

# 圧電性弾性結晶体における Hooke の法則

中 沢 光 男\*

(昭和48年5月31日受理)

## §1. ま え が き

圧電性弾性結晶体内の弾性振動の解析には、(i)純弾性的な Hooke の法則を基本にして運動の方程式を解く場合と、(ii)厳密には、圧電的復元応力の効果まで考えて運動方程式を解く場合の二通りの方法がある。(i)については、特に厚み振動に関する Koga<sup>1)</sup> の優れた研究がある。(ii)については、Cady<sup>2)</sup>, Koga & Aruga<sup>3)</sup> 流の考え方と、Lawson<sup>4)</sup>, Landau & Lifshitz<sup>5)</sup>, Tiersten<sup>6)</sup>, Onoe<sup>7)</sup> 流の考え方とがある。(ii)の前者の考え方は、振動モードの物理的意味を捉えて理論を展開しているので、基本的問題について参考になるところが多い。一般的に云えば、(ii)については、いずれも圧電的復元応力の発生のメカニズムに関しては必ずしも十分明快な説明を与えているとは思えない。本研究は、この点について深く留意して、さらに、Cady, Koga & Aruga 流の思想を汲みつつ理論を展開するよう心がけた。著者の以前に発表した論文<sup>8)</sup>の一部に、特に振動(厚み振動)に寄与する圧電効果の有効分の考え方について十分でなかった点があったので、本研究ではこの点をさらに改善する。著者の考え方に従えば、結局圧電基本式から形式的に誘導される結果(実は、(ii)の後者の場合であるがこの流儀の中での「仮定」の取り扱いが不十分と思われる)と一致する。

## §2. 圧電効果の弾性定数へのくりこみ

まず、圧電気ならびに弾性応力等に関する符号の規約は、Koga の用いたものに従う。また単位系は c. g. s. e. s. u. 系とする。

Fig. 1 のように、圧電性弾性結晶体内部に、(O-x, y, z) 直交座標系を定め、輪郭寸法に比べ、厚みの非常に薄い無限平行板を考える。結晶板面の単位法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  とし、これに平行に一樣な外部電場  $\mathbf{E}$  を印加する。このとき結晶板内には、圧電気逆効果によって対応する歪み  $S_{kl}$  が発生する。すなわち、

$$S_{kl} = \sum_{i=1}^3 d_{ikl} E_i, \quad (k, l = 1, 2, 3). \quad (1)$$

ここに  $d_{ikl}$  は圧電率で、 $d_{ikl} = d_{ilk}$  である。この式(1)の  $S_{kl}$  は、結晶板内に電気分極  $\mathbf{P}$  を誘発する。

---

\* 電子工学教室 助教授

すなわち,

$$P_h = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{hkl} S_{kl}, \quad (h = 1, 2, 3). \quad (2)$$

こゝに  $\varepsilon_{hkl}$  は圧電定数と呼ばれ,  $\varepsilon_{hkl} = \varepsilon_{hlk}$  である.

結晶板が異方性の場合には,  $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{P}$  のベクトルは同一方向にはそろわない. また電気変位  $\mathbf{D}$  は,

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} \quad (3)$$

で定義されるので, 一般に  $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{D}$  のベクトルも同一方向にはならない. 誘発された  $\mathbf{P}$  に直接関係する  $\mathbf{D}$  は, 式 (3) で  $\mathbf{E} = 0$  として,

$$\mathbf{D} = 4\pi \mathbf{P} \quad (4)$$

となる. こゝで考えている結晶板に真電荷がないとすれば Gauss の定理から  $\mathbf{D}$  を打ち消す  $\mathbf{D}'$  なる電気変位が発生する. すなわち,

$$\mathbf{D}' = 4\pi(-\mathbf{P}). \quad (5)$$

いま  $\mathbf{E}$  によって, 結晶板内に厚み振動が発生している状態を考える. この場合, 厚み弾性振動に寄与する電気分極 ( $-\mathbf{P}$ ) の有効分を, 結晶板面に垂直な成分のみを考える. なんととなれば, 板は無限平行結晶板なので, ( $-\mathbf{P}$ ) の結晶板面に平行な成分は無視してもよい. 文献 (8) では, 特にこの点の考察を欠いていた. (しかし, 周波数温度係数の計算には, 文献 (3) の理論を適用したので誤りはない.) さて, 上述の有効分ベクトルを  $\mathbf{P}_\perp$  とすれば, その大きさは,

$$\begin{aligned} P_\perp &= \mathbf{n} \cdot (-\mathbf{P}) \\ &= - \sum_{h=1}^3 n_h P_h \end{aligned} \quad (6)$$

となる. この  $\mathbf{P}_\perp$  によって内部電場  $\mathbf{E}'$  が発生していると考えると, その成分  $E'_q$  は,

$$E'_q = 4\pi \sum_{j=1}^3 \gamma_{qj} P_\perp^{(j)}, \quad (q = 1, 2, 3) \quad (7)$$

となる. こゝに,  $\gamma_{qj}$  は歪み一定のときの逆電気感受率である. また,

$$P_\perp^{(j)} = n_j P_\perp, \quad (j = 1, 2, 3). \quad (8)$$

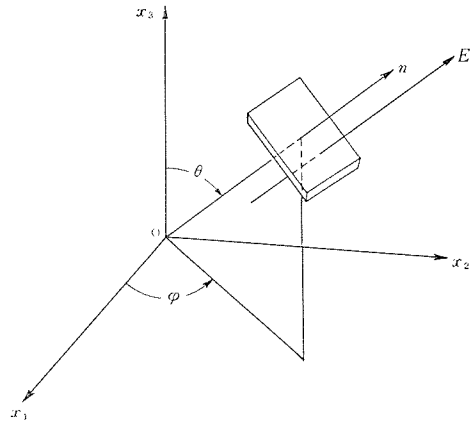


Fig. 1 無限平行平板 (厚みに比べて輪郭寸法が十分大きい結晶板) と印加電場  $\mathbf{E}$

結晶板が異方性であれば、 $\mathbf{P}_\perp$  と  $\mathbf{E}'$  とは平行にならない。(− $\mathbf{P}$ )の場合と同様に考えて、 $\mathbf{E}'$  の厚み振動に寄与する有効分ベクトルを  $\mathbf{E}_\perp$  として、その大きさを、

$$E_\perp = \sum_{q=1}^3 n_q E_q' \quad (9)$$

と仮定する。結局、結晶板内に圧電的に発生する復元応力  $T_{ij}^P$  は、

$$T_{ij}^P = \sum_{h=1}^3 \varepsilon_{hij} E_\perp^{(h)}, \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (10)$$

$$\text{ここに,} \quad E_\perp^{(h)} = n_h E_\perp, \quad (h = 1, 2, 3). \quad (11)$$

一方、純弾性的な Hooke 応力  $T_{ij}$  は周知の通り、

$$\left. \begin{aligned} T_{ij} &= \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 c_{ijkl}^E S_{kl}, \quad (i, j = 1, 2, 3), \\ S_{kl} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right), \quad (k, l = 1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

となる。 $c_{ijkl}^E$  は  $E = 0$  のときの弾性定数であり、 $u_k, u_l$  は変位成分で、さらに  $x_k, x_l$  は座標成分である。

したがって、式 (2) ならびに式 (6) ~ (12) の各式を用いて、圧電的に拡張されたアフィン空間での Hooke 応力  $T_{ij}^O$  は、

$$\begin{aligned} T_{ij}^O &= T_{ij} + T_{ij}^P \\ &= \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left\{ c_{ijkl}^E + 4\pi\gamma_n \left( \sum_{h=1}^3 \varepsilon_{hij} n_h \right) \left( \sum_{h=1}^3 n_h \varepsilon_{hkl} \right) \right\} S_{kl}, \\ &\quad (i, j = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (13)$$

となる。

$$\text{ただし,} \quad \gamma_n = \sum_{q=1}^3 \sum_{j=1}^3 \langle n_q \gamma_{qj} n_j \rangle. \quad (14)$$

なお、式 (13) の右辺の { } 中の第 2 項には、式 (1) と (12) における歪み  $S_{kl}$  の符号の定義が規約によって逆であるということを考慮してある。

式 (13) の右辺の { } 中の第 2 項が、弾性定数への圧電的くりこみ量と解釈される。

次に式 (14) を Koga & Aruga の水晶板の理論に適用すると次のようになる。すなわち、 $K_n$  を水晶板主面に垂直な方向の誘電率とすれば、

$$\gamma_n = \frac{1}{K_n} = (n_1^2 k_{11} + n_2^2 k_{22} + n_3^2 k_{33} + 2n_2 n_3 k_{23})$$

$$\begin{aligned}
& + 2n_3n_1k_{31} + 2n_1n_2k_{12})^{-1} \\
& = \{(k_{33} - k_{11})n_3^2 + k_{11}\}^{-1} \\
& \simeq (0.1n_3^2 + k_{11})^{-1} \\
& \simeq \frac{1}{k_{11}}
\end{aligned} \tag{15}$$

となる。ここで  $k_{ij}$  は歪み一定のときの水晶の誘電率テンソル成分であるが、これらは、

$$\left. \begin{aligned} k_{12} &= k_{21} = k_{13} = k_{31} = k_{23} = k_{32} = 0, \\ k_{11} &= k_{22} = 4.5, \\ k_{33} &= 4.6, \quad (\text{at } 20^\circ\text{C}) \end{aligned} \right\} \tag{16}$$

で与えられる。

### § 3. 圧電効果の弾性係数へのくりこみ

ここでは、圧電効果の弾性係数  $s^E_{ijkl}$  へのくりこみを考える。方法論においては § 2 の場合と同様である。すなわち、結晶板に印加する外部電場  $\mathbf{E}$  を Fig. 1 の通りとすれば、これによって板内に発生する応力  $T_{kl}$  は

$$T_{kl} = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ikl} E_i, \quad (k, l = 1, 2, 3) \tag{17}$$

となる。 $T_{kl}$  はさらに電気分極  $\mathbf{P}$  を誘発する。すなわち、

$$P_h = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 d_{hkl} T_{kl}, \quad (h = 1, 2, 3). \tag{18}$$

この  $\mathbf{P}$  が電気変位  $\mathbf{D}$  を生じる。これよりの物理的メカニズムは、§ 2 の場合と同様に考えて、式(5)から式(9)までの過程を経る。結局圧電効果によって生じた内部電界  $\mathbf{E}'$  の、結晶板の厚み方向成分  $E_{\perp}^{(h)}$  (厚み振動に寄与する内部電界の成分) が、圧電的内部歪み  $S^p_{ij}$  を発生させる源と考える。すなわち、

$$S^p_{ij} = \sum_{h=1}^3 d_{hij} E_{\perp}^{(h)}, \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{19}$$

となる。ここで  $E_{\perp}^{(h)}$  は式(11)で与えられる。

一方、純弾性的な Hooke 歪み  $S_{ij}$  を、弾性係数  $s^E_{ijkl}$  で記述すれば、

$$S_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 s^E_{ijkl} T_{kl}, \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{20}$$

となる。

故に、全歪み  $S^o_{ij}$  はアフィン空間で考えて、

$$S^0_{ij} = S^P_{ij} + S_{ij}. \quad (21)$$

式 (21) に式 (17) ~ (20) ならびに式 (5) ~ (9) の関係式を代入すれば,

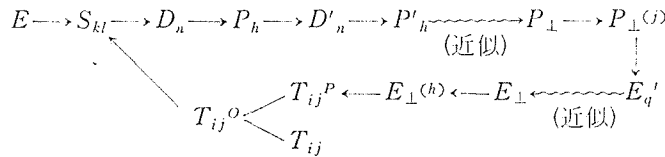
$$S^0_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left\{ s^E_{ijkl} - 4\pi\gamma_n \sum_{h=1}^3 (d_{hij}n_h) \sum_{h=1}^3 (n_h d_{hkl}) \right\} T_{kl}, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (22)$$

が得られる. ただし,  $\gamma_n$  は式 (14) で与えられる. 式 (22) の右辺の  $\{ \}$  中の第 2 項が, 弾性係数への圧電的くりこみ量と考えてよい.

#### § 4. 圧電気現象のメカニズムの図式的表現

前述の § 2, § 3 の, 圧電効果を通じて行なわれる弾性場と電気場との相互作用のメカニズムを整理して Fig. 2 に示す.

たとえば, § 2 の理論にしたがって考える. まず, 外場  $E (= E^{ext})$  が物質場に作用する. その結果, 物質場は  $S_{kl}$  の弾性変形を受ける. 次に,  $S_{kl}$  は電気場との結合を誘起し……すなわち,



となる. 以上によって, 圧電的復元応力  $T_{ij}^P$  の発生のメカニズムの筋が理解出来る.

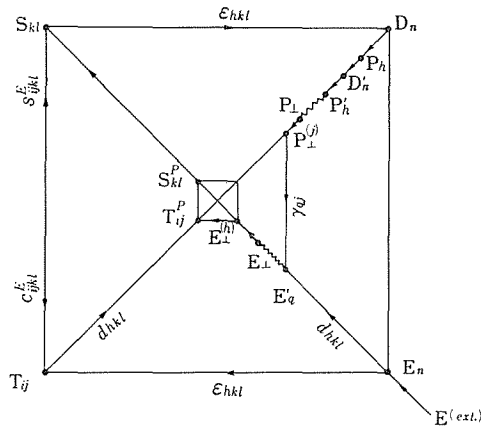


Fig. 2 圧電的復元応力発生のメカニズム

## § 5. む す び

結局, 式 (13), (22) の結果は, 熱力学的に誘導される線形場内での圧電基本式 (接尾がくり返し現われる場合には, 1 から 3 までの和を意味する)

$$\left. \begin{aligned} T_{kl} &= c^E_{ijkl} S_{ij} - \varepsilon_{mkl} E_m, \\ D_n &= \varepsilon_{nij} S_{ij} + k^S_{mn} E_m \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

あるいは,

$$\left. \begin{aligned} S_{ij} &= s^E_{jkl} T_{kl} + d_{nij} E_n, \\ D_n &= d_{nij} T_{ij} + k^T_{mn} E_m \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

から, 形式的にある仮定のもとに解かれた結論と一致する. なお, 式 (13), (22) の結果を応用して導かれる周波数方程式の有効性は, 実験的にも十分証明されている. 要するに, Fig. 2 の圧電的復元応力の発生のメカニズムは, 理想的無限平行平板の圧電性弾性結晶体に十分よい近似で適用出来ると云える.

## 参 考 文 献

- 1) I. Koga: Physics, **3** (1932) 70.
- 2) W. G. Cady: Physics, **7** (1936) 237.
- 3) 古賀, 有賀: 信学誌, **36** (1953) 163,  
I. Koga, M. Aruga, Y. Yoshinaka: Phys. Rev., **109** (1958) 1467.
- 4) A. W. Lawson: Phys. Rev., **59** (1941) 838.
- 5) L. D. Landau & E. M. Lifshitz: 「電磁気学」, 東京図書 K.K. (井上他訳) (1962, 原典 1959)
- 6) H. F. Tiersten: J. A. S. A., **35** (1963) 53.
- 7) 尾上: 信学誌: A, No. 5, **55** (1972) 239.
- 8) 中沢, 松坂: 信州大学工学部紀要, **30** (1971) 67.

### Summary

#### **Generalized Hooke's Law in Piezoelectric and Elastic Body**

Mitsuo NAKAZAWA

(Department of Electronics Engineering, Faculty of Engineering)

The purpose of this work is to perform an analysis of the mechanism of the repulsion stress producing through the piezoelectric cycle in single crystals.

From former days there are two streams of research concerning the above theme. One of the streams has been strongly swollen by Cady, Koga & Aruga under the principle of the coincidence of theory and experiment. The other stream has been rather theoretically developed through Lawson, Landau & Lifshitz, Tiersten, Onoe, etc.

In particular, this work is performed referring to the ideas of Cady, Koga & Aruga. When the external electric field is impressed to the thickness direction of the infinite crystal plate, it is assumed to be essential that the contribution to the repulsion stress due to the piezoelectric cycle is only the effective normal components of the polarization and the internal electric field. In effect this assumption holds good for the thickness crystal vibrators.