

積分法による層流旋回流の理論解析

池田敏彦* 土屋良明** 堀越長次***

(昭和54年5月31日受理)

Theoretical Analysis of a Laminar Swirling Flow by Integral Method

Toshihiko IKEDA, Yosiaki TUTIYA and Tyozi HORIKOSI

The velocity and pressure profiles for an axisymmetric quasi-cylindrical viscous swirling flow are calculated by using integral method. When the swirl velocity is sufficiently large, the axial velocity near the axis is decelerated, and the flow has a stagnation point on the axis. On the other hand, the pressure on the axis is abruptly increased in the flow direction, while the wall pressure is decreased monotonously.

1 はじめに

周速度と軸速度がほぼ同じ大きさの管内層流旋回流において、流れにそったある位置で流れの構造が急激に変化する現象、いわゆる渦流崩壊現象がしばしば観察される。

この現象に関する実験報告は数多くなされており^{1)~8)}、崩壊を伴う流れの特徴として、旋回軸付近の軸速度の減速、軸上よどみ点および逆流域の存在等が知られている。一方、この流れの特性や原因を説明しようとする試みも数多く提案されている⁹⁾¹⁰⁾。それらの代表例を列挙すると

- i) 流体力学的不安定性モデル¹¹⁾¹²⁾
- ii) 有限遷移モデル^{13)~15)}
- iii) ナビエ・ストークス方程式の数値計算¹⁶⁾¹⁷⁾、あるいはその方程式を準円筒流近似した式の数値計算¹⁸⁾¹⁹⁾

である。

本研究は iii) の立場 (ナビエ・ストークス方程式を準円筒流近似した運動方程式の計算) で、崩壊流れの特徴である軸付近の軸速度の減速、軸上よどみ点の存在を説明しようとする一試みの報告であり、Kármán-Pohlhausen の境界層計算法に類似な積分モーメント法を適用し、管口での初期分布を系統的に変えて、流れ方向の速度および圧力分布を求めた。従来の階差法を用いた計算¹⁸⁾と比較して、積分モーメント法を用いた場合、計算時間が短

* 機械工学教室 助手
** 機械工学教室 講師
*** 機械工学教室 教授

かく、小容量の計算機で計算の実行が可能である。

2 基礎方程式

円柱座標 x, r, θ 、速度成分 u, v, w 、圧力 p を用いて (図 1)、定常、軸対称な非圧縮、粘性流体に対する連続の式およびナビエ・ストークス方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{w^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \quad (3)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{vw}{r} = \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (4)$$

である。ここで、 $v/u \sim 0(\delta)$ 、 $w/u \sim 0(1)$ として準円筒流近似を行うと、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \quad (5)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (6)$$

$$\frac{w^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (7)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{vw}{r} = \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2} \right) \quad (8)$$

となる。

次に以下の無次元数

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{x}{R \cdot Re}, & Y &= \left(\frac{r}{R} \right)^2 = \eta^2, & P &= \frac{p}{\frac{1}{2} \rho \bar{u}^2} \\ U &= \frac{u}{\bar{u}}, & V &= \frac{Re \cdot v}{\bar{u}}, & W &= \frac{w}{\bar{u}} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

但し、 R : 管半径、 \bar{u} : 平均軸速度、 Re : レイノルズ数 ($= \bar{u}R/\nu$) で無次元化し、

$$J = 2V\eta, \quad K = W\eta \quad (10)$$

とにおいて変数変換すると、式(5)~(8)は

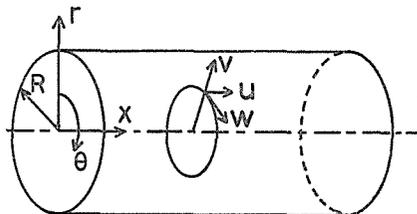


Fig. 1 Cylindrical coordinates and velocity components

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial J}{\partial Y} = 0 \quad (11)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + J \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial X} + 4 \frac{\partial}{\partial Y} \left(Y \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \quad (12)$$

$$\frac{K^2}{Y^2} = \frac{\partial P}{\partial Y} \quad (13)$$

$$U \frac{\partial K}{\partial X} + J \frac{\partial K}{\partial Y} = 4Y \frac{\partial^2 K}{\partial Y^2} \quad (14)$$

となる。一方、境界および初期条件は

$$\text{i) 中心 } (Y=0) : K=J=\frac{\partial U}{\partial \eta} = 0 \quad (15)$$

$$\text{ii) 管壁 } (Y=1) : U=J=K=0 \quad (16)$$

$$\text{iii) 管口 } (X=0) : K=K_i(Y), U=U_i(Y), P=P_i(Y) \quad (17)$$

である。問題は条件式(15)～(17)のもとで、式(11)～(14)の未知数 U, J, K, P を求めることである。

3 積分モーメント法の適用

積分モーメント法による近似解を求めるために、境界条件を考慮して軸速度 U 、周速度 W を

$$U(X, Y) = (1 - Y)(U_0 + U_1 Y + U_2 Y^2) \quad (18)$$

$$K(X, Y) = W\eta = \frac{\Gamma A Y (1 - Y)}{\sqrt{1 + A^2 Y^2}} \quad (19)$$

とおく。ここで、 U_0, U_1, U_2, A は X の関数であり、 Γ は旋回強さを表わす定パラメータである。式(18)で、 U_0 は軸上軸速度を表わし、 $U_1 = U_2 = 0, U_0 = 2$ のときポアズィユ流になる。式(19)で、 $\eta \rightarrow 0$ のとき $W \propto \Gamma A \eta$ となり、軸付近で剛体回転(強制渦)を示す分布である。半径方向速度 V 、圧力 P は式(11)(13)に式(18)(19)を代入して積分すると求まる。

$$\begin{aligned} J(X, Y) = 2V\eta = -\int_0^Y \frac{\partial U}{\partial X} dY &= \frac{1}{4} \frac{dU_2}{dX} Y^4 - \frac{1}{3} \left(\frac{dU_2}{dX} - \frac{dU_1}{dX} \right) Y^3 \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{dU_1}{dX} - \frac{dU_0}{dX} \right) Y^2 - \frac{dU_0}{dX} Y, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} P(X, Y) = P_0(X) + \int_0^Y \frac{K^2}{Y^2} dY &= P_0(X) + \Gamma^2 \left\{ Y - \ln(1 + A^2 Y^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{A^2 - 1}{A} \tan^{-1}(AY) \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、 $P_0(X)$ は軸上の圧力であり、速度 U , V , W および圧力 P は断面 X における U_0 , U_1 , U_2 , A および P_0 の値が決定されると求まる。

これらの未知数を求めるために、以下の五つの条件式

$$\frac{d}{dX} \int_0^1 U dY = 0 \quad \text{あるいは} \quad [J]_{Y=1} = 0 \quad (22)$$

$$\left[U \frac{\partial U}{\partial X} + J \frac{\partial U}{\partial Y} \right]_{Y=0} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial P}{\partial X} \right]_{Y=0} + 4 \left[\frac{\partial}{\partial Y} \left(Y \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right]_{Y=0} \quad (23)$$

$$\left[U \frac{\partial U}{\partial X} + J \frac{\partial U}{\partial Y} \right]_{Y=1} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial P}{\partial X} \right]_{Y=1} + 4 \left[\frac{\partial}{\partial Y} \left(Y \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right]_{Y=1} \quad (24)$$

$$\frac{d}{dX} \int_0^1 \left(U^2 + \frac{P}{2} \right) dY = 4 \left[Y \frac{\partial U}{\partial Y} \right]_0^1 \quad (\text{式(12)の0次モーメント}) \quad (25)$$

$$\frac{d}{dX} \int_0^1 UK dY = 4 \left[Y \frac{\partial K}{\partial Y} \right]_0^1 \quad (\text{式(14)の0次モーメント}) \quad (26)$$

を用いる。式(18)~(21)を式(22)~(26)に代入して整理すると、 X に関する連立常微分方程式

$$\frac{dU_2}{dX} + 2 \frac{dU_1}{dX} + 6 \frac{dU_0}{dX} = 0 \quad (27)$$

$$U_0 \frac{dU_0}{dX} + \frac{1}{2} \frac{dP_0}{dX} + 4(U_1 - U_0) = 0 \quad (28)$$

$$\frac{dP_0}{dX} + \Gamma^2 H(A) \frac{dA}{dX} + 8(5U_2 + 3U_1 + U_0) = 0 \quad (29)$$

$$\begin{aligned} G_1(U_0, U_1, U_2) \frac{dU_2}{dX} + G_2(U_0, U_1, U_2) \frac{dU_1}{dX} + G_3(U_0, U_1, U_2) \frac{dU_0}{dX} \\ + \frac{\Gamma^2}{2} G_4(A) \frac{dA}{dX} + \frac{1}{2} \frac{dP_0}{dX} + 4(U_0 + U_1 + U_2) = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} F_1(A) \frac{dU_2}{dX} + F_2(A) \frac{dU_1}{dX} + F_3(A) \frac{dU_0}{dX} + F_4(U_0, U_1, U_2, A) \frac{dA}{dX} \\ + \frac{4A}{\sqrt{1+A^2}} = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

を得る。ここで、

$$\begin{aligned} H(A) &= \left(1 + \frac{1}{A^2} \right) \tan^{-1} A - \frac{1}{A}, \quad G_1(U_0, U_1, U_2) = \frac{2U_2^2}{105} + \frac{U_1}{30} \\ &+ \frac{U_0}{15}, \quad G_2(U_0, U_1, U_2) = \frac{U_2}{30} + \frac{U_1}{15} + \frac{U_0}{6}, \quad G_3(U_0, U_1, U_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{U_2}{15} + \frac{U_1}{6} + \frac{2U_0}{3}, \quad G_4(A) = \left(1 + \frac{3}{A^2}\right) \tan^{-1} A - \frac{1}{A^3} \ln(1 + A^2) \\
&- \frac{2}{A}, \quad F_1(A) = \frac{2}{3A^3} - \frac{8}{15A^5} + \sqrt{1 + A^2} \left(\frac{1}{30A} - \frac{11}{60A^3} + \frac{8}{15A^5} \right) \\
&- \frac{3}{4A^4} \ln(A + \sqrt{1 + A^2}), \quad F_2(A) = -\frac{4}{3A^3} + \sqrt{1 + A^2} \left(\frac{1}{12A} + \frac{23}{24A^3} \right) \\
&+ \left(\frac{3}{8A^4} - \frac{1}{2A^2} \right) \ln(A + \sqrt{1 + A^2}), \quad F_3(A) = \frac{2}{3A^3} - \frac{1}{A} + \sqrt{1 + A^2} \\
&\left(\frac{1}{3A} - \frac{2}{3A^3} \right) + \frac{1}{A^2} \ln(A + \sqrt{1 + A^2}), \quad F_4(U_0, U_1, U_2, A) \\
&= U_2 \left(\frac{8}{3A^6} - \frac{2}{A^4} \right) + \frac{4U_1}{A^4} + U_0 \left(\frac{1}{A^2} - \frac{2}{A^4} \right) + \sqrt{1 + A^2} \left\{ U_2 \left(-\frac{1}{30A^2} \right. \right. \\
&+ \left. \frac{11}{20A^4} - \frac{8}{3A^6} \right) - U_1 \left(\frac{1}{12A^2} + \frac{33}{8A^4} \right) + U_0 \left(\frac{2}{A^4} - \frac{1}{3A^2} \right) \left. \right\} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{1 + A^2}} \left\{ U_2 \left(\frac{1}{30} - \frac{11}{60A^2} + \frac{13}{60A^4} \right) + U_1 \left(\frac{1}{12} + \frac{11}{24A^2} + \frac{3}{8A^4} \right) \right. \\
&+ \left. U_0 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3A^2} \right) \right\} + \ln(A + \sqrt{1 + A^2}) \left\{ \frac{3U_2}{A^5} + U_1 \left(\frac{1}{A^3} - \frac{3}{2A^5} \right) \right. \\
&\left. - \frac{2U_0}{A^3} \right\} \tag{32}
\end{aligned}$$

である。

とくに、流れが周速度成分を持たないとき ($A \equiv 0$), 式(27)~(31)は

$$\begin{aligned}
\frac{dU_2}{dX} + 2\frac{dU_1}{dX} + 6\frac{dU_0}{dX} &= 0 \\
U_0 \frac{dU_0}{dX} + \frac{1}{2} \frac{dP_0}{dX} + 4(U_1 - U_0) &= 0 \\
\frac{dP_0}{dX} + 8(5U_2 + 3U_1 + U_0) &= 0 \tag{33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_1(U_0, U_1, U_2) \frac{dU_2}{dX} + G_2(U_0, U_1, U_2) \frac{dU_1}{dX} + G_3(U_0, U_1, U_2) \frac{dU_0}{dX} \\
+ \frac{1}{2} \frac{dP_0}{dX} + 4(U_0 + U_1 + U_2) &= 0 \tag{34}
\end{aligned}$$

になる。ここで、係数 G_1, G_2, G_3 は式(32)と同じである。

4 初期分布

図2に初期軸速度 $U_i(Y)$ と周速度 $W_i(Y)$ の分布を示す. $U_i(Y)$ は軸中心部で最も一様流に近い条件, $[\partial U/\partial Y]_{Y=0} = [\partial^2 U/\partial Y^2]_{Y=0} = 0$, および連続の条件 $\int_0^1 U dY = 1$ から, $U_{2i} = U_{1i} = U_{0i} = 4/3$ すなわち

$$U_i(Y) = \frac{4}{3}(1 - Y^3) = \frac{4}{3}(1 - \eta^6) \tag{35}$$

とした. 一方, $W_i(Y)$ は Γ と A の組合せにより, 渦コアの大きさ η_{mi} , 最大周速度 W_{mi} を任意に与えることができる. 表1に Γ と A に対する η_{mi} と W_{mi} の関係を抜すいして示した. なお, 初期軸上圧力 $P_0(0) = 0$ とおいた.

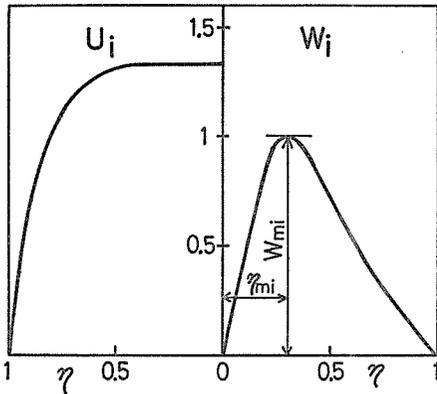


Fig. 2 Initial velocity profiles

Table 1 Initial values of vortex core radius η_{mi} and maximum swirl velocity W_{mi} vs. A and Γ

η_{mi}	0.1	0.2	0.3	0.4
A	98,000	22,997	9,093	4,185
W_{mi}				
0.5	$\Gamma=0.072$	0.154	0.260	0.430
1.0	0.144	0.308	0.521	0.856
1.5	0.216	0.462	0.781	1.284
2.0	0.289	0.615	1.041	1.712
2.5	0.361	0.769	1.301	2.140
3.0	0.433	0.923	1.562	2.568

5 計算結果

式(27)~(34)の計算はルンゲ・クッタ・ジルの方法で実行した. 図3は周成分のない場合 ($A \equiv 0$), 式(35)の初期軸速度で出発したときのいろいろな断面における軸速度 U の分布である. 中心軸付近の速度はしだいに加速されて, $X \rightarrow \infty$ で $U_0 \rightarrow 2$ すなわちポアズ

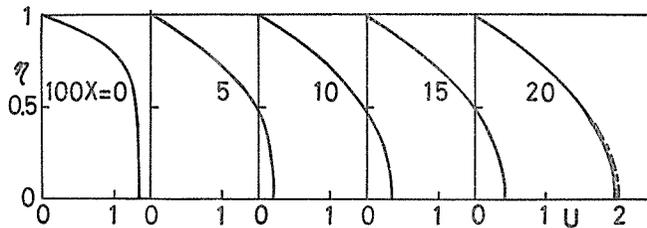


Fig. 3 Axial velocity profile with non swirl

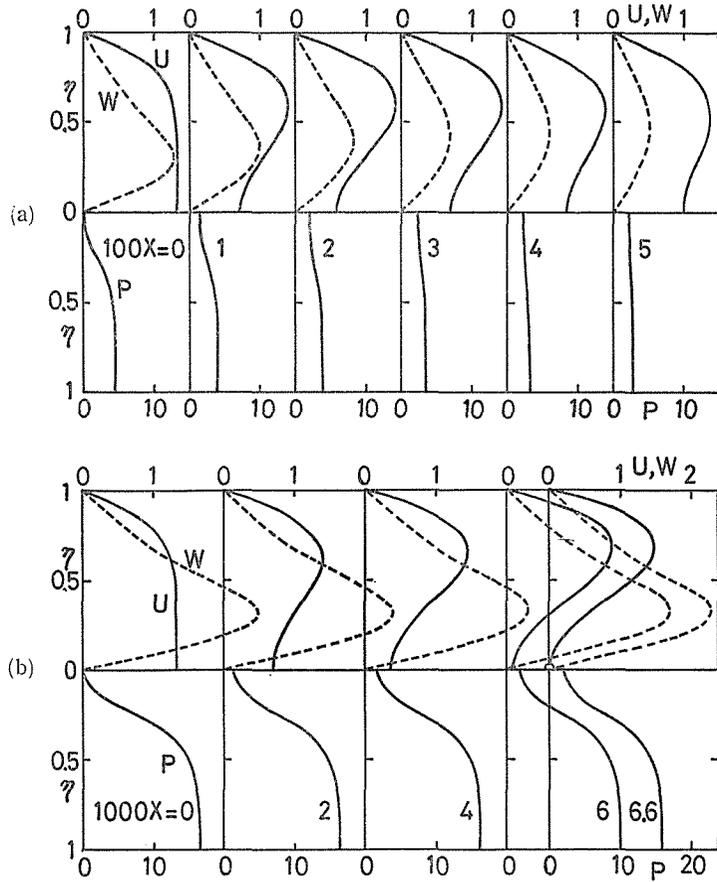


Fig. 4 Velocity and pressure profiles

- (a) $U_{2i} = U_{1i} = U_{0i} = 4/3, \eta_{mi} = 0.3, W_{mi} = 1.3$
- (b) $U_{2i} = U_{1i} = U_{0i} = 4/3, \eta_{mi} = 0.3, W_{mi} = 2.5$

ポアズイユ流（図中で一点鎖線で示した分布）に漸近する。図4(a)(b)に、初期軸速度式(35)、初期渦コアの大きさ $\eta_{mi} = 0.3, P_0(0) = 0$ に固定し、初期最大周速度 W_{mi} を変えた場合のいろいろな断面における U, W および P の分布を示す。図(a)は $W_{mi} = 1.3$ の場合である。 U の分布（図中の実線）において、軸付近で最初流れは減速されるが、ある位置から加速されて、図3と同様に、 $X \rightarrow \infty$ で $U_0 \rightarrow 2$ （ポアズイユ流）に漸近する。一方、周速度 W （図中の破線）は X の増加と共に減衰する。圧力 P の分布において、軸中心と管壁との圧力差が W の減衰と共に小さくなり、やがて半径方向 r に対して一定となる。図(b)は $W_{mi} = 2.5$ の場合であり、 U は軸付近でしだいに減速され、 $X = 6.6 \times 10^{-3}$ において軸上に“よどみ点”を持つ。この軸上よどみ点の出現は渦流崩壊現象との関連で興味深い。

このように、軸上軸速度 U_0 の変化が最も重要な特徴量であるので、図5(a)(b)に $\eta_{mi} = 0.3, 0.2$ にそれぞれ固定し、 W_{mi} をいろいろ変化させた場合の U_0 の変化を示す。図(a)で、 $W_{mi} = 0$ は周速度成分がないときであり ($A \equiv 0$)、図3でみられたように、 U_0 は

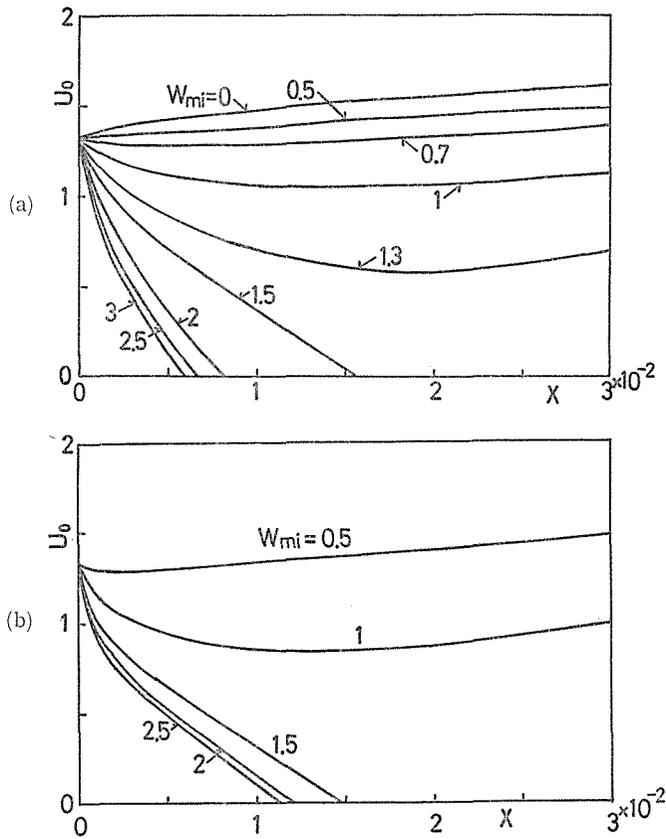


Fig. 5 Axial velocity distribution on the axis

(a) $U_{2i} = U_{1i} = U_{0i} = 4/3, \eta_{mi} = 0.3$

(b) $U_{2i} = U_{1i} = U_{0i} = 4/3, \eta_{mi} = 0.2$

しだいに増加し $X \rightarrow \infty$ でポアズイユ流に漸近する。 W_{mi} の値が大きくなるにつれて、 U_0 は最初減速されるが、ある位置から加速される場合 ($W_{mi} = 0.7, 1.0, 1.3$) と、減速しついによどみ点に達する場合 ($W_{mi} > 1.5$) がある。この軸上よどみ点の位置は W_{mi} の増加と伴に上流に移る。図 (b) の $\eta_{mi} = 0.2$ に対しても図 (a) と同じことが言える。これらの結果は、旋回が強くなるほど軸付近の減速が著しく、上流でよどみ点を持つという実験結果と定性的に一致している。

図 6 (a) (b) は $U_{2i} = U_{1i} = U_{0i} = 4/3$, $\eta_{mi} = 0.3, 0.2$ にそれぞれ固定し、 W_{mi} を系統的に変えた場合の軸上圧力 P_0 の分布を示している。図 (a) は $\eta_{mi} = 0.3$ の場合であり、 W_{mi} の値が小さいとき、 X 方向に圧力は降下するが、その値が大きくなるにつれて、圧力は上昇し、その勾配も大きくなる。図中の○印は U_0 がよどみ点を持つときの圧力に対応する。なお、図中の破線はポアズイユ流のときの圧力を示す。図 (b) は $\eta_{mi} = 0.2$ の場合であり、図 (a) と同じ傾向を示している。図中の破線は壁圧 P_1 の分布を表わす。図から、 U_0 がよどみ点を持つ場合において、 P_1 はしだいに降下するが、 P_0 は上昇している

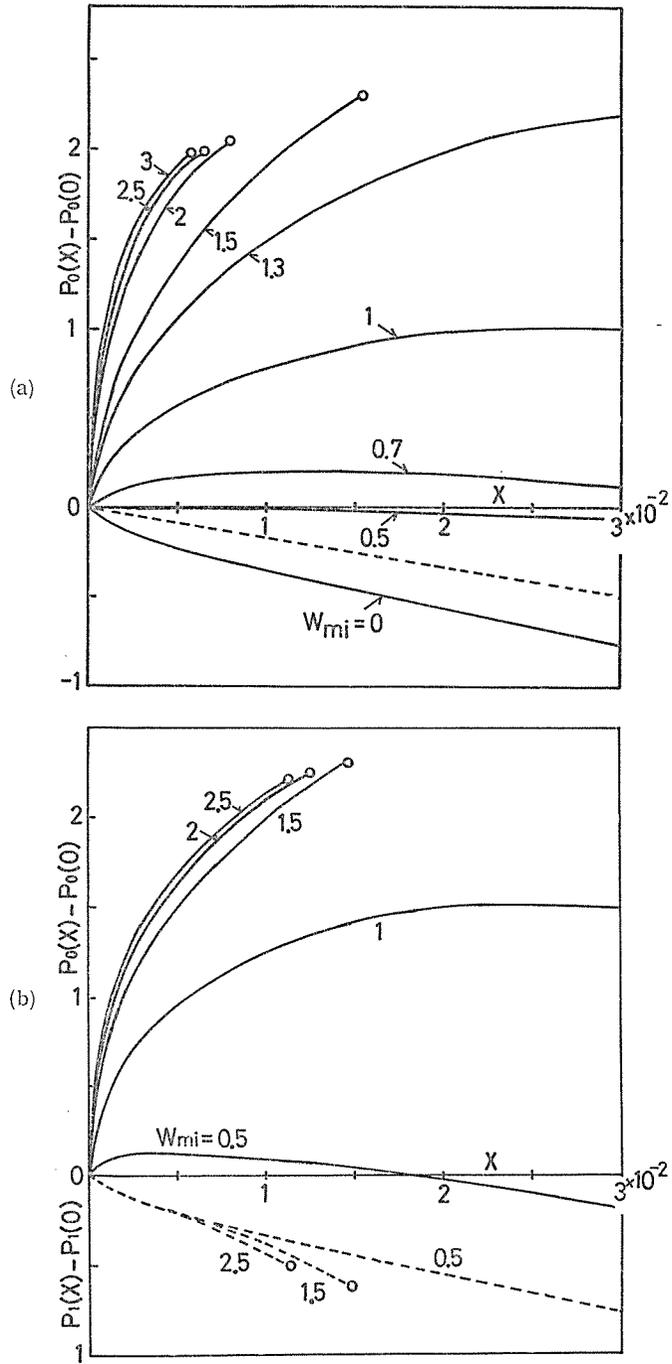


Fig. 6 Pressure distribution on the axis

- (a) $U_{2i} = U_{1i} = U_{0i} = 4/3, \eta_{mi} = 0.3$
- (b) $U_{2i} = U_{1i} = U_{0i} = 4/3, \eta_{mi} = 0.2$

ことがわかる。

6 結 論

ナビエ・ストークス方程式に準円筒流近似を行ない、積分モーメント法を用いて速度および圧力分布を求めた。この結果、周速度が大きくなると軸付近の軸速度が減速されて、軸上でよどみ点を持つ。一方、軸上でよどみ点を持つ流れにおいて、壁圧は流れ方向に下降するが、軸上圧力は上昇する。

最後に、本研究に対して懇切なる御指導を賜った電気通信大学、大路通雄教授に厚く感謝の意を表わします。また、数値計算に協力いただいた信州大学院生、森田雅之君に感謝します。なお、本研究は長野高専、倉沢英夫助手との協同研究の一部であること、および科学研究費の助力のもとで行ったものであることを付記します。

計算は信州大学計算機センターを通じて、東京大学大型計算機センター (HITAC 8800/8700) を利用して行った。

文 献

- 1) T. Sarpkaya, : On stationary and travelling vortex breakdown, J. Fluid Mech., Vol. 45 (1971), p.545.
- 2) T. Sarpkaya, : Vortex breakdown in swirling conical flows, J. AIAA, Vol.9 (1972), p.1792.
- 3) T. Sarpkaya, : Effect of the adverse pressure gradient on vortex breakdown, J. AIAA, Vol.12 (1974), p.602.
- 4) J. H. Falar & S. Leibovich, : Disrupted states of vortex flow and vortex breakdown, Phys. Fluid, Vol.20 (1977), p.1385.
- 5) J. H. Falar & S. Leibovich, : An experimental map of the internal structure of a vortex breakdown, J. Fluid Mech., Vol.86 (1978), p.313.
- 6) 白井俊一 : 円管内に作られた渦の Breakdown について, 日本航空宇宙学会誌, 20巻 (1972), p.38
- 7) 中村佳朗, 坪井淳, 末広文雄, 中村治夫, 内田茂男 : レーザ流速計による管内旋回流の崩壊に関する実験, 第8回流体力学講演会講演集 (1976), p.38
- 8) 池田敏彦, 坂田光雄, 寺嶋美樹, 渋沢正中, 大路通雄 : 油滴トレーサ法による崩壊を伴う管内旋回流の速度分布の測定, 第3回流れの可視化シンポジウム講演集 (1975), p.75
- 9) M. G. Hall, : Vortex breakdown, Ann. Rev. Fluid Mech., Vol.4 (1972), p.195.
- 10) S. Leibovich, : The structure of vortex breakdown, Ann. Rev. Fluid Mech., Vol.10 (1978), p.221.
- 11) H. Ludwieg, : Zur Erklärung der Instabilität der über angestellten Deltaflügeln auftretenden freien Wirbelkerne, Z. Flugwiss. 10 (1962), p.242.
- 12) H. Ludwieg, : Erklärung des Wirbelaufplatzens mit Hilfe der Stabilitätstheorie für Strömungen mit schraubenlinienförmigen Stromlinien, Z. Flugwiss.13 (1965), p.437.
- 13) T. B. Benjamin, : Theory of the vortex breakdown phenomenon, J Fluid Mech., Vol. 14 (1962), p.593.
- 14) T. B. Benjamin, : Significance of the vortex breakdown phenomenon, J. Basic Eng.,

- Trans ASME, Vol.87 (1965), p.518.
- 15) T. B. Benjamin, : Some developments in the theory of vortex breakdown, J. Fluid Mech., Vol.28 (1967), p.65.
 - 16) W. J. Grabowski & S. A. Berger, : Solutions of the Navier-Stokes equations for vortex breakdown, J. Fluid Mech., Vol.75 (1976), p.525.
 - 17) 中村佳朗, 末広文雄, 内田茂男 : 崩壊渦を含む旋回流の数値計算, 第9回流体力学講演会講演集 (1977), p.6
 - 18) M. G. Hall, : A new approach to vortex breakdown, Proc. Heat Transfer Fluid Mech. Inst. (1967), p.319.
 - 19) H. Bossel, : Vortex computation by the method of weighted residuals using exponentials, J. AIAA., Vol.9 (1971), p.2027.