

# 演算子法による弾性床上の 連続ボックス・ラーメンの解析

石川 清志<sup>1)</sup>・谷本勉之助<sup>2)</sup>・夏目正太郎<sup>3)</sup>

(昭和44年10月31日受理)

## 1. ま え が き

弾性床上の連続ボックス・ラーメン(図-1)の構造解析において、従来弾性床上の構造物は、これを組織している部材が閉合しているため、特異性(singularity)という現象が起り、解析をすることのできない構造体系と言われている。そこで一般には、ある固定点を設けたり、弾性体からの基礎反力を既知の分布反力と仮定して、数値解析を進めている現状である。

演算子法は、つり合い原理やエネルギー原理のような、いわゆる力学的原理は一切使わず、流通マトリクス(current-matrix)の移行演算をするところの漸化式(recurrence formula)で進めるので、今日のような電子計算機を用いて、数値解析を行うに高い能率と精度とを期待することができる。

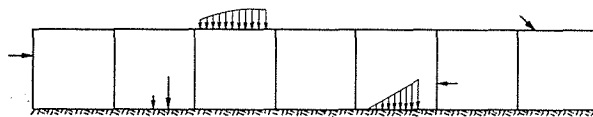


図-1. 弾性床上の連続ボックス・ラーメン

漸化式を用いて、結果的には大型の連立方程式を解くわけですが、データの完全分類により、流通マトリクスの移行演算を行うときの演算子の内積計算だけとなり、構造解析の思想が明確な筋道に導かれると考える。また電子計算機の容量が比較的小さくとも、漸化式のゆえ、次元数の大きい方程式も容易に処理でき、プログラミングにおいて、解析自身がフローチャートに似合っているため、きわめて便利に扱うことができる。

## 2. 概 要

弾性床上の連続ボックス・ラーメンの解析は弾性床上の部材が曲げ挙動を受けるため、それに供う基礎からの分布反力の処置において、いろいろの困難が生じると考える。

- 1) 土木工学教室, 技官
- 2) 土木工学教室, 教授
- 3) 土木工学教室, 助教授

演算子法は弾性床上の部材の曲げたわみ解析において、一応確立している Winkler の仮定を用いて行う。この仮定は弾性床上の部材の各点のたわみ沈下量に比例した分布反力が基礎から部材に上向きに作用することである。

分布基礎反力  $R(x)$  とすれば

$$R(x) = kw. \quad (1)$$

ここにおいて、 $w$  = たわみ、比例定数  $k$  を基礎係数(modulus of foundation)という。

弾性床上の連続ボックス・ラーメンの挙動は曲げたわみ、および軸変位の動きをもつため、Winkler の仮定は軸変位にも相対するものである。

連続の構造体系は一般にトポロジカルな単位構(topological unit)の組み合わせと考えることができる。連続ボックス・ラーメンの構造体系では図-2のように、弾性床上部材( $r, 1$ )と、一般のラーメン挙動をもつ一般部材( $r, 2$ )の上下2水平部材と鉛直一般部材( $r, 3$ )から構成された単位構である。この単位構が相互に結合し連続の構造物を形成している。

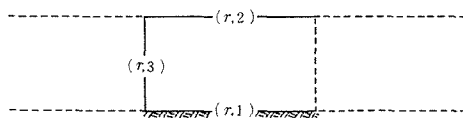


図-2. 単位構(unit)

単位構を構成する部材の力学的挙動は部材の曲げおよび軸変位に関する微分方程式の一般解に必要な微分演算を行い、これらのデータ完全分類することにより、一般解の未定積分定数群である固有マトリクス(eigenmatrix)に支配される。そこで部材の応力物理要素の微分演算を系統的に整理することにより、代数学的に扱うことができる。

相隣する2つの単位構間( $r-1$ )、および( $r$ )において、変位適合性(compatibility)と力平衡性(equilibrium)とを系統的に整理することにより、( $r$ )単位構を支配する固有マトリクスは( $r-1$ )の固有マトリクスをもってあらわすことができ、漸化式が得られる。それゆえ、 $n$ 番目の固有マトリクスは最初の固有マトリクスであらわすことができる。最初の固有マトリクスを流通マトリクスと呼ぶ。

演算子法における外力荷重はすべて荷重マトリクス(load-matrix)で扱い、解析を進めるにあたって、独立的存在で、他の要素とのからみ合いはなく解析を複雑にしない。そして解析の思想をはっきりとした筋道で進めることができる。荷重マトリクスは外力荷重の作用した共役領域(conjugate domain)を支配する固有マトリクスから基準領域(normal domain)の固有マトリクスを差引いた量である。

集中荷重の荷重マトリクスを必要な積分演算することにより、一様分布荷重や多項式であらわされる分布荷重マトリクスもたやすく得られる。

最終段階として、境界マトリクス(boundary-matrix)より、最終方程式が得られ流通マトリクスを求める。境界マトリクスは境界条件として必要な要素を系統的に整理すると、境界条件を完全に満足する境界マトリクスが導びかれ、境界を支配する固有マトリクスは境界マトリクスにより、境界条件の制約を受ける。

### 3. 基礎式

弾性床上的連続ボックス・ラーメンを構成している単位構は、ラーメン挙動するため、曲げたわみ、および軸変位の挙動を含む

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (2)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{F}{EA} \quad (3)$$

より進める．弾性床上部材の挙動は Winkler の仮定 を取り入れた微分方程式より解析を進める． $u$  = 軸変位， $M$  = 曲げモーメント， $F$  = 軸力， $E$  : 弾性係数， $I$  : 断面二次モーメント， $A$  : 断面積．

単位構を組織する部材の物理挙動は式 (2)，(3) を組織的に組み立てて、曲げおよび軸変位を含む 6 次の方程式とする．

### 4. 状態ベクトル (state vector)

部材の任意点  $\rho$  における物理量を列ベクトルに並べたものを状態ベクトル (state vector)  $\mathbf{W}(\rho)$  と呼ぶ．

$$\mathbf{W}(\rho) = \{u \ F \ w \ \theta \ M \ S\}_\rho. \quad (4)$$

ここに、上式の列ベクトルの要素は順に、軸変位、軸力、たわみ、たわみ角、曲げモーメント、せん断力を示す．また、 $\rho = x/L$  の無次元流通座標をもって、簡略に行う． $L$  : 部材の辺長．

状態ベクトル  $\mathbf{W}(\rho)$  は、図形量を扱った一般変位 (generalized displacement)  $\mathbf{U}(\rho)$ 、および力量を扱った一般力 (generalized force)  $\mathbf{V}(\rho)$  とに区別してあらわすことができる：

$$\mathbf{W}(\rho) = \{\mathbf{U}(\rho) \ \mathbf{V}(\rho)\}, \quad (5)$$

$$\mathbf{U}(\rho) = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \theta \end{bmatrix}_\rho = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \frac{1}{L} \frac{dw}{d\rho} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\mathbf{V}(\rho) = \begin{bmatrix} F \\ S \\ M \end{bmatrix}_\rho = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} \frac{du}{d\rho} \\ -\frac{EI}{L^3} \frac{d^3 w}{d\rho^3} \\ \frac{EI}{L^2} \frac{d^2 w}{d\rho^2} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

式(6), (7)の微分演算を系統的に整理すると

$$\mathbf{U}(\rho) = \mathbf{P}(\rho)[\mathbf{X} + \langle \mathbf{K}(\rho) \rangle], \quad (8)$$

$$\mathbf{V}(\rho) = \mathbf{Q}(\rho)[\mathbf{X} + \langle \mathbf{K}(\rho) \rangle]. \quad (9)$$

$\mathbf{P}(\rho)$ ,  $\mathbf{Q}(\rho)$  は 3-by-6 の一般変位と一般力の座標マトリクス (abscissa matrix),  $\mathbf{X}$  は一般解の積分定数群を列ベクトルに並べた 6-by-1 の固有マトリクスである.  $\mathbf{K}(\rho)$  は流通座標点  $\rho$  に外力荷重が作用したときの荷重マトリクスで, 6-by-1 の列マトリクス (column matrix) である.

### 5. 漸化式 (recurrence formula)

図-3のように, 相隣する2つの単位構間( $r-1$ ), ( $r$ )において, 結合点 $[r, 1]$ ,  $[r, 2]$ の内部応力結合状態は, 図-4のように考えられる. これより, 変位適合性および力平衡性から系統的に整理すると, 一般変位と一般力をもってあらわすことができる.

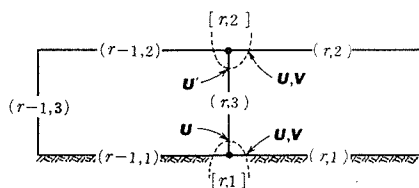


図-3. 相隣する2つの単位構

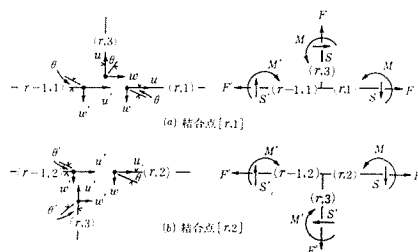


図-4. 変位適合性および力平衡性

結合点 $[r, 1]$ において

$$\mathbf{U}_{r1} = \mathbf{U}'_{r-1,1} = \mathbf{R}\mathbf{U}_{r3}, \quad (10)$$

$$\mathbf{V}_{r1} - \mathbf{V}'_{r-1,1} + \mathbf{R}\mathbf{V}_{r3} = 0. \quad (11)$$

同様にして, 結合点 $[r, 2]$ におけるつり合は

$$\mathbf{U}_{r2} = \mathbf{U}'_{r-1,2} = \mathbf{R}\mathbf{U}'_{r3}, \quad (12)$$

$$\mathbf{V}_{r2} - \mathbf{V}'_{r-1,2} - \mathbf{R}\mathbf{V}'_{r3} = 0. \quad (13)$$

ここにおいて,  $\mathbf{U}'$ ,  $\mathbf{V}'$  は共役領域の一般変位, および一般力であり, 荷重マトリクスの影響を含んだ物理量である. また,  $\mathbf{R}$  は

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

これを変換マトリクス (rearrangement matrix) という.

2つの結合点 $[r, 1]$ ,  $[r, 2]$ における内部応力つり合いより, 演算子法の重要な要素である漸化式を導く. まず, 式(10), (11)より, 式(8), (9)に適応して, 変位適合性と力平衡

性を系統的に整理すると,

$$\mathbf{X}_{r1} = \mathbf{L}_{r1}^1 \mathbf{X}_{r-1,1} + \mathbf{L}_{r1}^2 \mathbf{X}_{r3}. \quad (15)$$

同様にして, 式(12), (13)より

$$\mathbf{X}_{r2} = \mathbf{L}_{r2}^1 (\mathbf{X} + \mathbf{K})_{r-1,2} + \mathbf{L}_{r2}^2 (\mathbf{X} + \mathbf{K})_{r3}. \quad (16)$$

ここにおいて,  $\mathbf{K}$ は $\mathbf{K}(1)$ の略記号で荷重マトリクスであるが, 流通座標 $\rho$ に支配されない量である.

一階の連続ボックス・ラーメンの漸化式は, 上下の2水平部材の移行演算をもって行うため, 鉛直部材の要素は2つの水平部材に変換する必要がある. この処理の方法は, 式(10), (12)において, 変位適合性より

$$\mathbf{X}_{r3} = \mathbf{L}_{r3}^1 (\mathbf{X} + \mathbf{K})_{r-1,1} + \mathbf{L}_{r3}^2 (\mathbf{X} + \mathbf{K})_{r-1,2} + \mathbf{L}_{r3}^3 \mathbf{K}_{r3}. \quad (17)$$

$\mathbf{L}_{rm}^i (i, m = 1, 2, 3)$ は一方の固有マトリクスを他方に移行するための移行子(shiftor)である.

式(15), (16), (17)より, 相隣する単位構間における漸化式が得られる:

$$\mathbf{Z}_r = \mathbf{L}_r \mathbf{Z}_{r-1} + [\mathbf{F} \quad \mathbf{F}']_r [\mathbf{K}_{r-1} \quad \mathbf{K}_r]. \quad (18)$$

ここにおいて,  $r = 2, 3, 4, \dots, n$ ,  $\mathbf{Z}$ は統合された固有マトリクス,  $\mathbf{L}_r$ は移行演算子(shift operator),  $\mathbf{F}$ は供給演算子(feed operator)である.

これらの各要素は,

$$\mathbf{Z}_r = \{\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_2\}_r, \quad (19)$$

$$\mathbf{L}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{r1}^1 + \mathbf{L}_{r1}^2 \mathbf{L}_{r3}^1 & \mathbf{L}_{r1}^2 \mathbf{L}_{r3}^2 \\ \mathbf{L}_{r2}^2 \mathbf{L}_{r3}^1 & \mathbf{L}_{r2}^1 + \mathbf{L}_{r2}^2 \mathbf{L}_{r3}^2 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$\mathbf{F}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{r1}^1 + \mathbf{L}_{r1}^2 \mathbf{L}_{r3}^1 & \mathbf{L}_{r1}^2 \mathbf{L}_{r3}^2 & 0 \\ \mathbf{L}_{r2}^2 \mathbf{L}_{r3}^1 & \mathbf{L}_{r2}^1 + \mathbf{L}_{r2}^2 \mathbf{L}_{r3}^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\mathbf{F}_r^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{L}_{r1}^2 \mathbf{L}_{r3}^3 \\ 0 & 0 & \mathbf{L}_{r2}^2 + \mathbf{L}_{r2}^3 \mathbf{L}_{r3}^3 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$\mathbf{K}_r = \{\mathbf{K}_1 \quad \mathbf{K}_2 \quad \mathbf{K}_3\}_r. \quad (23)$$

また, これらのマトリクスのサイズは電子計算機を用いて進める場合必要なことで,  $\mathbf{Z}$ は12-by-1の列マトリクス,  $\mathbf{L}_r$ は12-by-12の正方マトリクス,  $\mathbf{F}_r$ , および $\mathbf{F}_r^1$ は12-by-18の矩形マトリクス,  $\mathbf{K}_r$ は18-by-1の列マトリクスである.

## 6. 境界条件 (boundary conditions)

構造体系の解析における境界条件 (boundary condition) は, 構造体系が成り立つための応力成分の物理的制約がみられる.

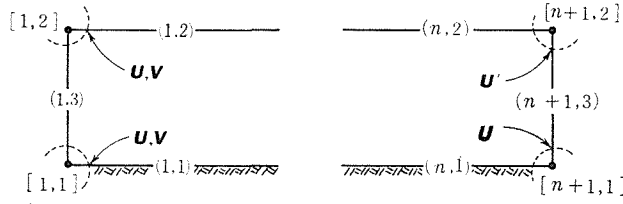


図-5. 境界条件 (boundary conditions)

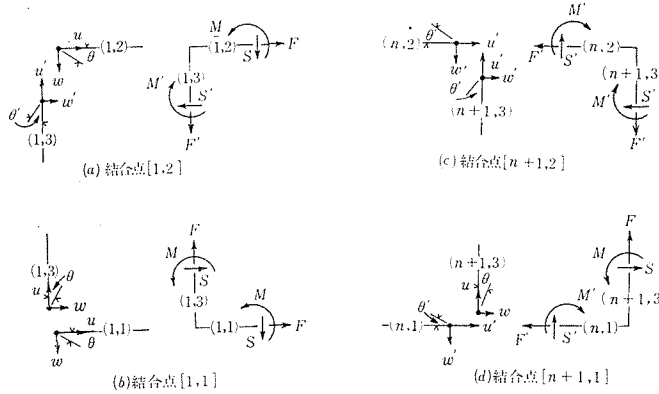


図-6. 変位適合性および力平衡性

まず、左端において、結合点  $[1, 1]$  より (図-5), 応力の結合状態は 図-6 のようである。これらを系統的に整理すると,

$$\mathbf{U}_{11} = \mathbf{R}\mathbf{U}_{13}, \quad (24)$$

$$\mathbf{V}_{11} + \mathbf{R}\mathbf{V}_{13} = 0. \quad (25)$$

これらより

$$\mathbf{X}_{11} = \mathbf{L}_{11}\mathbf{X}_{13}. \quad (26)$$

同様にして、結合点  $[1, 2]$  より

$$\mathbf{U}_{12} = \mathbf{R}\mathbf{U}'_{13}, \quad (27)$$

$$\mathbf{V}_{12} - \mathbf{R}\mathbf{V}'_{13} = 0, \quad (28)$$

$$\mathbf{X}_{12} = \mathbf{L}_{12}(\mathbf{X} + \mathbf{K})_{13}. \quad (29)$$

式 (26), (29) より, 一方程式にまとめられて, 左端の境界条件を満足する境界方程式 (boundary equation) を得る:

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{L}_1\mathbf{Q} + \mathbf{F}_1'\mathbf{K}_1. \quad (30)$$

ここにおいて,

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} \\ \mathbf{L}_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Omega} = \mathbf{X}_{13}, \quad \mathbf{F}_1' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{L}_{12} \end{bmatrix}. \quad (31)$$

$\mathbf{\Omega}$  は流通マトリクス (current-matrix) という。

右端においての境界条件処理は左端と同様であるが、鉛直部材  $(n+1, 3)$  の扱いは、式 (17) と同様に、変位適合性をもって、 $(n+1, 3)$  部材の要素を上下 2 水平部材  $(n, 1)$ ,  $(n, 2)$  に変換し、力平衡性のつり合い方程式に代入し、 $(n, 1)$ ,  $(n, 2)$  部材による方程式とする。

図-5 の結合点  $[n+1, 1]$  の結合状態は図-6 である。これより

$$\mathbf{U}'_{n1} = \mathbf{R}\mathbf{U}_{n+1,3}, \quad (32)$$

$$\mathbf{V}'_{n1} - \mathbf{R}\mathbf{V}_{n+1,3} = 0. \quad (33)$$

また、結合点  $[n+1, 2]$  より

$$\mathbf{U}'_{n2} = \mathbf{R}\mathbf{U}'_{n+1,3}, \quad (34)$$

$$\mathbf{V}'_{n2} + \mathbf{R}\mathbf{U}'_{n+1,3} = 0. \quad (35)$$

式 (32), (34) の変位適合性の図形量より

$$\mathbf{X}_{n+1,3} = \mathbf{M}_1\mathbf{Z}_n + [\mathbf{M}_2 \quad \mathbf{M}_3]\{\mathbf{K}_n \quad \mathbf{K}_{n+1}\}. \quad (36)$$

式 (33), (35) の力平衡性の力量から

$$\mathbf{A}\mathbf{Z}_n + \mathbf{B}\mathbf{X}_{n+1,3} + [\mathbf{F} \quad \mathbf{F}']_n\{\mathbf{K}_n \quad \mathbf{K}_{n+1}\} = 0. \quad (37)$$

式 (37) に式 (36) を代入して

$$\mathbf{D}\mathbf{Z}_n + [\mathbf{E} \quad \mathbf{E}']_n\{\mathbf{K}_n \quad \mathbf{K}_{n+1}\} = 0, \quad (38)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{M}_1, \quad \mathbf{E}_n = \mathbf{B}\mathbf{M}_2 + \mathbf{F}_n, \quad \mathbf{E}'_n = \mathbf{B}\mathbf{M}_3 + \mathbf{F}'_n. \quad (39)$$

式 (38) は左端の境界条件を満足する境界方程式である。

## 7. 最終方程式

漸化式 (17) をもちいて、逐次移行演算を行い、 $n$  番目の単位構の固有マトリクスは

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_n &= \mathbf{L}_n\mathbf{L}_{n-1} \cdots \mathbf{L}_2\mathbf{Z}_1 + [\mathbf{L}_n\mathbf{L}_{n-1} \cdots \mathbf{L}_3\mathbf{F}_1, \quad \mathbf{L}_n\mathbf{L}_{n-1} \cdots \mathbf{L}_5(\mathbf{L}_4\mathbf{F}'_1 + \mathbf{F}_2), \\ &\quad \mathbf{L}_n\mathbf{L}_{n-1} \cdots \mathbf{L}_6(\mathbf{L}_5\mathbf{F}'_2 + \mathbf{F}_3), \quad \cdots, \quad \mathbf{L}_n\mathbf{F}'_{n-1} + \mathbf{F}_n, \quad \mathbf{F}'_n]\{\mathbf{K}_n \quad \mathbf{K}_{n-1} \cdots \mathbf{K}_n\}. \end{aligned} \quad (40)$$

または

$$\mathbf{Z}_n = \mathbf{H}\mathbf{Z}_1 + [\mathbf{H}]_n\{\mathbf{K}_n\}. \quad (41)$$

これに、左端の境界条件方程式 (30) を代入して

$$\mathbf{Z}_n = \mathbf{C}\mathbf{\Omega} + [\mathbf{C}]_n\{\mathbf{K}_n\}. \quad (42)$$

最終方程式として、右端の境界条件方程式 (38) を代入し、流通マトリクス  $\mathbf{\Omega}$  を決定す

る:

$$\Omega = [G]\{K\}. \quad (43)$$

ここにおいて、 $[G]$ は図形マトリクス (geometry matrix) であり、荷重条件には全く無関係で、独立値である。それゆえ、どのような荷重条件でも、内積計算によって、流通マトリクスが得られ、ただちに、物理量が得られる。構造体系の影響線を求めるにも能率のよいものとする。

## 8. 荷重マトリクス (load-matrix)

図-7のように、外力荷重が作用し、部材における状態ベクトルの連続性より、

$$W'(\kappa) - W(\kappa) = J. \quad (44)$$

これを連続条件 (continuity condition) という。これによって、 $W'(\kappa)$ と $W(\kappa)$ を支配するそれぞれの固有マトリクスの自由度に制約を与える。

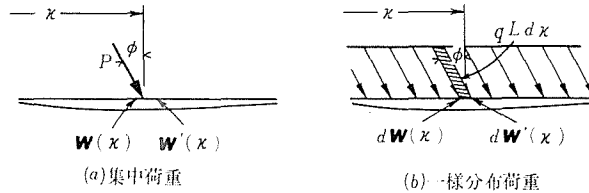


図-7. 荷重マトリクス

式(44)において、

$$J = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad -P \sin \phi \quad -P \cos \phi \quad 0\}. \quad (45)$$

式(44)を式(8)、(9)により、系統的にデータ整理すると

$$K_o = P \left[ \frac{L}{EA} \sin \phi \{ \kappa, -1 \}, \frac{L^3}{6EI} \cos \phi \{ -\kappa^2, 3\kappa^2, -3\kappa, 1 \} \right], \quad (46)$$

$$K_e = P \left[ \frac{L}{2\alpha EA} \sin \phi \{ \kappa, -1 \}, \frac{L^3}{8\beta^3 EI} \cos \phi \{ -e^{-\beta\kappa}(\cos \beta\kappa + \sin \beta\kappa), \right. \\ \left. e^{-\beta\kappa}(\cos \beta\kappa - \sin \beta\kappa), e^{\beta\kappa}(\cos \beta\kappa - \sin \beta\kappa), e^{\beta\kappa}(\cos \beta\kappa + \sin \beta\kappa) \} \right]. \quad (47)$$

ここにおいて

$$\alpha = \sqrt{\frac{jL^2}{EA}}, \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{kL^4}{4EI}}. \quad (48)$$

また、 $K_o$ および $K_e$ はそれぞれ集中荷重が作用した一般部材、弾性床上部材の荷重マトリクスである。 $P$ : 集中荷重。

図-7のように、ある大きさをもった、外力一様分布荷重 $q$ の荷重マトリクスは



$$\mathbf{K}(\rho) = qL \int_0^\rho d\mathbf{K}(\kappa) d\kappa \quad (49)$$

で得られる。

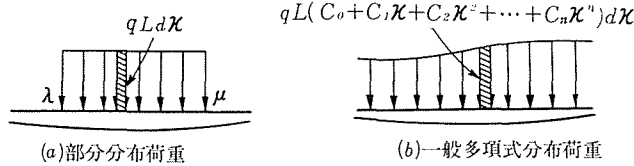


図-8. 分布荷重の荷重マトリクス

図-8のように、部分分布荷重や一般多項式

$$f(\kappa) = qL(c_0 + c_1\kappa + c_2\kappa^2 + \dots + c_n\kappa^n) \quad (50)$$

であらわされるような、分布荷重が作用する荷重マトリクスはそれぞれ

$$\mathbf{K}(\lambda, \mu) = qL \int_\lambda^\mu d\mathbf{K}(\kappa) d\kappa, \quad (51)$$

$$\mathbf{K}(\rho) = \int_0^\rho f(\kappa) d\mathbf{K}(\kappa) d\kappa \quad (52)$$

で求められる。

## 9. 計算例

演算子法において、漸化式の移行演算で何径間の構造体系も解析できるが、一応5径間として、いろいろの荷重状態を適応してみた。各部材を10等分し各点の状態ベクトルを得て、構造体系の各接点変位、曲げモーメント曲線、および分布基礎反力曲線を図示した。一応対称荷重を作用させ解析の正しさをチェックできると考える。また単位構と単位構との結合連続性は式(10)～(13)をもって満すものである。電子計算機の入力データとして、

弾性係数 = 2 100 000 t/m<sup>2</sup>

断面積 = 0.36 m<sup>2</sup>

断面二次モーメント = 0.010 8 m<sup>4</sup>

各部材辺長 = 5 m

基礎係数 = 1 000 t/m<sup>2</sup>

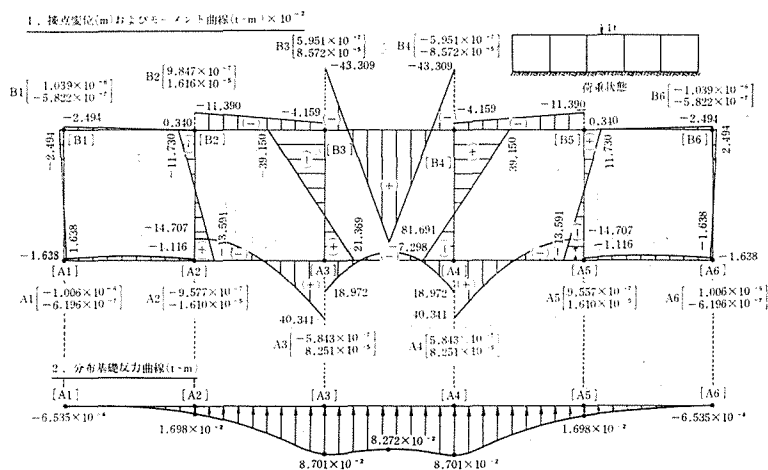
を一定として、数値計算を行った。

構造物の各接点変位の記述は

$$H_i \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}, \quad (H = A \text{ or } B, i = 1, 2, \dots, 6)$$

であらわし、下部接点にA、上部接点にBの符号をつけた。

また、曲げモーメント曲線は各部材の10等分点したときの最大および最小値も記述した。

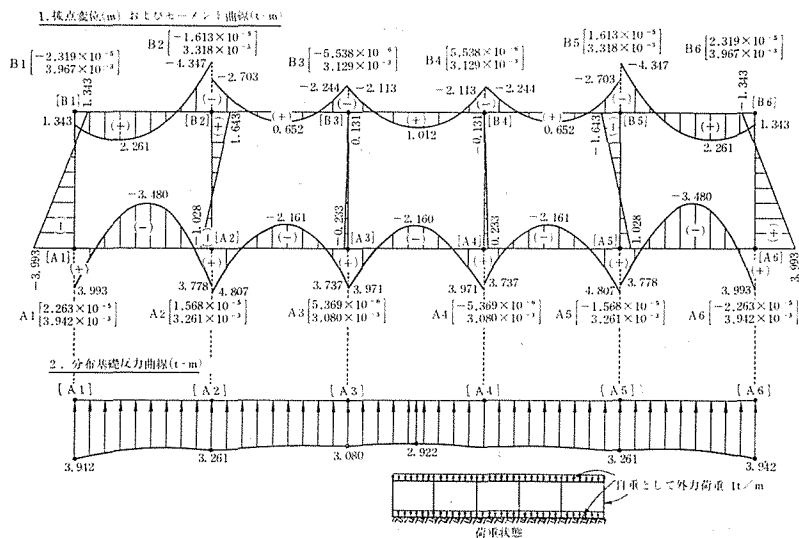


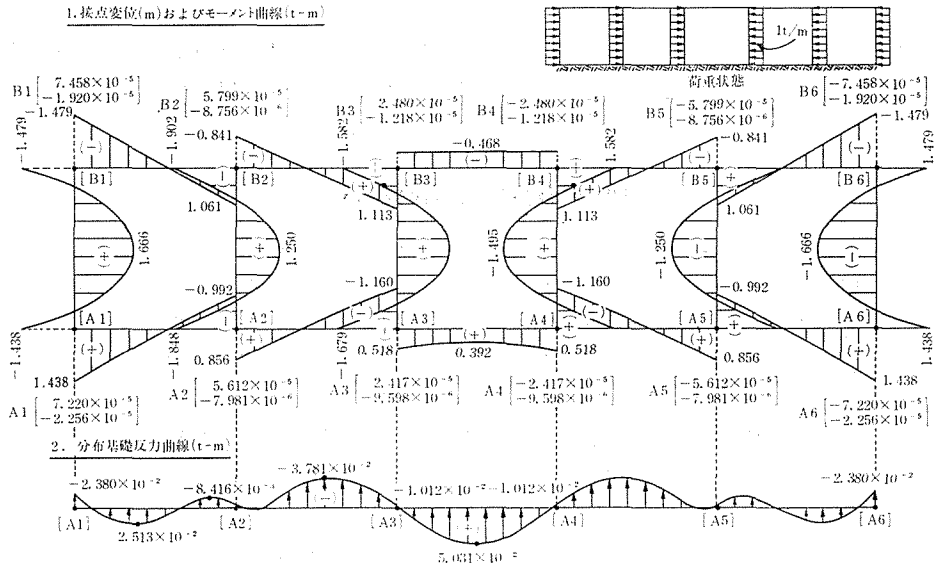
(1) 集中荷重の作用した系, 図-9.

第3単位構の上水平部材の中央点  $\kappa = 0.5$  に集中荷重 1t を作用した系である. 状態ベクトルは左右対称の動きを示す数値である. しかし, 第1, 第5単位構の末端に, 負反力が生じているが, ここでは構造物の自重を考慮していないため生じると考える.

(2) 自重設計荷重, 図-10.

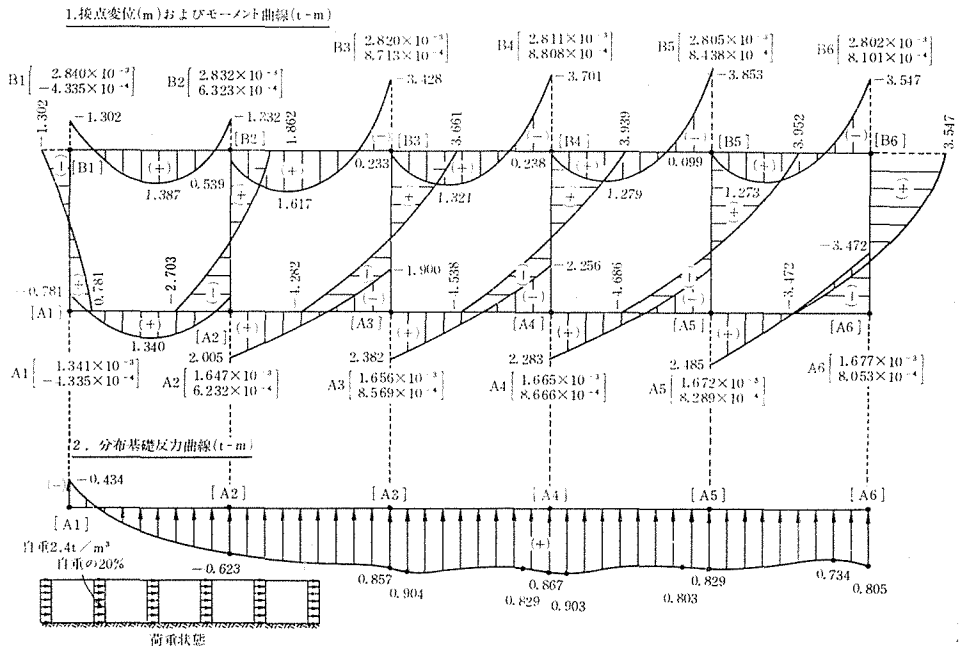
自重分として, 外力荷重 1t/m をあてて行った. 荷重マトリクスは, 水平部材について一様分布荷重, 鉛直部材の自重分として, 軸力  $F$  に相対する 荷重マトリクスを鉛直部材辺長分に積分演算を行い, 単位外力荷重として行う.





## (3) 鉛直部材水平一様分布荷重, 図-11.

構造物の左右対称鉛直部材にそれぞれ圧縮的水平一様分布荷重として,  $1 \text{ t/m}$  を作用した系である. 構造物に水平荷重を作用すると, 何んらかの形で負反力が生じる. 負反力の対策は後述する.



#### (4) 地震振動荷重, 図-12.

弾性床上ボックス・ラーメンの解析において, 地震荷重等の水平荷重が作用した系の解析はないものと伺っている. 構造体系の各部材に, 自重として  $2.4 \text{ t/m}^3$  を平面荷重になおし, この自重の20%を水平振動荷重として作用させた.

### 10. 負基礎反力の扱い

弾性床上のボックス・ラーメンの解析において, 構造体系に似合わない大きな集中荷重や, Winkler の仮定 における基礎係数が大きな値, いわゆる基礎が非常に硬い場合, また荷重状態が水平方向に作用する場合等いろいろの影響により負反力が生じる.

図-2における, 部材  $(r, 1)$  は Winkler の仮定 を取り入れた微分方程より解析を進めているが, しかし負反力が生じる場合, 浮き上った部材の挙動は弾性体からの影響を受けず, 一般部材の挙動をするため, 浮き上った部分だけ, 一般ラーメン挙動をもつ微分方程式に変える必要がある. ところが, 変えることにより, 負反力が生じる分岐点が移動し, 移動した部分だけ, どちらかの微分方程式を代入し, この演算を逐次くり返して, 分岐点を求める. 本文の例題における負反力は電算の容量の都合から, 本項による修正演算は行っていない. 今後の課題として行きたいと思う.

### 11. 部材断面の高さについて

本文は Winkler の仮定 を用いているが, 弾性体が硬い基礎ですと, 数値計算に, 良い結果を得ることができないと言われている.

本解析において, 弾性体は部材断面の中心軸と接していると仮定して進めたが, 実際には, 部材断面の中心軸より, ある高さを隔てて, 弾性体と接している. この部材断面の高さが, 部材の曲げ挙動により, 変形し, たわみが生じることにより, たわみ角の影響が, 軸変位に影響を及ぼすことになる. この関係を, 式 (2), (3) の基礎微分方程式に取り入れて, 曲げおよび軸挙動を含む6次の方程式

$$\frac{d^6 w}{d\rho^6} - 4\alpha^2 \frac{d^4 w}{d\rho^4} + 4\beta^4 \frac{d^2 w}{d\rho^2} - 4\alpha^2 \beta^4 w = 0 \quad (53)$$

を得る. Bernoulli-Euler の仮定 を許すかぎり, 部材断面の高さは比較的大きくても, また基礎係数も大きい数値をもっても, 数値計算の結果が期待できるものとする.

図-13は単径間の弾性床上のボックス・ラーメンを用いて, 弾性体が部材断面の中心軸に接している仮定の微分方程式 (2), (3) と式 (53) の部材断面のある高さを考慮した微分方程から出発して解析を進め, 基礎係数を変えて, 基礎反力の比較計算を試みた.

また部材断面の高さの比較計算も興味のあるものとする.

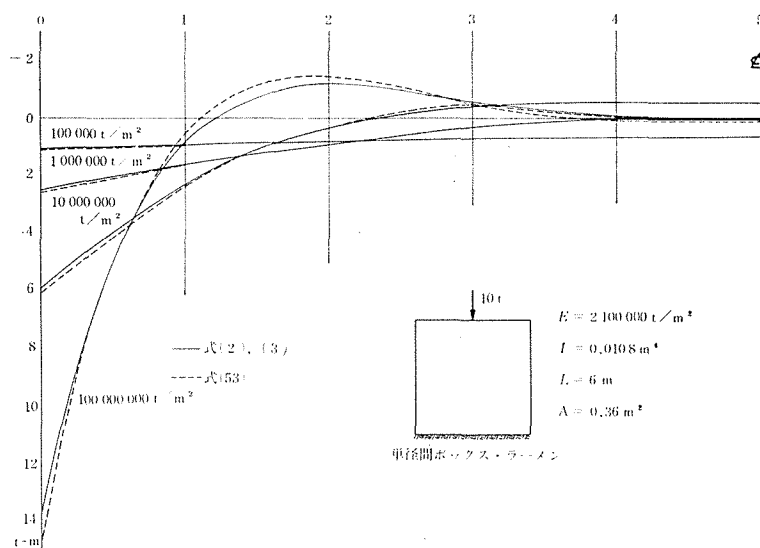


図-13. 基礎係数と基礎反力

## 12. あとがき

構造物の設計計算において、静力学のほかに振動学的解析が必要なことはいうまでもない。本構造体系の自由振動の解析も本文の手法と全く同じに進め、最終方程式より、固有値方程式に導びき、必要な固有値を得ることができる。

負反力の扱いを有利に考えられる有限要素的手法を演算子法にくり入れて、応用の広い解析ができると考える。

本文の数値計算例は当学部の子電子計算機 FACOM-231 で行った。本研究にあたって、当学部土木教室 吉沢孝和、浜野浩幹両教官より、いろいろと協力をいただき、ここに両氏に対し深く感謝の意を表する。

**記号** 本書で用いた記号を示す。

- $A$  = 部材断面積
- $E$  = 弾性係数
- $F$  = 軸力
- $I$  = 断面二次モーメント
- $L$  = 部材辺長
- $M$  = 曲げモーメント
- $P$  = 集中荷重

- $S$  = せん断力  
 $j, k$  = 基礎係数  
 $q$  = 一様分布荷重  
 $u$  = 軸変位  
 $w$  = たわみ  
 $x$  = 部材の流通座標  
 $L_{rm}^i$  = 移行子 ( $i, m = 1, 2, 3$ )  
 $L_r$  = 移行演算子  
 $A, B, C, D, H, M_1$  = 移行演算項  
 $F_r, F'_r$  = 供給演算子  
 $E_n, E'_n, M_2, M_3, [C]_n, [H]_n$  = 供給演算項  
 $J$  = 補給荷重項  
 $G$  = 図形マトリクス  
 $R$  = 変換マトリクス  
 $X, Z$  = 固有マトリクス  
 $\Omega$  = 流通マトリクス  
 $P(\rho), Q(\rho)$  = 座標マトリクス  
 $K(\rho)$  = 荷重マトリクス  
 $K, K_c, K_o$  = 荷重項  
 $U(\rho)$  = 一般変位  
 $U, U'$  = 基準領域, 共役領域の一般変位  
 $V(\rho)$  = 一般力  
 $V, V'$  = 基準領域, 共役領域の一般力  
 $W(\rho)$  = 状態ベクトル  
 $R(x)$  = 基礎反力  
 $\alpha = \sqrt{jL^2/E\bar{A}}$   
 $\beta = \sqrt[4]{kL^4/4EI}$   
 $\theta$  = たわみ角  
 $\kappa$  = 無次元荷重流通座標  
 $\lambda, \mu$  = 部分分布荷重の領域  
 $\rho = x/L$ , 無次元流通座標  
 $\phi$  = 荷重の傾き角  
 $[ \quad ]$  = 行マトリクス  
 $\{ \quad \}$  = 列マトリクス

### 参 考 文 献

- 1) B. Tanimoto: "Some Improvements on Proposed Eigen-Matrix Method," Proceedings of the ASCE, Structural Division, February, 1966, pp.101-119.

- 2) N. Yoshizawa and B. Tanimoto, G. Kostro, and C. C. Feng and P. E. Bartlett: "Finite Beams on Elastic Foundations, Discussion," Proceedings of the ASCE, Structural Division, February, 1967, pp. 570-575.
- 3) S. Natsume, N. Yoshizawa, H. Hamano, K. Ishikawa and B. Tanimoto: "Operational Method for Various Continuous Beams," Journal of the Faculty of Engineering, Shinshu University, Vol. 24, July, 1968, pp. 1-21.
- 4) H. Hamano and B. Tanimoto: "Tunnel Structure Analysis by the Operational Method," Journal of the Faculty of Engineering, Shinshu University, Vol. 25, October, 1968, pp. 13-19.
- 5) 谷本勉之助, 吉沢孝和: "詳説マトリクス応用力学," オーム社, 1966, pp. 219-266.
- 6) 吉沢孝和, 谷本勉之助: "演算子法による各種の連続ばりの解析," 土木学会論文集, 第165号, 1969年5月, pp. 1-10.

### Summary

#### Operational Method for Continuous Box Frames on Elastic Foundation

Kiyoshi ISHIKAWA, Bennosuke TANIMOTO, and Shotaro NATSUME

The present paper gives the analysis of continuous rectangular box frames resting on Winkler's elastic foundation by means of the operational method. It permits recursion, so that no large size inverse is necessary, and is compatible with horizontal, as well as vertical, forces. Computer solutions have proven the validity and accuracy of the analytical solution.