{p}(s)\}$ は境界上の変位と表面力に対する列ベクトルである。

式(3.161)に境界条件を適用して未知量を左辺にまとめると、境界上の変位と表面力の未知量のみからなるベクトル $\{X(s)\}$ に関する次式を得ることができる。

$$[A(s)]\{X(s)\} = \{B(s)\} \quad (3.162)$$

この代数方程式系をいくつかの s ごとに解くことにより、ラプラス変換面での境界上のすべての節点における変位と表面力の値を求めることができる。ラプラス変換空間での解から時間依存の解を求めるには数値ラプラス変換を行う。数値ラプラス変換の手法は付録Bで説明する。一方、ある一つの $\omega (=is)$ について解くことにより、定常振動状態の解を得ることができる。

3.6.4 領域分割法

領域内に材料定数の異なる部分が存在する問題は領域分割法⁽³⁷⁾⁽⁴⁸⁾を適用して解析可能であり、介在物が存在する問題を取り扱う場合に必要である。また、き裂を取り扱う場合、き裂面において距離0の二つの要素が存在する問題を避けることができる。領域分割法は、解析対象をいくつかの領域に分割してそれぞれの領域ごとに境界積分方程式を立て、領域間の結合境界に接続条件を適用して一つの連立方程式に帰着させて解析する方法である。

図3.20に示すように、領域を Ω_1 と Ω_2 に分割した場合について考える。各領域ごとに境界積分方程式に対する離散化後の方程式を立てると、

領域 Ω_1 について、

$$\begin{bmatrix} H^1 & H_I^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}^1 \\ \hat{u}_I^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^1 & G_I^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p}^1 \\ \hat{p}_I^1 \end{Bmatrix} \quad (3.163)$$

領域 Ω_2 について、

$$\begin{bmatrix} H^2 & H_I^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}^2 \\ \hat{u}_I^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^2 & G_I^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p}^2 \\ \hat{p}_I^2 \end{Bmatrix} \quad (3.164)$$

ただし、上付きの添え字は領域番号を、下付きの添え字 I は界面 Γ_I 上の量であることを示す。それぞれのベクトルは以下の意味を有する。

\hat{u}^1, \hat{p}^1 : 境界 Γ_1 における変位ベクトル, 表面力ベクトル

\hat{u}_I^1, \hat{p}_I^1 : 領域 Ω_1 から見た境界 Γ_I における変位ベクトル, 表面力ベクトル

\hat{u}^2, \hat{p}^2 : 境界 Γ_2 における変位ベクトル, 表面力ベクトル

\hat{u}_I^2, \hat{p}_I^2 : 領域 Ω_2 から見た境界 Γ_I における変位ベクトル, 表面力ベクトル

界面 Γ_I 上の変位と表面力について、次の条件が成り立つ。

変位の適合条件：

$$\hat{u}_I^1 = \hat{u}_I^2 = \hat{u}^I \quad (3.165)$$

表面力の平衡条件：

$$\hat{p}_I^1 = -\hat{p}_I^2 = \hat{p}^I \quad (3.166)$$

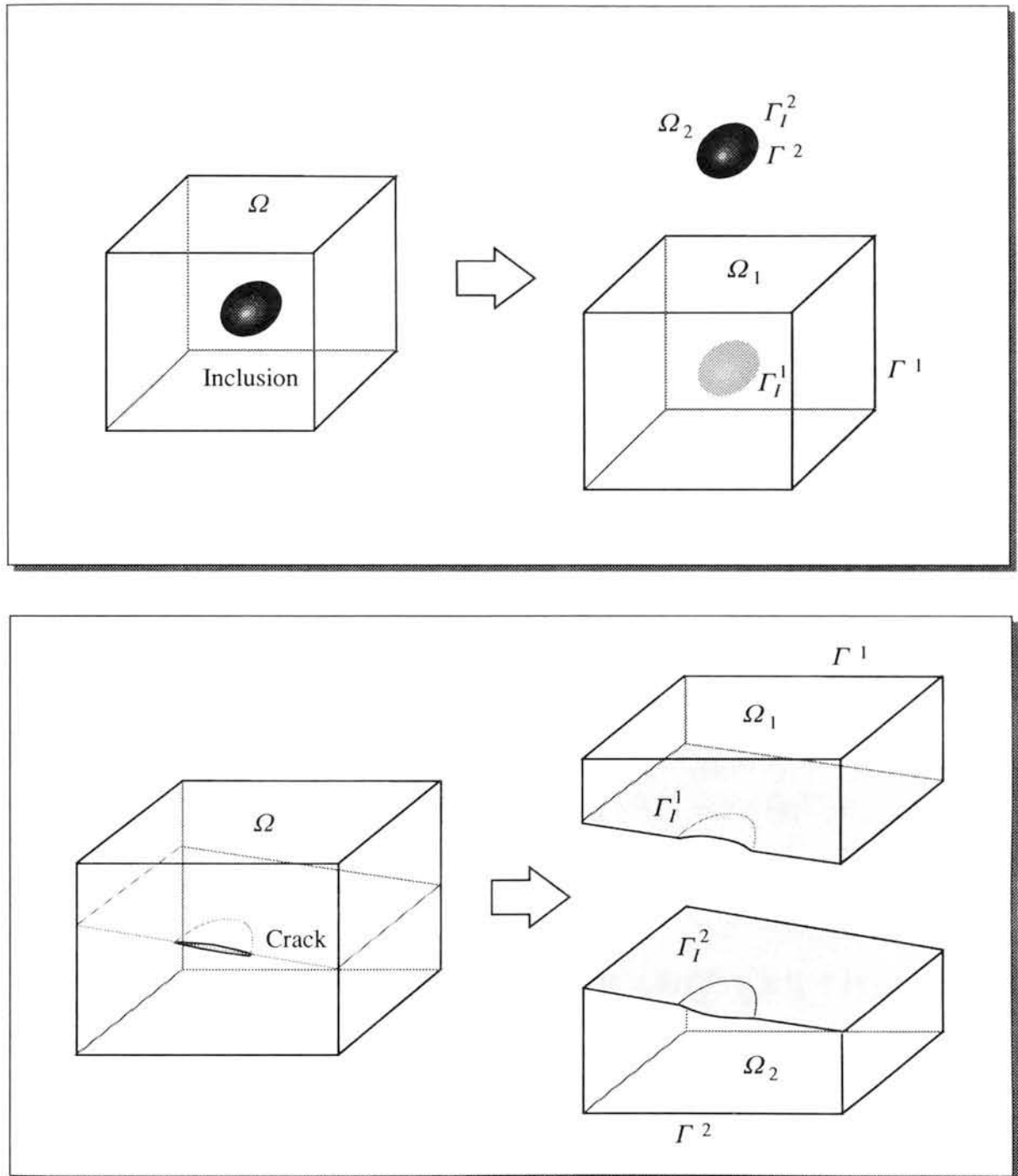


図3.20 領域分割法による介在物およびき裂の取扱い

このとき、式(3.163)と式(3.164)を一つにまとめると、次式のように書くことができる。

$$\begin{bmatrix} H^1 & H_I^1 & 0 \\ 0 & H_I^2 & H^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}^1 \\ \hat{u}^I \\ \hat{u}^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^1 & G_I^1 & 0 \\ 0 & G_I^2 & G^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p}^1 \\ \hat{p}^I \\ \hat{p}^2 \end{Bmatrix} \quad (3.167)$$

式(3.167)において界面 Γ_I 上の節点値はともに未知である。領域 Ω_1 と Ω_2 の変位と表面力を境界条件として与えられる部分と、未知量とに分けて表わすと、

$$\hat{u}^1 = \begin{Bmatrix} \hat{u}^1 \\ \hat{\bar{u}}^1 \end{Bmatrix}, \quad \hat{p}^1 = \begin{Bmatrix} \hat{p}^1 \\ \hat{\bar{p}}^1 \end{Bmatrix} \quad (3.168)$$

$$\hat{u}^2 = \begin{Bmatrix} \hat{u}^2 \\ \hat{\bar{u}}^2 \end{Bmatrix}, \quad \hat{p}^2 = \begin{Bmatrix} \hat{p}^2 \\ \hat{\bar{p}}^2 \end{Bmatrix} \quad (3.169)$$

未知量を左辺に既知量を右辺に移項すると次式で表わす連立方程式となり、界面上も含めたそれぞれの未知量を求めることができる。

$$\begin{bmatrix} H^1 & -G^1 & H_I^1 & -G_I^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_I^2 & G_I^2 & H^2 & G^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}^1 \\ \hat{\bar{u}}^1 \\ \hat{u}^I \\ \hat{\bar{u}}^I \\ \hat{u}^2 \\ \hat{\bar{u}}^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{G}^1 & \hat{\bar{p}}^1 & -\bar{H}^1 & \hat{\bar{u}}^1 \\ \bar{G}^2 & \hat{\bar{p}}^2 & -\bar{H}^2 & \hat{\bar{u}}^2 \end{bmatrix} \quad (3.170)$$

ただし、バー付きの量は既知量に対するものであることを表わしている。

3.7 非定常熱伝導問題の境界要素解析法

ここでは、逆解析手法の中で用いる、非定常熱伝導問題の境界要素解析法⁽³⁷⁾⁽³⁹⁾⁽⁴²⁾について述べる。非定常熱伝導問題の境界要素解析法には、Laplace変換解法を採用した。Laplace変換解法では支配微分方程式をLaplace変換して、Laplace変換空間での支配微分方程式を求める。次にこれを境界積分方程式に変換し、境界要素法を用いて離散化する。そして、境界条件を適用することにより未知量に関する代数方程式系を求め、これをいくつかの変換パラメータに対して解くことにより、Laplace変換空間での節点量を得る。それらに数値Laplace逆変換を施すことによって、時間依存の節点量を求めることができる。Laplace変換空間での解法には正則化された境界積分方程式による定式化に基づいた境界要素法を用い、数値Laplace逆変換にはDurbinの方法⁽⁴⁹⁾を採用する。

3.7.1 非定常熱伝導問題の支配微分方程式

本研究で対象とする熱伝導問題の支配方程式は、すでに第2章で触れたが、ここで再び繰り返す。

非定常熱伝導問題の支配微分方程式は拡散方程式で表され、内部発熱がないとき次のように表すことができる⁽⁵⁰⁾⁻⁽⁵²⁾。

$$\kappa \nabla^2 T(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (3.171)$$

上式において、 $T(\mathbf{x}, t)$ は領域 Ω 内の時刻 t における物体中のある点 \mathbf{x} での温度を表し ∇^2 はラプラシアンを表す。また、 κ は温度拡散率であり次式で与えられる。

$$\kappa = \frac{\lambda}{c\rho} \quad (3.172)$$

ただし、 λ は熱伝導率、 c は比熱、 ρ は密度である。ここでは、 κ の値は、時間および空間にわたって変化しないものと仮定する。

この問題に対する初期条件は、次式のように与えられる。

$$T(\mathbf{x}, t_0) = \bar{T}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.173)$$

ただし、 t_0 は現象の初期時刻を表し、上付きバー(-)は既知の量であることを示す。また、境界条件としては、次のようなものを考える。

[温度境界条件]

$$T(\mathbf{x}, t) = \bar{T}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_T \quad (3.174)$$

[熱流束境界条件]

$$q(\mathbf{x}, t) \equiv -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = \bar{q}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_q \quad (3.175)$$

[対流境界条件]

$$q(\mathbf{x}, t) = \bar{h}(\bar{T} - \bar{T}_a), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_h \quad (3.176)$$

ただし、 n は図3.21に示すように境界の外向き法線を表す。また、 T_a は外部雰囲気温度、 h は熱伝達率を表す。 Γ_T は温度が規定された境界、 Γ_q は熱流束が規定された境界、 Γ_h は対流境界条件が与えられる境界を表す。

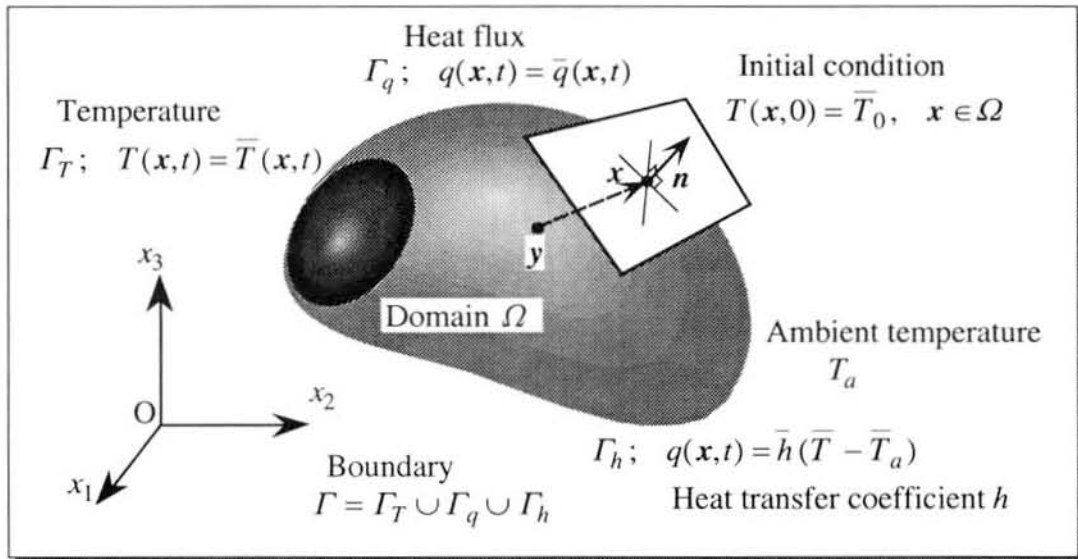


図3.21 座標系と記号の定義

式(3.171)にLaplace変換を施せば、次式ようになる。

$$\kappa \nabla^2 \hat{T}(\mathbf{x}, s) - s \hat{T}(\mathbf{x}, s) + \hat{T}_0(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.177)$$

上式は、変形Helmholtz方程式とも呼ばれる。境界条件式(3.174)から式(3.176)もLaplace変換されて次のようになる。

$$\hat{T}(\mathbf{x}, s) = \hat{T}(\mathbf{x}, s) \quad (3.178)$$

$$\hat{q}(\mathbf{x}, s) = \hat{q}(\mathbf{x}, s) \quad (3.179)$$

$$\hat{q}(\mathbf{x}, s) = \hat{h}(\hat{T} - \hat{T}_a) \quad (3.180)$$

時間依存の任意の関数形で与えられる境界条件のLaplace変換は、次のように数値的に取り扱う。任意関数 $f(t)$ で境界条件が与えられるとき、この境界条件に対するLaplace変換後の像関数 $F(s)$ は、次式のように書き表すことができる⁽⁴⁶⁾⁽⁴⁷⁾。

$$F(s) = \frac{f(0)}{s} \{1 - \exp(-\tau s)\} + \frac{\{1 - \exp(-2\tau s)\}}{s} \sum_{n=1}^{\infty} f(2n\tau) \exp\{-(2n-1)\tau s\} \quad (3.181)$$

ここでは、上式における無限級数の計算においては、級数の和の絶対値の変化量が基準値よりも小さくなるまで和を取るものとして、打ち切り項数を決定した。なお、任意の関数 $f(t)$ には境界値を近似したB-スプライン関数⁽¹¹⁾⁽¹²⁾を用いる。

$T_0(\mathbf{x})$ が領域内で一定である場合について考察する。ここで、次の量を考える。

$$\Theta(\mathbf{x}, t) = T(\mathbf{x}, t) - T_0 \quad (3.182)$$

ただし、

$$T_0 = T_0(\mathbf{x}) \quad (3.183)$$

式(3.182)をLaplace変換すると次のようになる。

$$\hat{T}(\mathbf{x}, s) = \hat{\Theta}(\mathbf{x}, s) + \frac{1}{s} \hat{T}_0 \quad (3.184)$$

式(3.184)を式(3.177)に代入して整理すれば次のようになる。

$$\nabla^2 \hat{\Theta}(\mathbf{x}, s) - \frac{s}{\kappa} \hat{\Theta}(\mathbf{x}, s) = 0 \quad (3.185)$$

式(3.185)が[§], Laplace変換空間での支配微分方程式となる.

3.7.2 境界積分方程式の導出

式(3.185)を境界要素法で解くために, 均一の熱物性値を持つ媒質からなる無限領域中で次式を満足する基本解 $T^*(x, y)$ を用いる.

$$\nabla^2 T^*(x, y) - \frac{s}{\kappa} T^*(x, y) + \delta(x - y) = 0 \quad (3.186)$$

ただし, y はソース点の座標を表し, $\delta(\cdot)$ はDiracのデルタ関数である. 上式で定義される基本解は, 2次元領域については次のようになる⁽³⁷⁾⁽³⁹⁾⁽⁴²⁾.

$$T^*(x, y) = \frac{1}{2\pi} K_0\left(\sqrt{\frac{s}{\kappa}} r\right) \quad (3.187)$$

ここで, r は2点 x, y 間の距離を表し, K_ν は ν 次の第2種変形Bessel関数を表す.

境界要素法の定式化は, 基本解(3.187)を式(3.185)の両辺にかけ, これを領域 Ω 全体について積分した次の恒等式から出発する.

$$\int_{\Omega} \left\{ \nabla^2 \hat{\Theta}(x) - \frac{s}{\kappa} \hat{\Theta}(x) \right\} T^*(x, y) d\Omega(x) = 0 \quad (3.188)$$

ただし, 上式では関数の引数 s は省略している.

上式にGaussの発散定理を2回適用し, Diracのデルタ関数の性質を利用すれば, 次の積分方程式が導かれる.

$$\hat{\Theta}(y) + \int_{\Gamma} \frac{\partial T^*(x, y)}{\partial n} \hat{\Theta}(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} T^*(x, y) \frac{\partial \hat{\Theta}(x)}{\partial n} d\Gamma(x), \quad x \in \Gamma, \quad y \in \Omega \quad (3.189)$$

式(3.189)を次のように変形する.

$$\hat{\Theta}(y) + \int_{\Gamma} \frac{\partial T^*(x, y)}{\partial n} \hat{\Theta}(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} \frac{1}{\lambda} T^*(x, y) \left\{ -\lambda \frac{\partial \hat{\Theta}(x)}{\partial n} \right\} d\Gamma(x), \quad x \in \Gamma, \quad y \in \Omega \quad (3.190)$$

式(3.190)において基本解を次のように書き換える.

$$U^*(x, y) = \frac{1}{-\lambda} T^*(x, y) = \frac{-1}{2\pi\lambda} K_0\left(\sqrt{\frac{s}{\kappa}} r\right) \quad (3.191)$$

$$q^*(x, y) = \frac{\partial T^*(x, y)}{\partial n} - \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{s}{\kappa}} K_1\left(\sqrt{\frac{s}{\kappa}} r\right) \frac{\partial r}{\partial n} \quad (3.192)$$

これらの関係を用いて、式(3.190)は次のような積分方程式になる。

$$\hat{\Theta}(y) + \int_{\Gamma} q^*(x, y) \hat{\Theta}(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U^*(x, y) \hat{q}(x) d\Gamma(x), \quad x \in \Gamma, \quad y \in \Omega \quad (3.193)$$

$\hat{q}(x)$ はLaplace変換空間での熱流束成分を表しており、次式の関係がある。

$$\hat{q}(x) = -\lambda \frac{\partial \hat{\Theta}(x)}{\partial n} \quad (3.194)$$

ここで、式(3.193)の特異性をキャンセルするために、次のようなLaplace方程式の基本解を導入する。

$$Q^*(x, y) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (3.195)$$

式(3.194)を用いて式(3.193)を変形すると、次のような正則化された積分方程式が導かれる。

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} q^*(x, y) \{\hat{\Theta}(x) - \hat{\Theta}(y)\} d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} \{q^*(x, y) - Q^*(x, y)\} d\Gamma(x) \hat{\Theta}(y) \\ = \int_{\Gamma} U^*(x, y) \hat{q}(x) d\Gamma(x), \quad x \in \Gamma, \quad y \in \Omega \end{aligned} \quad (3.196)$$

3.7.3 境界積分方程式の離散化

式(3.196)を、2次アイソパラメトリック境界要素を用いて離散化し、 s に対応する境界条件を適用すると、次のような代数方程式が導かれる。

$$[A(s)]\{X(s)\} = \{B(s)\} \quad (3.197)$$

離散化については動弾性問題の解析の場合と同じであり、付録Aで説明する。

上式で、 $\{X(s)\}$ は未知節点量を集めたベクトル、 $[A(s)]$ はその係数マトリックスを表し、 $\{B(s)\}$ は既知節点量を集めたベクトルと、その係数マトリックスをかけて得られるベクトルである。式(3.197)を解くことにより、Laplace変換空間での境界上のすべての節点量を求めることができる。そして、得られたLaplace変換空間での諸量に数値Laplace逆変換を施すことにより、節点における時間依存の諸量を求めることができる。なお、このための数値Laplace逆変換についても動弾性問題の解析の場合と同じであり付録Bに示す。

3.7.4 内点温度の計算

領域内部の任意点 y のLaplace変換空間における温度 $\hat{\Theta}(y)$ は、式(3.196)を解いて境界上での温度と熱流束が得られた後、それらの値を用いて式(3.193)から求めることができる。ここで、式(3.193)から内点の温度は次のように書き表される⁽³⁷⁾。

$$\hat{\Theta}(y) = \int_{\Gamma} U^*(x, y) \hat{q}(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} q^*(x, y) \hat{\Theta}(x) d\Gamma(x) \quad (3.198)$$

式(3.198)は内点が境界のごく近傍にある場合、 r に関する特異性により積分の精度が悪化する。そこで、次のように変形する。

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}(y) = & \int_{\Gamma} U^*(x, y) \hat{q}(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} q^*(x, y) \{ \hat{\Theta}(x) - \hat{\Theta}^c(x) \} d\Gamma(x) \\ & - \int_{\Gamma} \{ q^*(x, y) - Q^*(x, y) \} \hat{\Theta}^c(x) d\Gamma(x) + \hat{\Theta}^c(x) \end{aligned} \quad (3.199)$$

ただし、 $\hat{\Theta}^c(x)$ は内点から最も近い境界上のある1点の温度である。式(3.199)の右辺第4項は、内部問題のときのみ付随する項である。上式に、離散化されている境界上の値を代入して解けば s に対する内点での温度が求められる。

3.8 まとめ

本章では、最適化手法またはフィルタアルゴリズムを用いた二つの逆解析手法について述べた。二つの手法とも測定データに基づき、開発済みの順解析プログラムを利用して逆解析を行うものである。最適化手法には汎用的なアルゴリズムである共役勾配法を採用した。また、測定誤差の確率論的扱いが可能であり、誤差の影響を考慮できる特徴をもつ拡張カルマンフィルタアルゴリズムを用いた。

逆解析では用いる情報が有効な解を得るために重要であり、ここでは情報の量と質に関する取扱い方法を述べた。

数値解析を行うには対象の数値モデルを設定する必要があるが、未知量を仮定して妥当なモデルを設定することは困難である。このため、遺伝的アルゴリズムを適用した。遺伝的アルゴリズムを用いてモデルパラメータを設定する方法を述べ、複数欠陥を同定する問題への適用方法について述べた。

現象の高精度な解析が要求されるため、数値解析手法には境界要素法を採用した。境界要素法では境界上の離散化だけで高精度な解を得ることができる。また、欠陥同定逆解析のように要素再分割を行う必要がある場合には、有限要素法などの領域型解法に比較して非常に有利となる。最後に、動弾性問題および非定常熱伝導問題の境界要素解析法についてまとめた。ここに示した解析理論に基づき、2次元定常動弾性問題に対する一定要素を用いた境界要素解析プログラムおよび2次アイソパラメトリック要素を用いた境界要素解析プログラム、3次元定常動弾性問題に対する9節点Lagrange 4辺形要素を用いた境界要素解析プログラム、2次元非定常動弾性問題に対する2次アイソパラメトリック要素を用いた境界要素解析プログラムおよび非定常熱伝導問題に対する2次アイソパラメトリック要素を用いた境界要素解析プログラムを開発した。なお、これらの数値解析プログラムの精度チェックに関しては文献(53)から文献(57)に示されている。

以上に基づき、境界要素順解析プログラムを組み込んだ一連の逆解析プログラムを開発した。これらにより動弾性逆問題および非定常熱伝導逆問題それぞれに対して、2種類の逆解析が行える。また、遺伝的アルゴリズムを用いた逆解析プログラムも開発した。

第3章の参考文献

- (1) P.Y. Papalambros and D.J. Wilde, *Principles of Optimal Design*, (1988), Cambridge University Press.
- (2) 嘉納秀明, システムの最適理論と最適化, (1987), コロナ社.
- (3) 坂和正敏, 非線形システムの最適化, (1986), 森北出版.
- (4) S.S. Rao, *Optimization*, (1979), Halsted Press.
- (5) 今野 浩, 山下 浩, 非線形計画法, (1978), 日科技連.
- (6) R.L. Fox, *Optimization Methods for Engineering Design*, (1971), Addison-Wesley Publishing Co.
- (7) S.L.S. Jacoby, J.S. Kowalik and J.T. Pizzo(著), 関根智明(訳), 非線形最適化問題の反復解法, (1976), 培風館.
- (8) L.C.W. Dixon(著), 松原正一(訳), 非線形最適化計算法, (1974), 培風館.
- (9) コンピュータディスプレイによる形状処理工学 I, (1982), pp.151-187, 日刊工業新聞社.
- (10) コンピュータディスプレイによる形状処理工学 II, (1982), pp.69-177, 日刊工業新聞社.
- (11) 桜井 明(編), スプライン関数入門, (1981), 東京電気大学出版局.
- (12) 市田浩三, 吉本富士市, スプライン関数とその応用, (1979), 教育出版.
- (13) 森 正武, 曲線と曲面, (1980), 教育出版.
- (14) G. Nürnberger, *Approximation by Spline Functions*, (1989), Springer-Verlag.
- (15) R.E. Kalman, A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, **82D**, (1960), pp.35-45.
- (16) R.E. Kalman and R.S. Bucy, New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, **83D**, (1961), pp.95-108.
- (17) 星谷 勝, 斉藤悦朗, 建設技術者のためのデータ解析と応用ーカルマンフィルタを中心として, (1991), 鹿島出版会.
- (18) C.K. Chui and G. Chen, *Kalman Filtering with Real-Time Applications*, (1991), Springer-Verlag.
- (19) 中野道雄(監修), 西山 清(著), パソコンで解くカルマンフィルタ, (1993), 丸善.
- (20) 片山 徹, 応用カルマンフィルタ, (1989), 朝倉書店.
- (21) 村瀬治比古, 小山修平, 石田良平, パソコンによる計算力学順・逆解析入門,

- (1990), 森北出版.
- (22) 有本 卓, カルマン・フィルター, (1977), 産業図書.
- (23) 近藤次郎, カルマン・フィルター理論, オペレーションズ・リサーチ, **22**-11, (1977), pp.628-633.
- (24) T. Assefi, *Stochastic Processes and Estimation Theory with Applications*, (1979), John Wiley & Sons.
- (25) 阪上隆英, 久保司郎, 橋本 健, 山脇 弘, 大路清嗣, マルチ電流負荷方式を用いた電気ポテンシャルCT法による未知内部き裂の位置および傾斜角の測定, 日本機械学会論文集(A編), **53**-492, (1987), pp.1598-1606.
- (26) J.F. Crow(著), 木村資生, 太田朋子(訳), クロー遺伝学概説, (1992), 培風館.
- (27) J.F. Crow(著), 安田徳一(訳), 基礎集団遺伝学, (1989), 培風館.
- (28) 向井輝美, 集団遺伝学, (1989), 講談社サイエンティフィク.
- (29) N.S. Goel and N. Richter-Dyn(著), 寺本 英, 新田克己, 芦田 廣(訳), 生物学における確率過程の理論, (1978), 産業図書.
- (30) J.H. Holland, *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, (1992), MIT Press.
- (31) D.E. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*, (1989), Addison-Wesley Publishing Co.
- (32) 米澤保雄, 遺伝的アルゴリズム, (1993), 森北出版.
- (33) 北野宏明(編), 遺伝的アルゴリズム, (1993), 産業図書.
- (34) 日本機械学会, 遺伝的アルゴリズム(GA)とその設計問題への応用法, 講習会教材, No.930-43, (1993).
- (35) 日本機械学会, ジェネティックアルゴリズム(GA)の基礎と応用, 講習会教材, No.920-34, (1992).
- (36) 安居院 猛, 長尾智晴, ジェネティックアルゴリズム, (1992), 昭晃堂.
- (37) 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行, 境界要素法, (1991), 培風館.
- (38) G.D. Manolis and D.E. Beskos, *Boundary Element Methods in Elastodynamics*, (1989), pp.1-24, Unwin Hyman.
- (39) 境界要素法研究会(編), 境界要素法の理論と応用, (1986), コロナ社.
- (40) 中川克也, 北原道弘, 3次元非定常弾性波動問題の解析, 境界要素法論文集, **2**, (1985), pp.119-124.
- (41) S. Kobayashi, *Fundamentals of Boundary Integral Equation Methods in Elastodynamics, Topics in Boundary Element Research, Vol.2, Time-Dependent and Vibration Problems*, (1985), pp.1-54.
- (42) C.A. Brebbia, J.C.F. Telles and L.C. Wrobel(著), 田中正隆(訳), 境界要素解析—理論と応用, (1984), 丸善.
- (43) I.S. Sokolnikoff, *Mathematical Theory of Elasticity*, (1978), pp.56-90, Tata McGraw-Hill Publishing Co. Ltd.
- (44) 国尾 武, 固体力学の基礎, (1977), pp.92-93, 培風館.

- (45) J.D. Achenbach, *Wave Propagation in Elastic Solids*, (1973), pp.79-121, North-Holland Publishing Co.
- (46) 近藤次郎, ラプラス変換とその応用, (1977), 培風館.
- (47) 杉山昌平, ラプラス変換入門, (1978), 実教出版.
- (48) C.A. Brebbia and J. Dominguez(著), 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行(訳), 詳解境界要素法, (1993), オーム社.
- (49) F. Durbin, Numerical Inversion of Laplace Transforms : An Efficient Improvement to Dubner and Abate's Method, *Comput. J.*, **17**-4, (1974), pp.371-377.
- (50) 関 信弘(編), 伝熱工学, (1988), pp.1-41.
- (51) Y. Jaluria and K.E. Torrance, *Computational Heat Transfer*, (1986), pp.11-24, Hemisphere Publishing Co.
- (52) J.R. Welty, C.E. Wicks and R.E. Wilson, *Fundamentals of Momentum, Heat, and Mass Transfer*, (1976), pp.223-251, John Wiley & Sons.
- (53) 田中正隆, 中村正行, 青樹和彦, ラプラス変換境界要素法による非定常動弾性問題の解析精度に関する考察(二次元の場合), 日本機械学会論文集(C編), **57**-542, (1991), pp.3158-3163.
- (54) 田中正隆, 中村正行, 青樹和彦, 松本敏郎, ラプラス変換境界要素法による2次元非定常動弾性解析に関する考察, 境界要素法論文集, **8**, (1991), pp.69-74.
- (55) 中村正行, 田中正隆, 嘉数年倫, 境界要素法による3次元定常動弾性問題解析プログラム(BEMED3)の開発, BEM・テクノロジー・コンファレンス論文集, **1**, (1991), pp.63-66.
- (56) 石川尚男, カルマンフィルタと境界要素法を用いた非定常熱伝導問題解析とその応用, 信州大学修士学位論文, (1993), pp.15-32.
- (57) 塩崎 明, 非定常熱伝導問題の境界要素法解析と熱物性値同定への適用, 信州大学工学部卒業論文, (1992), pp.2-16.