

粒状体の変形のシミュレーション (第1報)

——モンテカルロ法による粒状体の形成——

小 西 純 一*

(昭和46年5月31日受理)

1. 緒 言

土質力学は、本来粒子の集合体に関する力学である。土は粒子の集合体であるが、粒子の大きさや、水の存在の有無などにより、その性質は非常に異なっている。たとえば、粘土と乾燥砂をくらべてみればよくわかる。土質力学においては、一応、土を連続体とみなして、力のつり合いと破壊条件を考えて問題を取り扱うのが普通である。しかし、砂のような、粒の集まりとしての性質が顕著ないわゆる粒状体の挙動を解明するためには、粒の集まりであるという本質に帰って考えることが必要である。

粒状体に関しては、多くの学者により、多方面にわたる研究が行われているが⁵⁾、粒状体の力学的性質をその構造に基づいて議論する場合に、実験による研究を除くと、等しい大きさの球の規則配列を論ずるか、あるいは、数個の粒子から成る要素の構造を仮定して、その挙動を粒状体全体に拡張する場合がほとんどであるように思われる。実際の砂、れきなどにおいては、粒子形状、粒径などはほとんど不規則と云ってよいほどであることは周知のことである。これらの要素は粒状体の構造を支配しており、さらに力学的性質に大きな影響を及ぼす。それゆえ、粒状体のモデルとして等しい球の規則配列でなく、また一要素部分のみのモデルでもなく、粒状体全体の挙動を再現できるような、不規則な形状で、種々の粒径の粒子から成るモデルを簡単に形成でき、応力伝達、変形などの計算に供することができるようなれば好都合であろう。

この研究は、そのようなモデルをつくる最初の段階として、任意の粒度の円柱群より成る2次元粒状体モデルを考えてみたものである。ここでは砂またはれきを容器（たとえばせん断試験機のせん断箱）につめる過程を、モンテカルロ法によって任意粒度の粒子群を抽出し、抽出した粒子を順次、ランダムに定めた点から落下させて安定する位置に置くという方法でシミュレートしてみた。

モンテカルロ法を用いてモデル砂層を形成する研究は、松尾、駒田ら^{2)~4)}によって発表されている。また任意粒度の円柱を抽出して、これを箱につめる過程のシミュレーションは村山、松岡^{6)~8)}によってなされている。前者の研究は砂の状態に注目した研究である。後者は砂の構造とせん断抵抗、ダイレイタンシーなどの関係を論じており、上述のモデルによって応力伝達を計算している。

この研究で行なったシミュレーションにおいて、粒子抽出法は、村山、松岡らの研究と同じ考えに基づいているが、粒子のつめ方に関しては、後述の理由からよりゆるぎめの状態

* 土木工学教室 助手

を再現することにした。そしてシミュレーションを組織的に行なうため電子計算機を使用することにした。

粒子を箱につめる場合の仮定の正当性、主として計算機の容量の関係から、粒子の数を十分多くとることができなかったこと、今回は応力、変形に全く触れずに終わったことなど、残された問題点が多いが、興味ある結果が得られたので報告する。

2. 粒子群の抽出

任意の粒度を持つ粒状体を形成するため、まず普通用いられている重量に関する粒度加

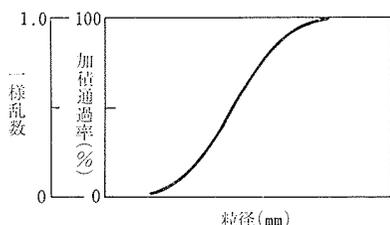


図1 粒子数に関する粒度加積曲線と一様乱数の対応

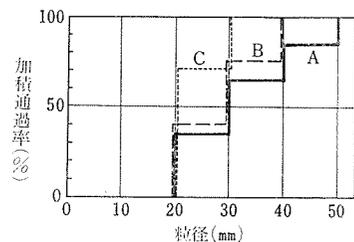


図2 設定粒度

積曲線を粒子数に関するものに直し、縦軸の加積通過率の0~100%に、0~1.0の一様乱数を対応させておく(図-1)。計算機により、乱数を発生させ、これに対応する加積通過率から、求める粒度の粒子が得られる。この操作を繰返すことによって、希望する粒度の粒子群を、ランダムに抽出することができる。以上の操作は粒子形状には無関係に行なわれる。

この研究においては、問題を簡単にするため、モデルは2次元とし、また粒子形状は円柱とした。粒度としては、図-2に示した3種(A, B, C)を用いた。粒径はとりあえず4種類(直径20, 30, 40, 50mm)に限ったが、原理的には全く制限がない。

また一様乱数としては、計算機内部で算術的に発生させる擬似乱数(pseudorandom number)を採用した。その発生方法は、 $2a$ 桁(この研究では6桁)の2数 x_{n-1} , x_n の積 $x_{n-1} \cdot x_n$ の中央 $2a$ 桁をとり、新しい乱数 x_{n+1} とする方法とした。2個の初期値は乱数表から選ぶ。

3. 粒状体の形成

1) 粒子のつまり方

砂やれきを容器に入れる場合に、入れる方法によって、つまり方がかなり異なることは、周知のことである。

砂をこぼして、下にできる砂の堆積の間隙率を調べた Kolbuszewski¹⁾の実験によれば、

(1) 砂を小さい落下速度で落とす(たとえば水中で)と単位時間に堆積する量にかかわらず、非常にゆるくつまる。

(2) 大きい落下速度で落とすと単位時間に堆積する量が少なきときは締った状態になる。単位時間に堆積する量が多くなると間隙率は累進的に大きくなる。また砂の固まりの

自由落下に対応するほど、単位時間に堆積する量が多くなるときには、水中での堆積と同じ程度の間隙率となる。

より密につめる方法としては、振動を加えたり、突固めたりすることが有効である。

この研究においては、砂をゆるくつめる過程を考えることにする。密な状態というのは、ゆるい状態に、何らかの操作を加えることによって生じさせることができると考えるからである。

砂などを、スプーンで、せん断箱あるいはモールドに入れる場合を想定し、Kolbuszewskiの実験を参照して、粒子を水中でそっと落とす場合の堆積過程をシミュレートすることにする。すなわち、次のような仮定を設けた。

(1) 粒子は非常にゆるやかに、鉛直に下降する。既に堆積した粒子にぶつかったときは、その粒子を動かすことなく、安定する位置まで移動する。

(2) 安定する位置は、水平面および凹面である。水平面にぶつかったときは、その位置に堆積する。傾斜面では低い方へゆっくり移動する。

(3) 落下しはじめる点(落下始点)は、スプーンで播くようにして入れることを想定して、箱の幅全体にわたりランダムに選ぶことにする。

2) シミュレーションの方法

粒子を入れる箱の大きさは、図-3に示したとおりである。箱の左下隅を原点にとり、横方向に x 軸、高さ方向に y 軸をとる。 x 座標は Δx ($\Delta x = 260/500 = 0.5\text{mm}$)ごとの値をとるものとする。

落下始点 x_j は箱の幅($B = 250\text{mm}$)全体($0 \leq x_j \leq B$)に $0.0 \sim 1.0$ の一様乱数を対応させておき、粒子抽出と同じ手順で、擬似乱数を発生させることにより定まる。粒子 i の仮座標 $x_{0ij} = x_j$ とおく。

次に(1)で述べた仮定に基づき、粒子を落下させ、安定する位置に置くが、その場合の粒子の動きのパターンを図-3に示した。

i) 粒子(半径 r_i)が側壁にぶつかる場合($x_{0ij} \leq r_i$ または $B - x_{0ij} \leq r_i$ のとき)は、側壁に沿って落下する。このとき $x_{0ij} = r_i$ または $x_{0ij} = B - r_i$ である。

ii) 他の粒子にぶつかることなく底面に到達したならば、その位置にとどまる。このときは、粒子 i の最終座標 x_i, y_i は $x_i = x_j$ または $x_i = r_i$ または $x_i = B - r_i$; $y_i = r_i$ となる。

iii) 既に堆積している粒子 k (半径 r_k)にぶつかるときには、安定する位置まで移動す

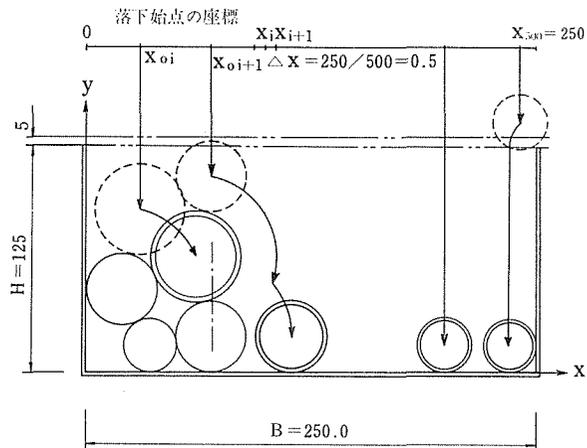


図3 粒子のつまり方のパターン

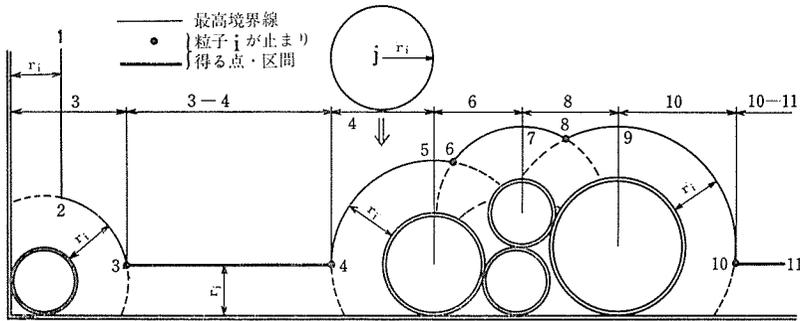


図4 粒子安定位置の決定

る。その場合、堆積した粒子 k は動かないものとする。安定する位置を求める方法を図-4で説明する。

いま既に何個かの粒子が堆積している状態で、新しく粒子 i (半径 r_i) が抽出されたとしよう。するとこの粒子 i が落下して行ったとき、その中心点が到達し得る境界線は、図中の①-②-③-④-⑤-⑥-⑦-⑧-⑨-⑩-⑪で示される。これは既にある境界面または粒子面から r_i 外側に隔たった線を引き、これらの内、 y 座標が最大の部分をつないだもので、最高境界線と呼びことにする。(「線」と書いたが x は Δx ごとの値を使用するので、実は「点」の連続したものである) 粒子の付近では、この境界線は曲線となっており、その傾きが右上りのときは、粒子の仮座標 x_{0ij} を1つ左の x_{0ij-1} に移す。逆に右下りのときは x_{0ij} を x_{0ij+1} に進める。このようにして、左にも右にも動けなくなった点が、求める安定点である。図-4において、太線および黒丸印で示したのがそうである。新しい粒子を抽出するごとに、新しい最高境界線を求め、落下始点によって、落ち着くべき安定点を定めることになる。

このような操作を繰返してゆくと、粒状体の高さが、一部では、新しい粒子を加えることによって、所定高さ (H) を越えてしまうようになる。越える高さの限界を $\Delta H\text{mm}$ とし、この限界に入らない、粒子は捨てて、なお繰返し試行を行ない、捨てた粒子の数が一定数 (ここでは10個) に達したら、計算を中止する。

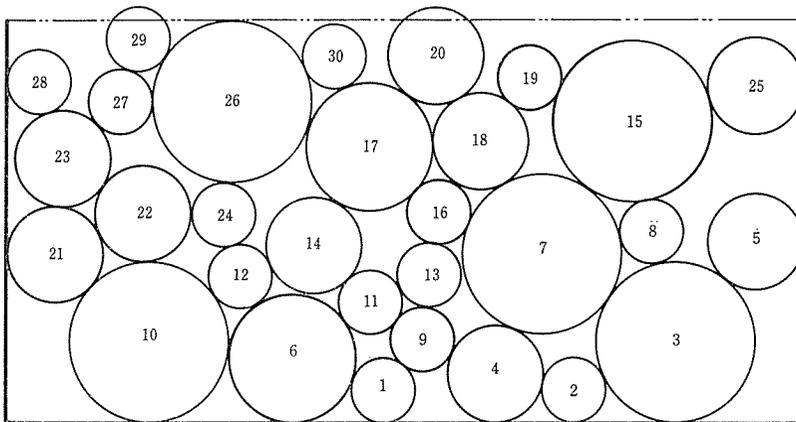


図5 模擬粒状体, 粒度 A (A-2)

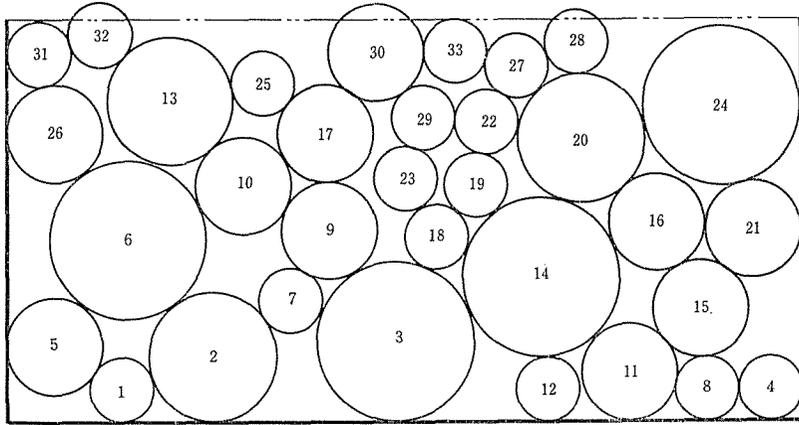


図6 模擬粒状体, 粒度 A (A-4)

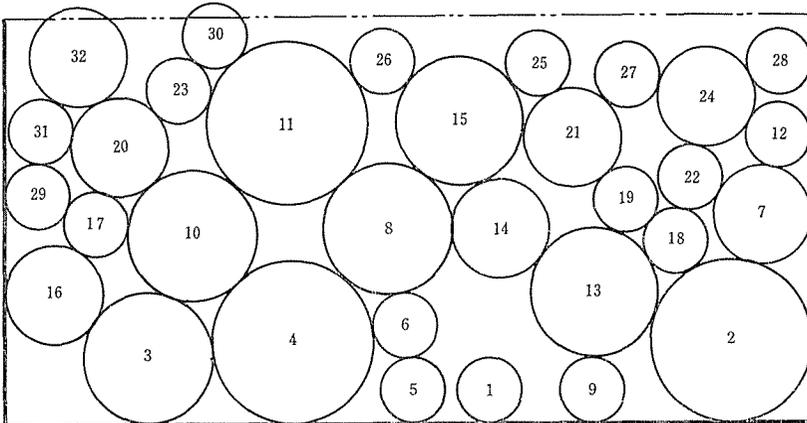


図7 模擬粒状体, 粒度 A (A-5)

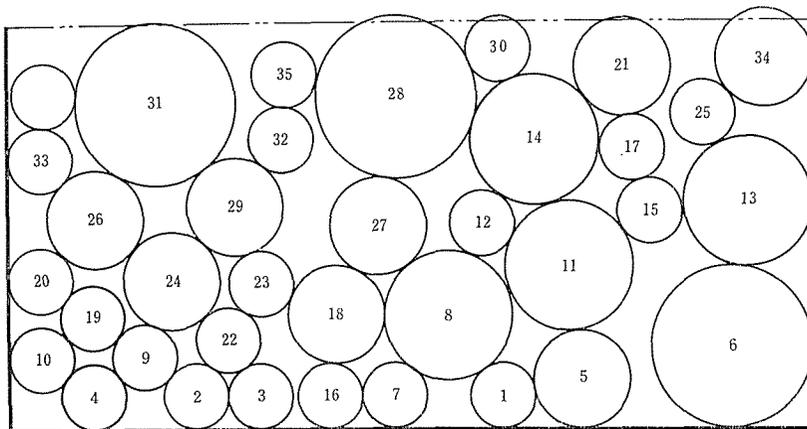


図8 模擬粒状体, 粒度 A (A-9)

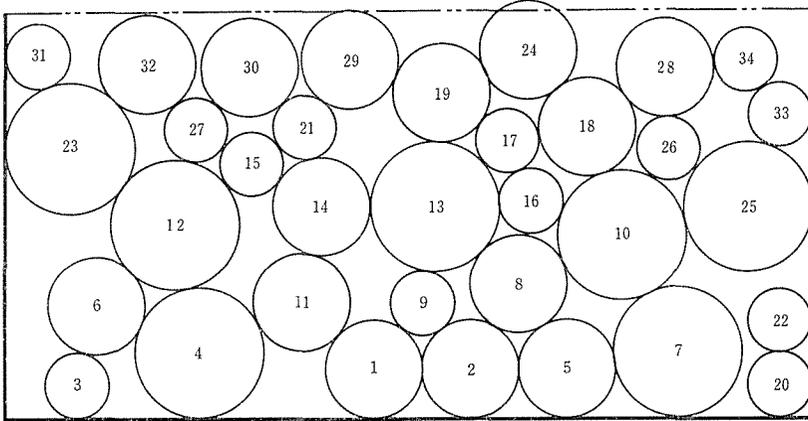


図9 模擬粒状体，粒度 B (B-2)

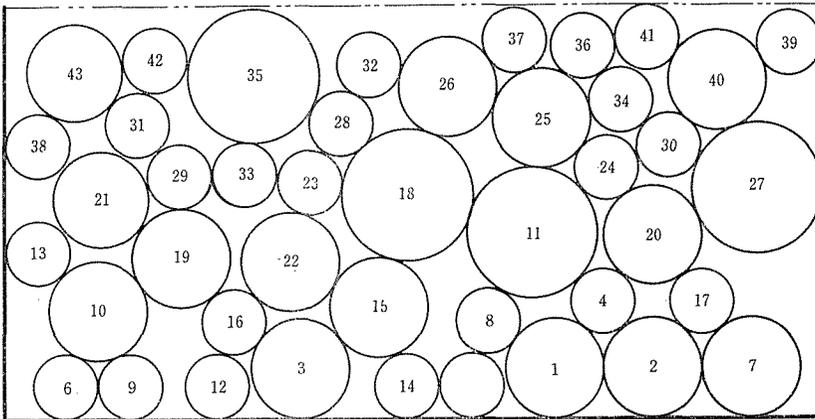


図10 模擬粒状体，粒度 B (B-4)

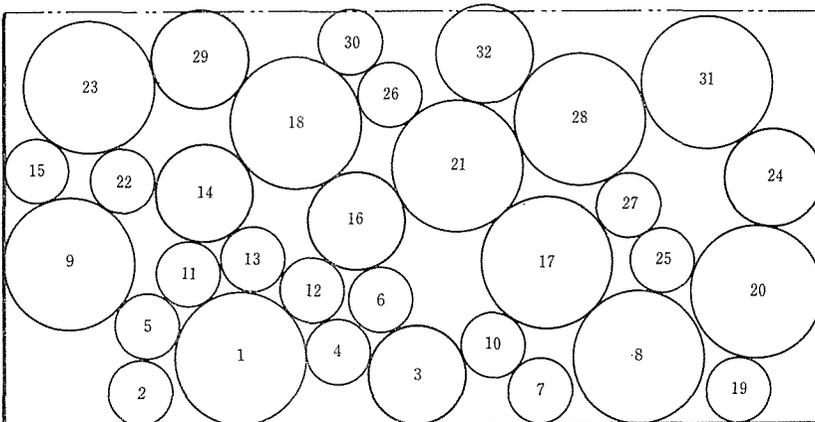


図11 模擬粒状体，粒度 B (B-5)

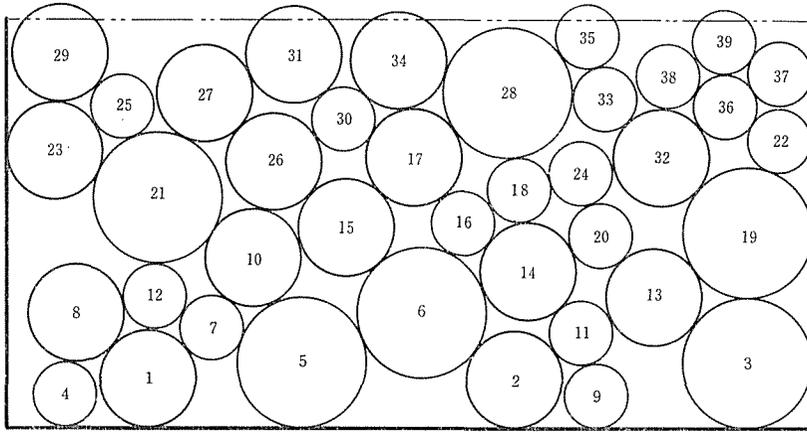


図12 模擬粒状体, 粒度 B (B-7)

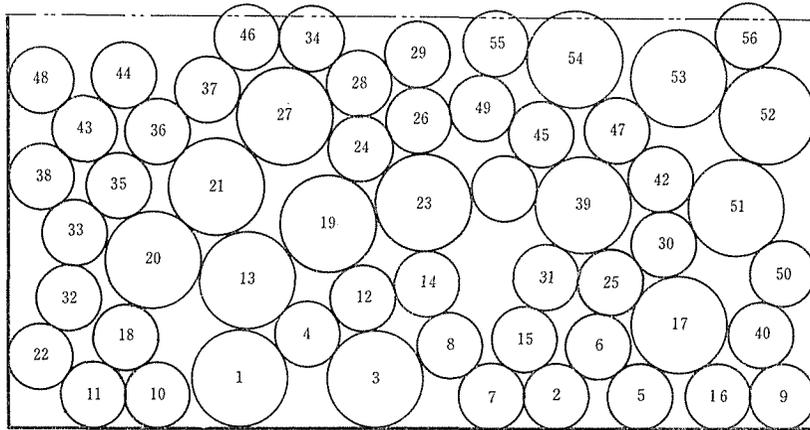


図13 模擬粒状体, 粒度 C (C-1)

4. シミュレーションの結果と考察

上述のようにして、シミュレーションを行なった結果の数例を図-5～13に示す。250mm×125mmの箱の中につめられた粒子数は、粒度Aで28～37個、粒度Bで32～43個、粒度Cで60個程度であった。ただし粒度Cについては、計算機の記憶容量の制約から、抽出粒子数を50個としたため、最後までつめることができなかつたので、手計算によって補つたものを示した。

なお3.に述べたように最高境界線を求めて

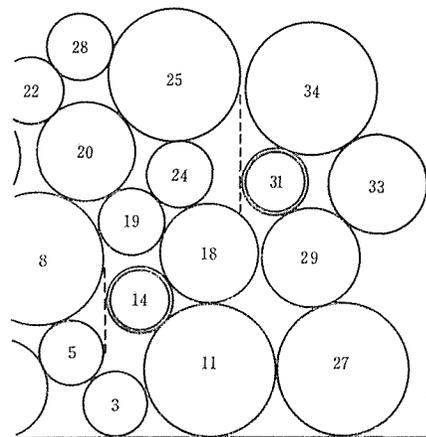


図14 非現実的なつまり方が現われた例 (B-6)

において、粒子位置を決定する方法によったので、時折、図-14に示したような、非現実的

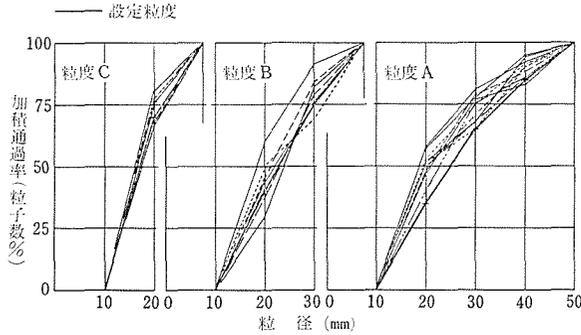


図15 得られた粒状体の粒径加積曲線

なり、粒径加積曲線は、上側にずれたものが多い。その原因の第1は、粒子数が少なく、統計量となるには不十分であること、第2は、最後近くになると大きい粒子が捨てられ、小さい粒子が採用されるという選択操作にあると思われる。したがって、粒子数を十分大きくとれば、設定粒度に一致してくる性質のものであろう。

図-16は間隙比をプロットしたものである。粒度Cについては、補充した1例のみを掲げておく。同じような粒度でも、間隙比のちらばりが、かなり大きいことがわかる。粒子数が少ないので境界面の影響がかなり入っているものと思われるけれども、粒子配置の差によるちらばりが現われていることは事実であろう。この場合も、粒子数をどの位までふやせば、境界の影響を無視できるようになるかの検討がなされれば、はっきりした結論を出すことができるようになるだろう。

次に図17~19には粒子間の接触面のx軸に対する傾き(粒子接触角という)の方向別の頻度分布であり、たとえば、接触角が $-7.5 \sim 7.5^\circ$ の範囲に入れば 0° 、 $7.5 \sim 22.5^\circ$ ならば 15° というように、 15° ごとに頻度を半径上にとり、これを結んだものである。得られた図形にいくつかのパターンがみられるが、これは図-20に示した等しい大きさの円柱の規則配列の図形(放射状の直線のみ)のなごりが現われるためとみてよからう。たとえば、A-4, B-4, B-8な

なつまり方が生じることがある。これは、最高点を結んで行くため粒子の下にある、新しい粒子が入り得る空間が、破線で示したような壁で、ふたをされてしまうような形になるため、解決すべき問題点の1つである。

図-15には、得られた粒状体の粒度を示した。小さい粒子の割合が、設定粒度よりも大きく

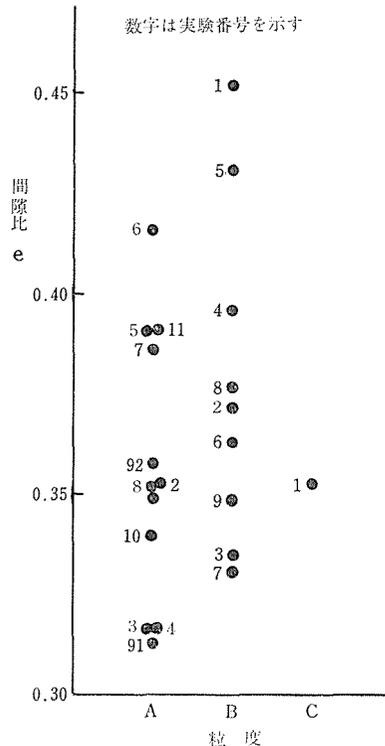


図16 模擬粒状体の間隙化

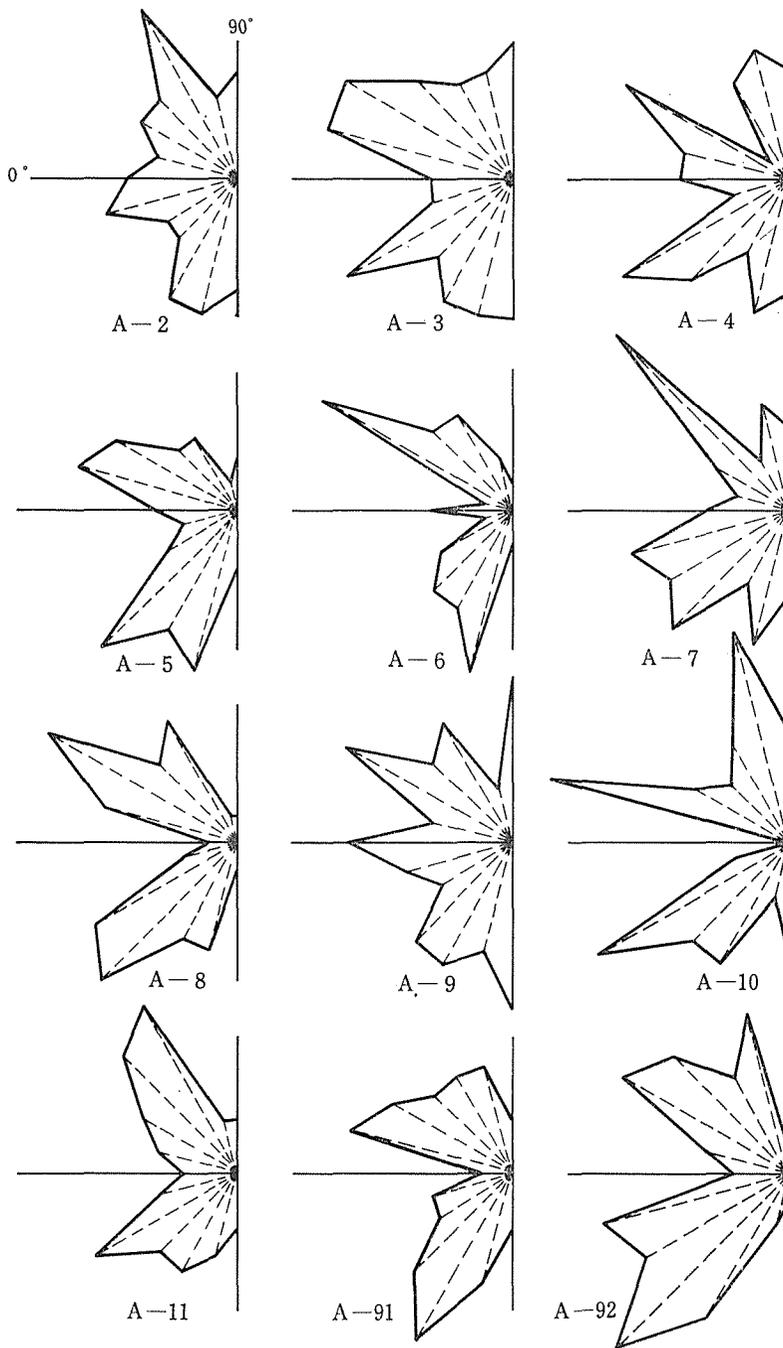


図17 粒子接触角の頻度分布 (粒度A)

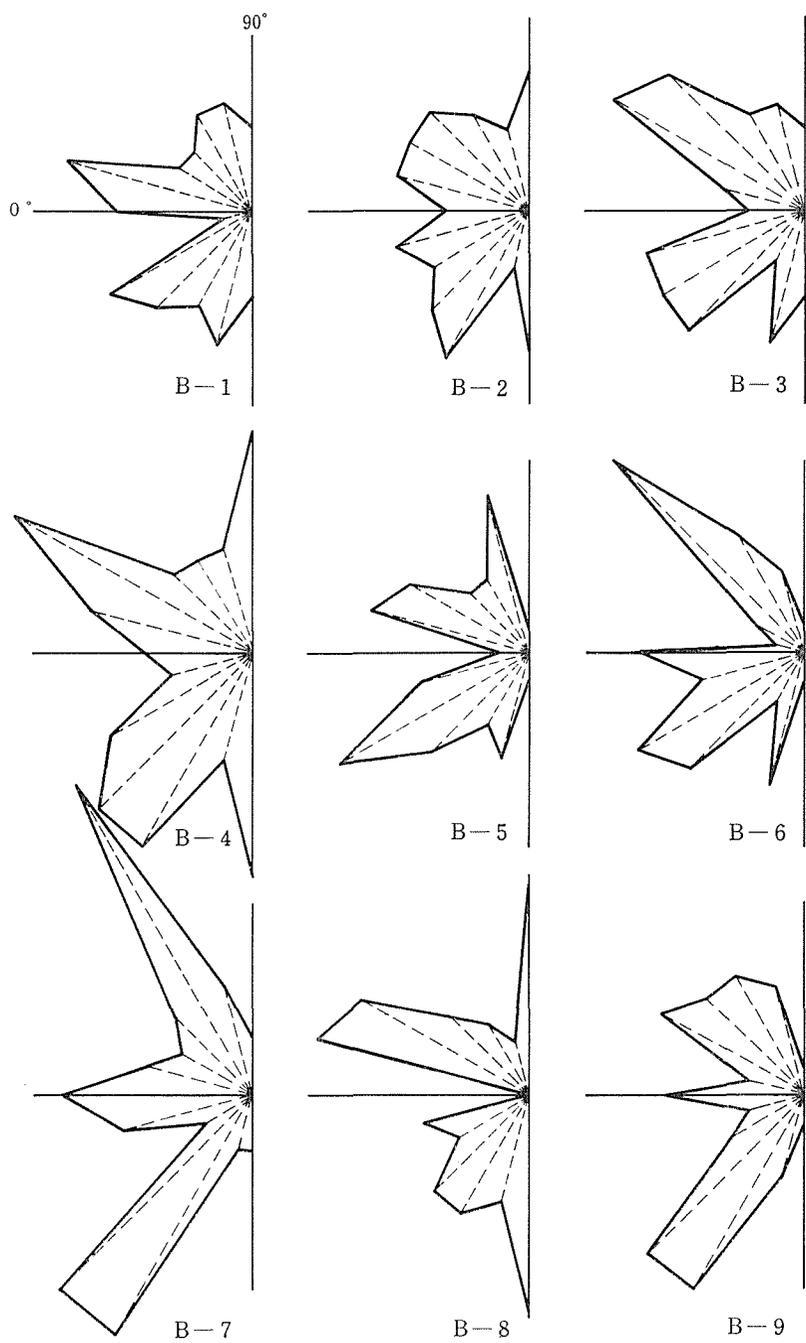


図18 粒子接触角の頻度分布 (粒度B)

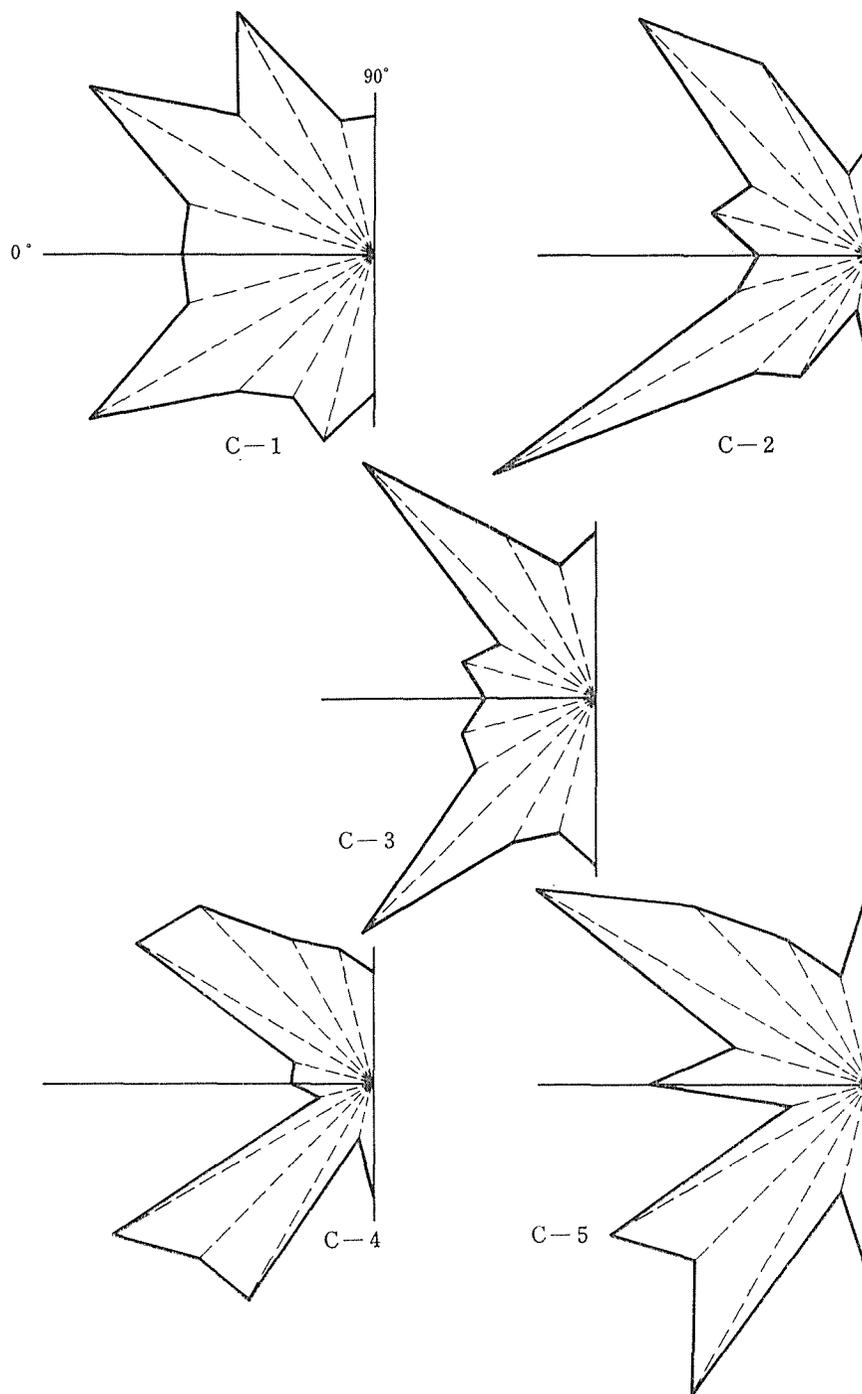


図19 粒子接触角の頻度分布 (粒度C)

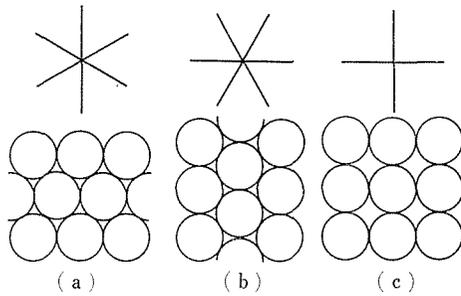


図20 等大円柱の規則配列(下)と
接触角の頻度分布(上)

どは(a)の、B-7、B-9などは(b)の
パターンがよく現われた例である。

粒径の種類が多くなる程、この図形
は楕円に近づくことは、Wiendieck⁹⁾
が指摘したとおりであろうが、ここに
掲げた、3種の粒度の間には、本質的
な差異が見られない。これは、やはり
粒子数の少なさと境界の影響によるも
のであろう。

5. 結 言

以上モンテカルロ法を用いて、2次元粒状体のゆるづめモデルを形成する方法とその結果について考察した。現在の粒子数では、粒度の点、および境界面の影響を除去できないこと、また、諸量を統計的に処理できないことなどの問題はありますが、数で解決できる項目が多いので、今後、応力や変形に関する議論を押し進めてゆくことによって、かなり有用なモデルとなり得る見通しを得た。

シミュレーションには、京都大学大型計算機センター FACOM230-60 を使用した。

なおこの研究は、筆者が京都大学大学院在学中に始められたものであり、交通土木工学教室後藤尚男教授の篤いご指導とご鞭撻を得た。また今回、本稿をまとめるに当っては、本学川上浩教授から有益なるご討議をいただいた。厚く御礼申し上げる。

参 考 文 献

- 1) Kolbuszewski, J. (1965) : An experimental study of maximum and minimum porosities of sands, Proc. 2nd Int. Conf. S.M. and F.E. Vol.1, 158-165.
- 2) 松尾 稔・駒田智久・高橋通夫 (1966) : 砂層の変形に関するモンテカルロ法的研究, 土木学会第21回年次学術講演会講演概要, III-52.
- 3) 松尾 稔・駒田智久 (1966) : 砂層の変形に関するモンテカルロ法的研究 (第2報), 土木学会関西支部年次学術講演会講演概要.
- 4) 松尾 稔・駒田智久・井宮秀雄 (1967) : 砂層の変形に関するモンテカルロ法的研究 (第3報), 土木学会第22回年次学術講演会講演概要, III-3.
- 5) 最上武雄 (1969) : 粒状体の力学, 最上武雄編; 土質力学第8章, 893-1036にまとめられている.
- 6) 村山朔郎・松岡 元 (1969) : 2次元粒状体の応力伝達についての試み, 土木学会関西支部年次学術講演会講演概要, III-17.
- 7) 村山朔郎・松岡 元 (1969) : 粒状体のせん断現象の微視的考察, 土木学会第24回年次学術講演会講演集, III-8.
- 8) 村山朔郎・松岡 元 (1970) : 粒状体のせん断抵抗と粒子構造について, 『土木学会第25回年次学術講演会講演集, III-36.
- 9) Wiendieck, K (1967) : Zur Struktur körniger Medien, Die Bautechnik, 44, 196-199.

Summary

The Simulation of the Deformation Process of Granular Medium (1st report)

The Formation of Granular Medium Using the Monte Carlo Method

Junichi KONISHI

(Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering)

A method of the formation of two-dimensional granular medium by means of the computer system is described.

A particle of a certain grain size is chosen randomly from a group of many particles having a prescribed grain size distribution by the Monte Carlo method. Then this particle falls into a box and moves toward a point at which the particle is to be at rest. Such a process of piling is simulated by computation of the coordinate assuming the pattern of particle movement.

Several results of simulation are investigated with respect to the void ratio and the frequency distribution of the inclination of interparticle plane.