

複素数幾何学の円線図への応用

藤 井 真 一*

(昭和35年11月20日受理)

1. 緒 言

ある実変数 z の複素関数 $\dot{W}(z)$ が z の変化に応じて数平面に画く軌跡, あるいはベクトル $\dot{W}(z)$ の頂点が画く軌跡をベクトル軌跡と呼び, この軌跡が円となる場合の理論を円線図と略称している事は周知の通りである. しかして円は中心位置と半径の大きさが与えられれば簡単に画けるし, また軌跡が円となる複素関数の一形式

$$\dot{W} = \frac{\dot{a} + \dot{b}z}{c + \dot{d}z}$$

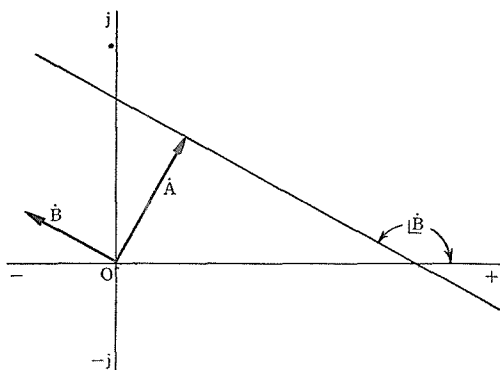
は交流電気回路の諸関係式に相当多く現れるので古くから交流電気回路および交流電気機械の研究に円線図が相当広く応用され, 重要な研究結果も数多い. しかし一見して平易に見えるためか円線図の基礎的理論の研究は Cour, Arnold, Bloch 諸氏の初期研究から後, 余り発展していない. そのため電気回路或は電気機械の研究に円線図を応用する人々は各自苦心して部分的理論を得て利用するか, あるいは型にはめて組立てられている結果を利用するのみである.

筆者はこの欠陥を省み, 円線図利用に必要な諸理論を出来るだけ明確に, しかも明快なものにし, 円線図理論を自由な形で電気回路および電気機械の諸問題の考究および計算の中に浸透出来るものになりたいと思い, この方面の研究に微力を向けている. 表題の複素数幾何学の円線図への応用もその一環である. 複素数幾何学は, ここ数年来新しくその重要性を再認識されている数学の一分野であることは周知の通りであるが, しかし複素数幾何学に含まれる諸理論の中には古くから用いられているものも多く, したがって勿論それらが古くから円線図理論へ応用されている. したがってここに述べる諸理論の取扱いも, どこから新しい, どこから古いと云い得ないが, ただここでは円線図を電気回路の考究, 計算に応用するとき必要な大方の理論的結果を, すべて複素数幾何のみで導出している. ここに取扱った事からは, 複素数幾何学以外の諸方法で導出されたものは多くの交流理論に関する著書, 円線図に関する著書で示されているから, それ等と比較して複素数幾何学法の優れていることが解っていただけると思う. 本文では第6章に両者の比較について少しふれている.

* 電気工学教室, 助教授

2. 直線の方程式

2.1 与えられた点 \dot{A} を過ぎ与えられた角 $\angle \dot{B}$ の傾きを持つ直線



第 1 図 $\dot{A} + \dot{B}z$ 直線

題意の直線 \dot{W} は

$$\dot{W} = \dot{A} + \dot{B}z, \quad (1)$$

ただし z は実変数である。(1) の共役ベクトルを取れば

$$\dot{W}_k = \dot{A}_k + \dot{B}_k z. \quad (2)$$

これと (1) から z を消去すれば

$$\dot{W} - \frac{\dot{B}}{\dot{B}_k} \dot{W}_k = \dot{A} - \frac{\dot{B}}{\dot{B}_k} \dot{A}_k. \quad (3)$$

すなわち題意の直線方程式は式 (3) で与えられる。原点を通る直線は上式において \dot{A} は零したがって \dot{A}_k も零とおけばよい。すなわち

$$\frac{\dot{W}}{\dot{B}} - \frac{\dot{W}_k}{\dot{B}_k} = 0. \quad (4)$$

2.2 与えられた点 \dot{A} を過ぎ、ベクトル \dot{A} と直角をなす直線

題意の直線 \dot{W} は

$$\dot{W} = \dot{A} + j\dot{A}z, \quad (5)$$

ただし z は実変数である。式 (5) の共役複素数をとれば

$$\dot{W}_k = \dot{A}_k - j\dot{A}_k z. \quad (6)$$

式 (5) と式 (6) から z を消去すれば

$$\frac{\dot{W}}{\dot{A}} + \frac{\dot{W}_k}{\dot{A}_k} - 2 = 0. \quad (7)$$

すなわち題意のような直線は式 (7) で与えられる．勿論これは式 (3) に $\dot{B} = j\dot{A}$ の関係を入れても得られる．

2. 3 与えられた二点 \dot{A} , \dot{B} を過ぎる直線

題意の直線 \dot{W} は

$$\frac{\dot{W} - \dot{A}}{\dot{B} - \dot{A}} = z. \quad (8)$$

ただし z は実変数である．

式 (8) の共役複素数を採れば

$$\frac{\dot{W}_k - \dot{A}_k}{\dot{B}_k - \dot{A}_k} = z. \quad (9)$$

式 (8) と式 (9) から z を消去すれば

$$\dot{W} - \frac{\dot{B} - \dot{A}}{\dot{B}_k - \dot{A}_k} \dot{W}_k = \dot{A} - \frac{\dot{B} - \dot{A}}{\dot{B}_k - \dot{A}_k} \dot{A}_k. \quad (10)$$

2. 4 与えられた一点から与えられた直線に下した垂線

与えられた直線を式 (4) の如きものとする．次に与えられた点 \dot{P} を過ぎ上の直線に直角な直線の方程式は式 (3) の表示法を採り

$$\dot{W} - \frac{j\dot{B}}{-j\dot{B}_k} \dot{W}_k = \dot{P} - \frac{j\dot{B}}{-j\dot{B}_k} \dot{P}_k.$$

すなわち

$$\dot{W} + \frac{\dot{B}}{\dot{B}_k} \dot{W}_k = \dot{P} + \frac{\dot{B}}{\dot{B}_k} \dot{P}_k. \quad (11)$$

求める直線の足 \dot{T} は式 (3) と式 (11) から \dot{W}_k を消去した時の \dot{W} の値で

$$\dot{T} = \frac{\dot{P} + \dot{A}}{2} + \frac{\dot{B}}{\dot{B}_k} \frac{\dot{P}_k - \dot{A}_k}{2}. \quad (12)$$

特に \dot{P} が原点と一致した場合には

$$\dot{T} = \frac{\dot{A}}{2} - \frac{\dot{B}}{\dot{B}_k} \frac{\dot{A}_k}{2}. \quad (13)$$

2. 5 直線群

例えば一点を通る直線群は式 (3) において

$$\frac{\dot{B}}{\dot{B}_k} = \varepsilon^{j2\theta}$$

と置き θ を変角とすればよろしい. また平行直線群は式 (3) において

$$\dot{A} = \dot{a} \lambda$$

とおき λ を実変数とすればよろしい.

3. 円 の 方 程 式

3. 1 与えられた中心位置 \dot{Q} と半径 \dot{R} を持つ円

題意の円 \dot{W} は

$$\dot{W} = \dot{Q} + \dot{R} \varepsilon^{jz} \quad (14)$$

で表わされる. ただし z は実変角である.

この共役複素数をとれば

$$\dot{W}_k = \dot{Q}_k + \dot{R}_k \varepsilon^{-jz}. \quad (15)$$

式 (14) と式 (20) から

$$\dot{W}\dot{W}_k - (\dot{Q}_k\dot{W} + \dot{Q}\dot{W}_k) + \dot{Q}\dot{Q}_k = \dot{R}\dot{R}_k, \quad (16)$$

すなわち式 (16) は円を表わす方程式で, しかも円方程式として基礎的なものである. 一般的に

$$\dot{W}\dot{W}_k + \dot{A}\dot{W} + \dot{B}\dot{W}_k + m = 0, \quad (17)$$

ただし \dot{A} , \dot{B} は複素定数, m は実変数である方程式において

$$\dot{A} = \dot{B}_k \quad (18)$$

の関係があれば式 (17) は, 中心位置 \dot{Q} は

$$\dot{Q} = -\dot{B}. \quad (19)$$

半径 $|\dot{R}|$ は

$$|\dot{R}|^2 = \dot{B}\dot{B}_k - m \quad (20)$$

の円を表わす.

3. 2 $\dot{W} = \frac{\dot{a} + \dot{b}z}{\dot{c} + \dot{d}z}$ から導かれる円方程式

$$\dot{W} = \frac{\dot{a} + \dot{b}z}{\dot{c} + \dot{d}z} \quad (21)$$

において, \dot{a} , \dot{b} , \dot{c} 及び \dot{d} は複素定数, z は実変数とすれば, \dot{W} の軌跡は円であることは周知の通りである. 式 (21) を変形して

$$z = \frac{\dot{c}\dot{W} - \dot{a}}{\dot{b} - \dot{d}\dot{W}} \quad (22)$$

これの共役複素数をとれば

$$z = \frac{\dot{c}_k\dot{W}_k - \dot{a}_k}{\dot{b}_k - \dot{d}_k\dot{W}_k}. \quad (23)$$

式 (22) と式 (23) から z を消去すれば

$$\dot{W}\dot{W}_k - \left(\frac{\dot{c}\dot{b}_k - \dot{d}\dot{a}_k}{\dot{c}\dot{d}_k - \dot{d}\dot{c}_k} \dot{W} + \frac{\dot{b}\dot{c}_k - \dot{a}\dot{d}_k}{\dot{d}\dot{c}_k - \dot{c}\dot{d}_k} \dot{W}_k \right) + \frac{\dot{a}\dot{b}_k - \dot{b}\dot{a}_k}{\dot{c}\dot{d}_k - \dot{d}\dot{c}_k} = 0. \quad (24)$$

式 (19) および式 (20) により円の中心 \dot{Q} および半径 \dot{R} は

$$\dot{Q} = \frac{\dot{a}\dot{d}_k - \dot{b}\dot{c}_k}{\dot{c}\dot{d}_k - \dot{d}\dot{c}_k}. \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \dot{R}\dot{R}_k &= \frac{\dot{c}\dot{b}_k - \dot{d}\dot{a}_k}{\dot{c}\dot{d}_k - \dot{d}\dot{c}_k} \frac{\dot{b}\dot{c}_k - \dot{a}\dot{d}_k}{\dot{d}\dot{c}_k - \dot{c}\dot{d}_k} - \frac{\dot{a}\dot{b}_k - \dot{b}\dot{a}_k}{\dot{c}\dot{d}_k - \dot{d}\dot{c}_k} \\ &= \frac{(\dot{a}\dot{d} - \dot{b}\dot{c})(\dot{a}_k\dot{d}_k - \dot{b}_k\dot{c}_k)}{(\dot{c}\dot{d}_k - \dot{d}\dot{c}_k)(\dot{d}\dot{c}_k - \dot{c}\dot{d}_k)}. \end{aligned} \quad (26)$$

3. 3 $\dot{W} = \frac{\dot{a} + \dot{b}\epsilon^{jz}}{\dot{c} + \dot{d}\epsilon^{jz}}$ から導かれる円方程式

$$\dot{W} = \frac{\dot{a} + \dot{b}\epsilon^{jz}}{\dot{c} + \dot{d}\epsilon^{jz}} \quad (27)$$

において \dot{a} , \dot{b} , \dot{c} および \dot{d} が複素定数, z は実変角とすれば, \dot{W} は円であることは周知の通りである. 式 (27) を変形して

$$\epsilon^{jz} = \frac{\dot{c}\dot{W} - \dot{a}}{\dot{b} - \dot{d}\dot{W}}. \quad (28)$$

共役複素数をとれば

$$\epsilon^{-jz} = \frac{\dot{c}_k\dot{W}_k - \dot{a}_k}{\dot{b}_k - \dot{d}_k\dot{W}_k}. \quad (29)$$

式 (28) と式 (29) から z を消去し

$$\dot{W}\dot{W}_k - \left(\frac{\ddot{c}\dot{a}_k - \ddot{d}\dot{b}_k}{\ddot{c}\dot{c}_k - \ddot{d}\dot{d}_k} \dot{W} + \frac{\ddot{a}\dot{c}_k - \ddot{b}\dot{d}_k}{\ddot{c}\dot{c}_k - \ddot{d}\dot{d}_k} \dot{W}_k \right) + \frac{\ddot{a}\dot{a}_k - \ddot{b}\dot{b}_k}{\ddot{c}\dot{c}_k - \ddot{d}\dot{d}_k} = 0. \quad (30)$$

円の中心位置 \dot{Q} および半径 \dot{R} は

$$\dot{Q} = \frac{\ddot{a}\dot{c}_k - \ddot{b}\dot{d}_k}{\ddot{c}\dot{c}_k - \ddot{d}\dot{d}_k}. \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \dot{R}\dot{R}_k &= \frac{(\ddot{c}\dot{a}_k - \ddot{d}\dot{b}_k)(\ddot{a}\dot{c}_k - \ddot{b}\dot{d}_k)}{(\ddot{c}\dot{c}_k - \ddot{d}\dot{d}_k)^2} - \frac{\ddot{a}\dot{a}_k - \ddot{b}\dot{b}_k}{\ddot{c}\dot{c}_k - \ddot{d}\dot{d}_k} \\ &= \frac{(\ddot{a}\dot{d} - \ddot{b}\dot{c})(\ddot{a}_k\dot{d}_k - \ddot{b}_k\dot{c}_k)}{(\ddot{c}\dot{c}_k - \ddot{d}\dot{d}_k)^2}. \end{aligned} \quad (32)$$

3. 4 $\dot{W}^2 - \dot{a}(1 + \epsilon^{jz})\dot{W} + \dot{b}\epsilon^{jz} = 0$ から導かれる円方程式

$$\dot{W}^2 - \dot{a}(1 + \epsilon^{jz})\dot{W} + \dot{b}\epsilon^{jz} = 0 \quad (33)$$

において $\angle \dot{b} = 2\angle \dot{a}$, z は実変角とする. 式 (33) を変形すれば

$$\epsilon^{jz} = \frac{\dot{W}^2 - \dot{a}\dot{W}}{\dot{a}\dot{W} - \dot{b}}. \quad (34)$$

共役複素数をとれば

$$\varepsilon^{-jz} = \frac{\dot{W}_k^2 - \dot{a}_k \dot{W}_k}{\dot{a}_k \dot{W}_k - \dot{b}_k}. \quad (35)$$

両式から z を消去すれば

$$\dot{W}^2 \dot{W}_k^2 - \dot{W} \dot{W}_k (\dot{a}_k \dot{W} + \dot{a} \dot{W}_k) + (\dot{a} \dot{b}_k \dot{W} + \dot{a}_k \dot{b} \dot{W}_k) - \dot{b} \dot{b}_k = 0, \quad (36)$$

しかるに $\angle \dot{b} = 2 \angle \dot{a}$ の関係があるので

$$\dot{a} \dot{b}_k = |\dot{b}| \dot{a}_k, \quad \dot{a}_k \dot{b} = |\dot{b}| \dot{a}. \quad (37)$$

ゆえに式 (36) は

$$(\dot{W} \dot{W}_k - |\dot{b}|) \{ \dot{W} \dot{W}_k - (\dot{a}_k \dot{W} + \dot{a} \dot{W}_k) + |\dot{b}| \} = 0. \quad (38)$$

よって \dot{W} は原点を中心とし半径 \dot{R} が

$$\dot{R} \dot{R}_k = |\dot{b}| \quad (39)$$

の円か、あるいは \dot{a} を中心とし半径 \dot{R} が

$$\dot{R} \dot{R}_k = \dot{a} \dot{a}_k - |\dot{b}| \quad (40)$$

の円であることを示している。この結果は少し複雑で直ちに了解でき兼ねることがらを含んでいると思うので少し説明を加える。式 (33) から

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \frac{\dot{a} (1 + \varepsilon^{jz})}{2} \pm \sqrt{\left\{ \frac{\dot{a} (1 + \varepsilon^{jz})}{2} \right\}^2 - \dot{b} \varepsilon^{jz}} \\ &= \dot{a} + \dot{a} \varepsilon^{jz/2} \left\{ \frac{-\varepsilon^{-jz/2} + \varepsilon^{jz/2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon^{-jz/2} + \varepsilon^{jz/2}}{2} \right)^2 - \frac{\dot{b}}{\dot{a}^2}} \right\}. \end{aligned} \quad (41)$$

上式において $\angle \dot{b} = 2 \angle \dot{a}$ なる条件があるので \dot{b}/\dot{a}^2 は実定数、また $\frac{1}{2} (\varepsilon^{-jz/2} + \varepsilon^{jz/2})$ は実変数なので

$$\left(\frac{\varepsilon^{-jz/2} + \varepsilon^{jz/2}}{2} \right)^2 > \frac{\dot{b}}{\dot{a}^2} \quad (42)$$

を満足する z の変域では

$$\dot{r} = \frac{-\varepsilon^{-jz/2} + \varepsilon^{jz/2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon^{-jz/2} + \varepsilon^{jz/2}}{2} \right)^2 - \frac{\dot{b}}{\dot{a}^2}} \quad (43)$$

の大きさ $\sqrt{\dot{r} \dot{r}_k}$ は

$$\begin{aligned} \sqrt{\dot{r} \dot{r}_k} &= \sqrt{\left\{ \frac{-\varepsilon^{-jz/2} + \varepsilon^{jz/2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon^{-jz/2} + \varepsilon^{jz/2}}{2} \right)^2 - \frac{\dot{b}}{\dot{a}^2}} \right\} \left\{ \frac{-\varepsilon^{jz/2} + \varepsilon^{-jz/2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon^{-jz/2} + \varepsilon^{jz/2}}{2} \right)^2 - \frac{\dot{b}}{\dot{a}^2}} \right\}} \\ &\quad \times \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon^{-jz/2} + \varepsilon^{jz/2}}{2} \right)^2 - \frac{\dot{b}}{\dot{a}^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2} \frac{-jz/2 + \varepsilon}{2} + \frac{jz/2}{2}\right)^2 - \frac{\dot{b}}{a^2} - \left(\frac{\varepsilon}{2} \frac{-jz/2 - \varepsilon}{2} + \frac{jz/2}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{1 - \frac{\dot{b}}{a^2}}
\end{aligned} \tag{44}$$

となり z の値には無関係に一定である。

すなわち式 (42) を満足する z の変域では \dot{W} は \dot{a} を中心位置とし半径 \dot{R} が

$$|\dot{R}| = |\dot{a}| \sqrt{1 - \frac{\dot{b}}{a^2}} = \sqrt{|\dot{a}|^2 - |\dot{b}|} \tag{45}$$

の円である。しかるに

$$\left(\frac{\varepsilon}{2} \frac{-jz/2 + \varepsilon}{2} + \frac{jz/2}{2}\right)^2 < \frac{\dot{b}}{a^2} \tag{46}$$

を満足する z の変域では式 (43) は

$$\dot{r} = \frac{-\varepsilon \frac{-jz/2 + \varepsilon}{2} + \frac{jz/2}{2}}{2} \pm j \sqrt{\frac{\dot{b}}{a^2} - \left(\frac{\varepsilon}{2} \frac{-jz/2 + \varepsilon}{2} + \frac{jz/2}{2}\right)^2} \tag{47}$$

となり

$$\begin{aligned}
\sqrt{\dot{r} \dot{r}_k} &= \sqrt{\left\{ \frac{-\varepsilon \frac{-jz/2 + \varepsilon}{2} + \frac{jz/2}{2}}{2} \pm j \sqrt{\frac{\dot{b}}{a^2} - \left(\frac{\varepsilon}{2} \frac{-jz/2 + \varepsilon}{2} + \frac{jz/2}{2}\right)^2} \right\} \times} \\
&\quad \times \left\{ \frac{-\varepsilon \frac{jz/2 + \varepsilon}{2} - \frac{jz/2}{2}}{2} \mp j \sqrt{\frac{\dot{b}}{a^2} - \left(\frac{\varepsilon}{2} \frac{-jz/2 + \varepsilon}{2} + \frac{jz/2}{2}\right)^2} \right\} \\
&= \frac{-\varepsilon \frac{-jz/2 + \varepsilon}{2} + \frac{jz/2}{2}}{2j} \mp \sqrt{\frac{\dot{b}}{a^2} - \left(\frac{\varepsilon}{2} \frac{-jz/2 + \varepsilon}{2} + \frac{jz/2}{2}\right)^2}
\end{aligned} \tag{48}$$

で z の値により変る。したがってこの z の変域では \dot{W} は \dot{a} を中心とする円とはならない。しかし

$$\dot{r}' = \frac{\varepsilon \frac{-jz/2 + \varepsilon}{2} + \frac{jz/2}{2}}{2} \pm j \sqrt{\frac{\dot{b}}{a^2} - \left(\frac{\varepsilon}{2} \frac{-jz/2 + \varepsilon}{2} + \frac{jz/2}{2}\right)^2} \tag{49}$$

なる \dot{r}' を考えれば、 \dot{r}' の大きさは

$$\begin{aligned}
\sqrt{\dot{r}' \dot{r}'_k} &= \sqrt{\left\{ \frac{\varepsilon \frac{-jz/2 + \varepsilon}{2} + \frac{jz/2}{2}}{2} \pm j \sqrt{\frac{\dot{b}}{a^2} - \left(\frac{\varepsilon}{2} \frac{-jz/2 + \varepsilon}{2} + \frac{jz/2}{2}\right)^2} \right\} \times} \\
&\quad \times \left\{ \frac{\varepsilon \frac{-jz/2 + \varepsilon}{2} + \frac{jz/2}{2}}{2} \pm j \sqrt{\frac{\dot{b}}{a^2} - \left(\frac{\varepsilon}{2} \frac{-jz/2 + \varepsilon}{2} + \frac{jz/2}{2}\right)^2} \right\}
\end{aligned}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\varepsilon^{-jz/2} + \varepsilon^{jz/2}}{2}\right)^2 + \frac{\dot{b}}{a^2} - \left(\frac{\varepsilon^{-jz/2} + \varepsilon^{jz/2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{\dot{b}}{a^2}}, \quad (50)$$

すなわち (46) を満足する z の変域では \dot{W} は原点を中心とし、半径 $|\dot{R}|$ が $\sqrt{|\dot{b}|}$ なる円である。

4. パワー表示用基線

表題のパワー表示用基線という語は余り適当でないが、ほかにこれより良いと思われる語も見出せないなのでこの表題を用いる。電気回路の諸量、例えば電流電圧等に関しての円線図において、この円線図を利用して直ちに電力を知ることができるようにすることが多い。

そのときに電力表示用尺度に基点と目盛りを与える線、これが表題の基線である。

4. 1 円の半極線

与えられた円を

$$\begin{aligned} \dot{W}\dot{W}_k - (\dot{Q}_k\dot{W} + \dot{Q}\dot{W}_k) + \dot{Q}\dot{Q}_k \\ - \dot{R}\dot{R}_k = 0 \end{aligned} \quad (51)$$

とする。この円の外に原点がある場合には極として原点、また原点が円内にあるときは極線として原点を通り \dot{Q} に直交する線を取り、これらの半極線の方程式を最初に求める。

4. 1. 1 原点が円外にある場合

原点 O から円に引いた接線の接点を求める方法は数種考えられるが、ここでは式 (51) の

円と \overline{OQ} を直径とする円との交点として求める。 \overline{OQ} を直径とする円の方程式は

$$\dot{W}\dot{W}_k - \left(\frac{\dot{Q}_k}{2}\dot{W} + \frac{\dot{Q}}{2}\dot{W}_k\right) = 0. \quad (52)$$

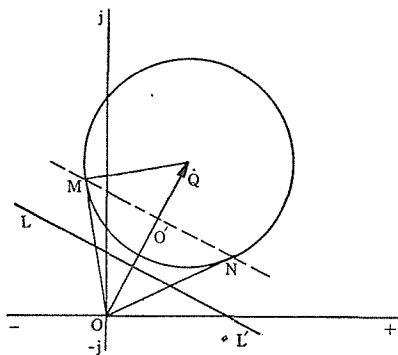
式 (51) と式 (52) から

$$\dot{W}_k = \frac{2(\dot{Q}\dot{Q}_k - \dot{R}\dot{R}_k) - \dot{Q}_k\dot{W}}{\dot{Q}}. \quad (53)$$

式 (54) を式 (53) に入れ

$$\dot{W}^2 - 2\left(\dot{Q} - \frac{\dot{R}\dot{R}_k}{\dot{Q}_k}\right)\dot{W} + \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_k}(\dot{Q}\dot{Q}_k - \dot{R}\dot{R}_k) = 0.$$

ゆえに



第2図 原点が円外にある半極線

$$\begin{aligned}\dot{W} &= \left(\dot{Q} - \frac{\dot{R}\dot{R}_k}{\dot{Q}_k} \right) \pm \sqrt{\left(\dot{Q} - \frac{\dot{R}\dot{R}_k}{\dot{Q}_k} \right)^2 - \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_k} (\dot{Q}\dot{Q}_k - \dot{R}\dot{R}_k)} \\ &= \frac{\sqrt{\dot{Q}\dot{Q}_k - \dot{R}\dot{R}_k} (\sqrt{\dot{Q}\dot{Q}_k - \dot{R}\dot{R}_k} \pm j\sqrt{\dot{R}\dot{R}_k})}{\dot{Q}_k},\end{aligned}$$

すなわち接点 \dot{M} および \dot{N} は

$$\left. \begin{aligned}\dot{M} &= \frac{\sqrt{\dot{Q}\dot{Q}_k - \dot{R}\dot{R}_k} (\sqrt{\dot{Q}\dot{Q}_k - \dot{R}\dot{R}_k} + j\sqrt{\dot{R}\dot{R}_k})}{\dot{Q}_k}, \\ \dot{N} &= \frac{\sqrt{\dot{Q}\dot{Q}_k - \dot{R}\dot{R}_k} (\sqrt{\dot{Q}\dot{Q}_k - \dot{R}\dot{R}_k} - j\sqrt{\dot{R}\dot{R}_k})}{\dot{Q}_k}.\end{aligned}\right\} \quad (54)$$

極線の方程式は \dot{M} 及び \dot{N} を通る直線で式 (10) により

$$\frac{\dot{W} - \dot{N}}{\dot{M} - \dot{N}} = \frac{\dot{W}_k - \dot{N}_k}{\dot{M}_k - \dot{N}_k},$$

すなわち

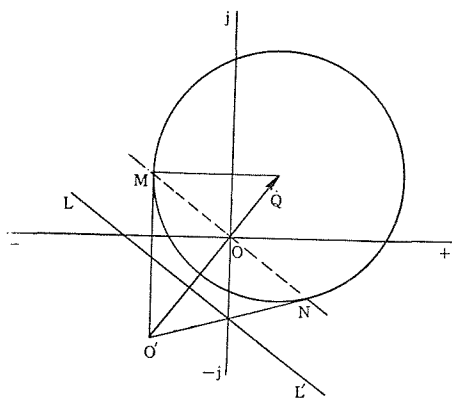
$$\dot{Q}_k \dot{W} + \dot{Q} \dot{W}_k - 2(\dot{Q}\dot{Q}_k - \dot{R}\dot{R}_k) = 0. \quad (55)$$

またこれは式 (51) と式 (52) から直接求めることもできる。半極線の方程式は $\dot{M}/2$, $\dot{N}/2$ を通る直線で

$$\frac{\dot{W} - \dot{N}/2}{\frac{1}{2}(\dot{M} - \dot{N})} = \frac{\dot{W}_k - \dot{N}_k/2}{\frac{1}{2}(\dot{M}_k - \dot{N}_k)},$$

すなわち

$$\dot{Q}_k \dot{W} + \dot{Q} \dot{W}_k - (\dot{Q}\dot{Q}_k - \dot{R}\dot{R}_k) = 0. \quad (56)$$



第3図 原点が円内にある半極線

4. 1. 2 原点が円内にある場合
極 O' を求める方法は色々あるが
ここでは

$$\overline{O'O} \cdot \overline{OQ} = \overline{OM}^2 \quad (57)$$

なる関係を用いる。原点 O を通り
 \dot{Q} に直交する直線の方程式は

$$\dot{Q}_k \dot{W} + \dot{Q} \dot{W}_k = 0. \quad (58)$$

この直線と \dot{Q} 円との交点は式 (51)
と式 (58) から \dot{W}_k を消去して求
められる。すなわち

$$\dot{W}^2 - \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_k} (\dot{Q}\dot{Q}_k - \dot{R}\dot{R}_k) = 0.$$

これから

$$\dot{W} = \pm j \sqrt{\frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_k} (\dot{R}\dot{R}_k - \dot{Q}\dot{Q}_k)},$$

すなわち

$$\left. \begin{aligned} \dot{M} &= j \sqrt{\frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_k} (\dot{R}\dot{R}_k - \dot{Q}\dot{Q}_k)}, \\ \dot{N} &= -j \sqrt{\frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_k} (\dot{R}\dot{R}_k - \dot{Q}\dot{Q}_k)}, \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \frac{\overline{OO'}}{\overline{OQ}} &= \frac{\overline{OM^2}}{\overline{OQ}} = \frac{j \sqrt{\frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_k} (\dot{R}\dot{R}_k - \dot{Q}\dot{Q}_k)} \left\{ -j \sqrt{\frac{\dot{Q}_k}{\dot{Q}} (\dot{R}\dot{R}_k - \dot{Q}\dot{Q}_k)} \right\}}{\sqrt{\dot{Q}\dot{Q}_k}} \\ &= \frac{\dot{R}\dot{R}_k - \dot{Q}\dot{Q}_k}{\sqrt{\dot{Q}\dot{Q}_k}}. \end{aligned} \quad (60)$$

ゆえに

$$\dot{O}' = - \frac{\sqrt{\dot{Q}\dot{Q}_k}}{\dot{Q}_k} \frac{\dot{R}\dot{R}_k - \dot{Q}\dot{Q}_k}{\sqrt{\dot{Q}\dot{Q}_k}} = - \frac{\dot{R}\dot{R}_k - \dot{Q}\dot{Q}_k}{\dot{Q}_k}. \quad (61)$$

半極線は $\dot{O}'/2$ の点を通り \dot{Q} と直交する直線で式 (7) の表示にならない容易に

$$\dot{Q}_k \dot{W} + \dot{Q} \dot{W}_k - (\dot{Q}\dot{Q}_k - \dot{R}\dot{R}_k) = 0 \quad (62)$$

を得る. 式 (62) と式 (56) は全く同形である.

4. 1. 3 任意の点 \dot{I} から半極線へ下した垂線の長さ

半極線に垂直な直線は \dot{Q} に平行である. \dot{I} をすぎ \dot{Q} に平行な直線の方程式は式 (3) により

$$\dot{Q}_k \dot{W} - \dot{Q} \dot{W}_k - (\dot{Q}_k \dot{I} - \dot{Q} \dot{I}_k) = 0. \quad (63)$$

この直線と半極線の交点 \dot{G} は式 (56) あるいは式 (62) と式 (63) から求めた \dot{W} の値として

$$\dot{G} = \frac{(\dot{Q}\dot{Q}_k - \dot{R}\dot{R}_k) + (\dot{Q}_k \dot{I} - \dot{Q} \dot{I}_k)}{2\dot{Q}_k}. \quad (64)$$

垂線の長さ \overline{IG} は

$$\dot{G} - \dot{I} = \frac{(\dot{Q}\dot{Q}_k - \dot{R}\dot{R}_k) - (\dot{Q}_k\dot{I} + \dot{Q}\dot{I}_k)}{2\dot{Q}_k} \quad (65)$$

特に \dot{I} が式 (51) に示す円周上の点であれば $\dot{I} = \dot{W}$ で

$$\dot{Q}_k\dot{I} + \dot{Q}\dot{I}_k = \dot{Q}_k\dot{W} + \dot{Q}\dot{W}_k = \dot{W}\dot{W}_k + \dot{Q}\dot{Q}_k - \dot{R}\dot{R}_k. \quad (66)$$

式 (66) を式 (65) に入れて

$$\dot{G} - \dot{I} = -\frac{\dot{W}\dot{W}_k}{2\dot{Q}_k} \quad (67)$$

これは円周上の点 \dot{W} から半極線に下した垂線の長さは $|\dot{W}|^2$ に比例することを示す。すなわち半極線は $|\dot{W}|^2$ に比例する量のパワー表示用基線となる。

なお一般に極線に平行な直線は

$$\dot{Q}_k\dot{W} + \dot{Q}\dot{W}_k - n(\dot{Q}\dot{Q}_k - \dot{R}\dot{R}_k) = 0 \quad (68)$$

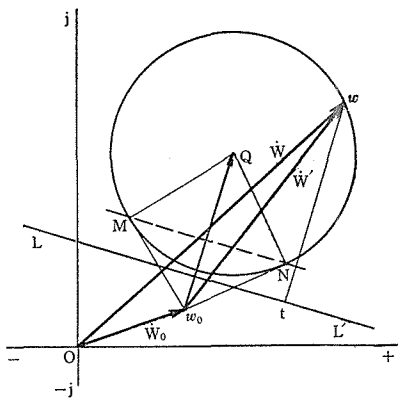
と表わし得る。ここに n は正或は負の実数である。この直線へ円周上の点 \dot{W} から下した垂線の長さは

$$\begin{aligned} \dot{G} - \dot{W} &= \frac{n(\dot{Q}\dot{Q}_k - \dot{R}\dot{R}_k) - (\dot{Q}_k\dot{W} + \dot{Q}\dot{W}_k)}{2\dot{Q}_k} \\ &= \frac{(n-1)(\dot{Q}\dot{Q}_k - \dot{R}\dot{R}_k)}{2\dot{Q}_k} - \frac{\dot{W}\dot{W}_k}{2\dot{Q}_k}. \end{aligned} \quad (69)$$

よって、 n を適当に選ぶことにより極線に平行な直線は

$$P \propto |\dot{W}|^2 + P_0$$

なる量を示すパワー表示用基線とすることができる。ここに P_0 は与えられた一定量(実



第4図 $k|\dot{W}'|^2$ 用基線

数)である。また円軌跡 \dot{W} が一定値 \dot{W}_0 と円 \dot{W}' の和であるとき $|\dot{W}'|^2$ に比例する量のパワー表示用基線としては \dot{W}_0 の頂点 w_0 を極とする半極線を用い得ることは説明を要しないであろう。第4図 LL' はこの場合のパワー表示用基線を示す。

4. 2 パワー表示用基線を有する量の和 あるいは差のパワー表示用基線

ある複素数面で \dot{P} (P 点) が、ある与えられた条件で移動するときこの \dot{P} に関連した2つの量 U_1 と U_2 が、それぞれパワ

一表示用基線直線 $L_1 L'_1$ 及び $L_2 L'_2$ を持つとする. この2つの基線が平行でない場合にはその交点を A とすれば式 (3) により $L_1 L'_1$ および $L_2 L'_2$ 直線はそれぞれ

$$\dot{W} - \dot{W}_k \varepsilon^{2j\theta_1} - (\dot{A} - \dot{A}_k \varepsilon^{j2\theta_1}) = 0. \quad (70)$$

$$\dot{W} - \dot{W}_k \varepsilon^{j2\theta_2} - (\dot{A} - \dot{A}_k \varepsilon^{j2\theta_2}) = 0 \quad (71)$$

と表すことが出来る. ここに θ_1 及び θ_2 はそれぞれ $L_1 L'_1$ 線, $L_2 L'_2$ 線が実数軸となす角である. \dot{P} よりこれら2線に下した垂線の足を \dot{T}_1 および \dot{T}_2 とし, $\dot{T}_1 - \dot{P}$ および $\dot{T}_2 - \dot{P}$ を求むれば式 (12) を参照して

$$\dot{T}_1 - \dot{P} = \frac{\dot{P}_k - \dot{A}_k}{2} \varepsilon^{j2\theta_1} - \frac{\dot{P} - \dot{A}}{2} = \varepsilon^{j\theta_1} \left(\frac{\dot{P}_k - \dot{A}_k}{2} \varepsilon^{j\theta_1} - \frac{\dot{P} - \dot{A}}{2} \varepsilon^{-j\theta_1} \right). \quad (72)$$

$$\dot{T}_2 - \dot{P} = \frac{\dot{P}_k - \dot{A}_k}{2} \varepsilon^{j2\theta_2} - \frac{\dot{P} - \dot{A}}{2} = \varepsilon^{j\theta_2} \left(\frac{\dot{P}_k - \dot{A}_k}{2} \varepsilon^{j\theta_2} - \frac{\dot{P} - \dot{A}}{2} \varepsilon^{-j\theta_2} \right). \quad (73)$$

垂線の長さをそれぞれ d_1, d_2 とすれば

$$d_1 = |\dot{T}_1 - \dot{P}| = \frac{(\dot{P}_k - \dot{A}_k) \varepsilon^{j\theta_1} - (\dot{P} - \dot{A}) \varepsilon^{-j\theta_1}}{2j} \quad (74)$$

$$d_2 = |\dot{T}_2 - \dot{P}| = \frac{(\dot{P}_k - \dot{A}_k) \varepsilon^{j\theta_2} - (\dot{P} - \dot{A}) \varepsilon^{-j\theta_2}}{2j} \quad (75)$$

したがってパワー表示用基線の意味にしたがって

$$U_1 = k_1 d_1 = \frac{(\dot{P}_k - \dot{A}_k) \varepsilon^{j\theta_1} - (\dot{P} - \dot{A}) \varepsilon^{-j\theta_1}}{2j} k_1, \quad (76)$$

$$U_2 = k_2 d_2 = \frac{(\dot{P}_k - \dot{A}_k) \varepsilon^{j\theta_2} - (\dot{P} - \dot{A}) \varepsilon^{-j\theta_2}}{2j} k_2, \quad (77)$$

ここに k_1, k_2 は実定数である. ゆえに

$$\begin{aligned} U_3 &= U_1 + U_2 \\ &= \frac{(\dot{P}_k - \dot{A}_k) (k_1 \varepsilon^{j\theta_1} + k_2 \varepsilon^{j\theta_2}) - (\dot{P} - \dot{A}) (k_1 \varepsilon^{-j\theta_1} + k_2 \varepsilon^{-j\theta_2})}{2j} \end{aligned} \quad (78)$$

である.

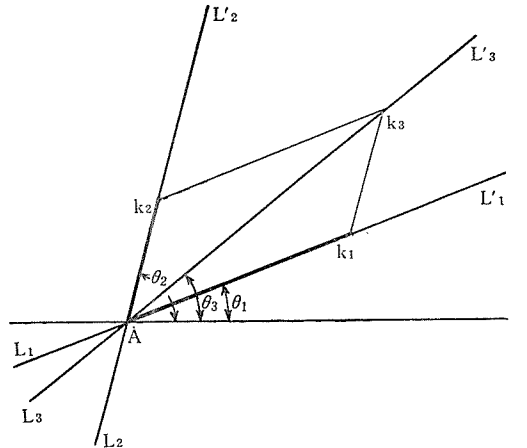
$$k_1 \varepsilon^{j\theta_1} + k_2 \varepsilon^{j\theta_2} = k_3 \varepsilon^{j\theta_3} \quad (79)$$

とおけば

$$U_3 = \frac{(\dot{P}_k - \dot{A}_k) \varepsilon^{j\theta_3} - (\dot{P} - \dot{A}) \varepsilon^{-j\theta_3}}{2j} k_3, \quad (80)$$

しかして上式の $\frac{(\dot{P}_k - \dot{A}_k) \varepsilon^{j\theta_3} - (\dot{P} - \dot{A}) \varepsilon^{-j\theta_3}}{2j}$ は \dot{A} を過ぎ実数軸と θ_3 をなす直線に \dot{P}

から下した垂線の長さであることは式 (74), 式 (75) を参照すれば了解されよう. すなわち $U_1 + U_2$ のパワー表示用基線は \dot{A} を過ぎ実軸と θ_3 をなす直線である. 式 (79) から



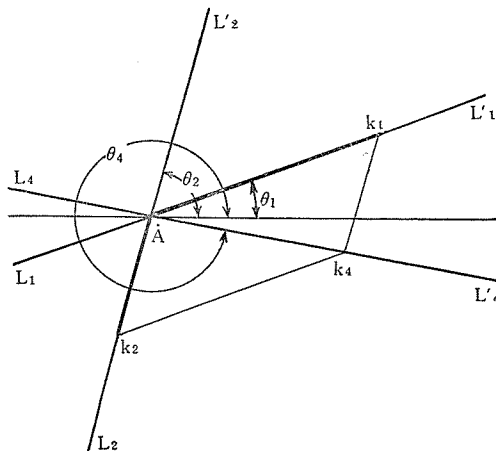
第5図 k_3 と θ_3

$$\theta_3 = \tan^{-1} \frac{k_1 \sin \theta_1 + k_2 \sin \theta_2}{k_1 \cos \theta_1 + k_2 \cos \theta_2}, \quad (81)$$

$$k_3 = \sqrt{(k_1 \cos \theta_1 + k_2 \cos \theta_2)^2 + (k_1 \sin \theta_1 + k_2 \sin \theta_2)^2} \quad (82)$$

である. 第5図は θ_3 および k_3 の図示的求め方を示す. また

$$\begin{aligned} U_4 &= U_1 - U_2 \\ &= \frac{(\dot{P}_k - \dot{A}_k)(k_1 \varepsilon^{j\theta_1} - k_2 \varepsilon^{j\theta_2}) - (\dot{P} - \dot{A})(k_1 \varepsilon^{-j\theta_1} - k_2 \varepsilon^{-j\theta_2})}{2j} \end{aligned} \quad (83)$$



第6図 k_4 と θ_4

であって

$$k_1 \varepsilon^{j\theta_1} - k_2 \varepsilon^{j\theta_2} = k_4 \varepsilon^{j\theta_4} \quad (84)$$

とおけば

$$U_4 = \frac{(\dot{P}_k - \dot{A}_k) \varepsilon^{j\theta_4} - (\dot{P} - \dot{A}) \varepsilon^{-j\theta_4}}{2j} k_4 \quad (85)$$

となり, $U_1 - U_2$ のパワー表示用基線も存在する. 第 6 図は θ_4 及び k_4 の図式的求め方を示す. もし, $L_1 L'_1$ と $L_2 L'_2$ が平行である場合には $L_1 L'_1$ 線及び $L_2 L'_2$ 線は

$$\dot{W} - \dot{W}_k \varepsilon^{j2\theta} - (n_1 \dot{A} - n_1 \dot{A}_k \varepsilon^{j2\theta}) = 0, \quad (86)$$

$$\dot{W} - \dot{W}_k \varepsilon^{j2\theta} - (n_2 \dot{A} - n_2 \dot{A}_k \varepsilon^{j2\theta}) = 0 \quad (87)$$

と表わしてもよい. ここに n_1, n_2 はある実定数である. したがって

$$d_1 = \frac{(\dot{P}_k - n_1 \dot{A}_k) \varepsilon^{j\theta} - (\dot{P} - n_1 \dot{A}) \varepsilon^{-j\theta}}{2j}, \quad (88)$$

$$d_2 = \frac{(\dot{P}_k - n_2 \dot{A}_k) \varepsilon^{j\theta} - (\dot{P} - n_2 \dot{A}) \varepsilon^{-j\theta}}{2j}. \quad (89)$$

したがって

$$U_1 = k_1 d_1 = \frac{(\dot{P}_k - n_1 \dot{A}_k) \varepsilon^{j\theta} - (\dot{P} - n_1 \dot{A}) \varepsilon^{-j\theta}}{2j} k_1, \quad (90)$$

$$U_2 = k_2 d_2 = \frac{(\dot{P}_k - n_2 \dot{A}_k) \varepsilon^{j\theta} - (\dot{P} - n_2 \dot{A}) \varepsilon^{-j\theta}}{2j} k_2, \quad (91)$$

$$U_3 = U_1 + U_2$$

$$= \frac{1}{2j} \left\{ (\dot{P}_k - \frac{n_1 k_1 + n_2 k_2}{k_1 + k_2} \dot{A}_k) \varepsilon^{j\theta} - (\dot{P} - \frac{n_1 k_1 + n_2 k_2}{k_1 + k_2} \dot{A}) \varepsilon^{-j\theta} \right\} (k_1 + k_2), \quad (92)$$

$$\text{しかして } \frac{1}{2j} \left\{ (\dot{P}_k - \frac{n_1 k_1 + n_2 k_2}{k_1 + k_2} \dot{A}_k) \varepsilon^{j\theta} - (\dot{P} - \frac{n_1 k_1 + n_2 k_2}{k_1 + k_2} \dot{A}) \varepsilon^{-j\theta} \right\} \text{ は } \frac{n_1 k_1 + n_2 k_2}{k_1 + k_2} \dot{A}$$

なる点を通り実軸と θ をなす直線 $L_3 L'_3$ に \dot{P} から下した垂線の長さである. ゆえに $L_3 L'_3$ は U_3 のパワー表示用基線である. 比例定数 k_3 は

$$k_3 = k_1 + k_2. \quad (93)$$

$$U_4 = U_1 - U_2$$

のパワー表示用基線は $\frac{n_1 k_1 - n_2 k_2}{k_1 - k_2} \dot{A}$ なる点を通り実軸と θ をなす直線である. 比例定数 k_4 は

$$k_4 = k_1 - k_2. \quad (94)$$

5. 円 群

5. 1 直線群とその逆数円群

直線の方程式 (3) は

$$\dot{A} = A \varepsilon^{j\theta_A}, \quad \dot{B} = B \varepsilon^{j\theta_B} \quad (95)$$

とすれば

$$\dot{W} - \varepsilon^{j2\theta_B} \dot{W}_k - A \left\{ \varepsilon^{j\theta_A} - \varepsilon^{j(2\theta_B - \theta_A)} \right\} = 0. \quad (96)$$

式 (96) において θ_A 及び θ_B が一定で A が変化すれば \dot{W} は実軸と θ_B 角をなす平行直線群となる. また A , θ_A が一定で θ_B が変化すれば \dot{W} は \dot{A} の頂点を通る直線群となる.

\dot{W} の逆数を \dot{V} とすれば, $\dot{W} = \frac{1}{\dot{V}}$ を式 (96) に入れ

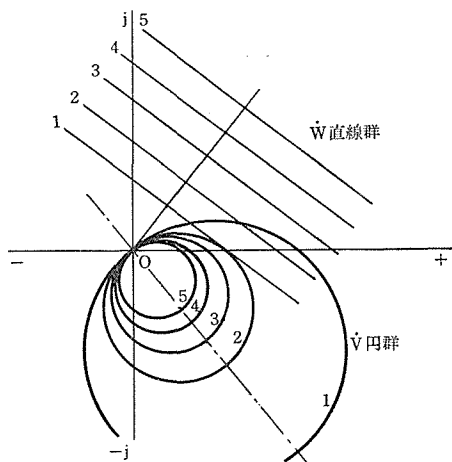
$$\dot{V} \dot{V}_k - \left[\frac{\dot{V}}{A \left\{ \varepsilon^{-j\theta_A} - \varepsilon^{-j(2\theta_B - \theta_A)} \right\}} + \frac{\dot{V}_k}{A \left\{ \varepsilon^{j\theta_A} - \varepsilon^{j(2\theta_B - \theta_A)} \right\}} \right] = 0. \quad (97)$$

これによってただちに \dot{V} は中心位置 \dot{Q} 及び半径 \dot{R} が

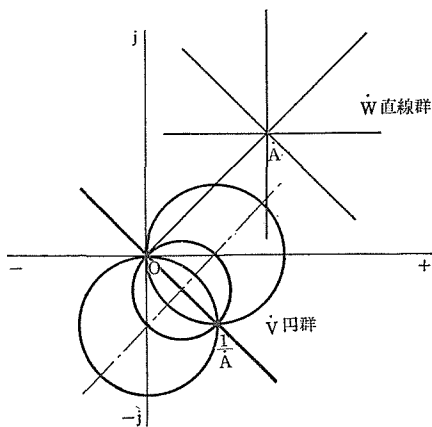
$$\dot{Q} = \frac{1}{A \left\{ \varepsilon^{j\theta_A} - \varepsilon^{j(2\theta_B - \theta_A)} \right\}} = \frac{1}{A \varepsilon^{j\theta_B} \left\{ \varepsilon^{j(\theta_A - \theta_B)} - \varepsilon^{-j(\theta_A - \theta_B)} \right\}}, \quad (98)$$

$$\dot{R} \dot{R}_k = \dot{Q} \dot{Q}_k \quad (99)$$

なる原点を通る円であることがわかる. \dot{W} が平行直線群であるときは \dot{V} 円の中心位置 \dot{Q} は原点をすぎ実軸と $-(\theta_B + \frac{\pi}{2})$ をなす直線上にあることは式 (98) からただちに解る.



第7図 平行直線群とその逆数円群



第8図 一点を通る直線群とその円群

第7図はこの円群を示す。\$\dot{W}\$ が \$\dot{A}\$ をすぎる直線群であるときは

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \frac{1}{2\dot{A}} + \left[\frac{1}{\dot{A}\{1 - \epsilon^{j(2\theta_B - 2\theta_A)}\}} - \frac{1}{2\dot{A}} \right] \\ &= \frac{1}{2\dot{A}} - \frac{j}{2\dot{A}} \cot(\theta_B - \theta_A).\end{aligned}\quad (100)$$

すなわち \$\dot{Q}\$ は \$1/2\dot{A}\$ の点を通り \$1/\dot{A}\$ ベクトルに直交する直線上にある。なおこの円群は \$1/\dot{A}\$ の頂点を共有することは説明の要はないと思う。以上複素数幾何学以外の従来行われて来た諸方法に比較してみればいかに複素数幾何学が直裁明快であるかがわかる。第8図はこの円群を示す。

5. 2 円群とその逆数円群

5. 2. 1 同心円群とその逆数円群

$$\dot{W}\dot{W}_k - (\dot{Q}_k\dot{W} + \dot{Q}\dot{W}_k) + \dot{Q}\dot{Q}_k - \dot{R}\dot{R}_k = 0 \quad (101)$$

において \$|\dot{R}|\$ が変化するとすれば上式は \$\dot{Q}\$ 点を中心とする同心円群となる。その逆数 \$\dot{V}\$ は \$\dot{W} = \frac{1}{\dot{V}}\$ を式 (101) に入れ

$$\dot{V}\dot{V}_k - \left(\frac{\dot{Q}}{\dot{Q}\dot{Q}_k - \dot{R}\dot{R}_k} \dot{V} + \frac{\dot{Q}_k}{\dot{Q}\dot{Q}_k - \dot{R}\dot{R}_k} \dot{V}_k \right) + \frac{1}{\dot{Q}\dot{Q}_k - \dot{R}\dot{R}_k} = 0. \quad (102)$$

\$\dot{V}\$ は円群でその中心位置 \$\dot{q}\$ は

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}_k}{\dot{Q}\dot{Q}_k - \dot{R}\dot{R}_k}. \quad (103)$$

その半径 \$r\$ は

$$r = \sqrt{\frac{\dot{Q}\dot{Q}_k}{(\dot{Q}\dot{Q}_k - \dot{R}\dot{R}_k)^2} - \frac{1}{\dot{Q}\dot{Q}_k - \dot{R}\dot{R}_k}} = \frac{\sqrt{\dot{R}\dot{R}_k}}{\dot{Q}\dot{Q}_k - \dot{R}\dot{R}_k}. \quad (104)$$

\$|\dot{R}| \rightarrow 0\$ のとき

$$\dot{q} \rightarrow \frac{1}{\dot{Q}}, \quad r \rightarrow 0. \quad (105)$$

\$|\dot{R}| = |\dot{Q}|\$ のとき

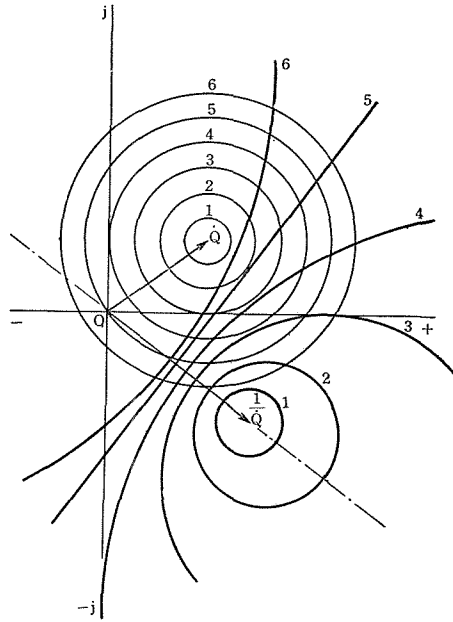
$$\dot{Q}\dot{V} + \dot{Q}_k\dot{V}_k - 1 = 0. \quad (106)$$

これは \$1/2\dot{Q}\$ の点を通り \$1/\dot{Q}\$ ベクトルに直交する直線である。

\$|\dot{R}| \rightarrow \infty\$ のときは

$$\dot{q} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0. \quad (107)$$

式 (102) に示す円群は後で 5. 2. 3 で示すように原点と $1/\dot{Q}$ からの距離の比が一定である円群である. 第 9 図は同心円群 $[\dot{W}]$ とその逆数円群 $[\dot{V}]$ を示す.



第 9 図 同心円群とその逆数円群

5. 2. 2 2 定点を共有する円群とその逆数円群

2 点 \dot{A}, \dot{B} を共有する円群は線分 \overline{AB} の同じ側にあつて A, B に等しい角を見込む点を先端とするベクトルの軌跡円群と見てもよい.

すなわち

$$\frac{(\dot{W} - \dot{A})(\dot{W}_k - \dot{B}_k)}{(\dot{W} - \dot{B})(\dot{W}_k - \dot{A}_k)} = \varepsilon^{j2\theta} \quad (108)$$

これから

$$\begin{aligned} \dot{W}\dot{W}_k - & \left(\frac{\dot{B}_k\varepsilon^{-j\theta} - \dot{A}_k\varepsilon^{j\theta}}{\varepsilon^{-j\theta} - \varepsilon^{j\theta}} \dot{W} + \frac{\dot{B}\varepsilon^{j\theta} - \dot{A}\varepsilon^{-j\theta}}{\varepsilon^{j\theta} - \varepsilon^{-j\theta}} \dot{W}_k \right) \\ & + \frac{\dot{A}_k\dot{B}\varepsilon^{j\theta} - \dot{A}\dot{B}_k\varepsilon^{-j\theta}}{\varepsilon^{j\theta} - \varepsilon^{-j\theta}} = 0. \end{aligned} \quad (109)$$

ここに θ は \dot{W} が \dot{A}, \dot{B} に見込む角であつて, θ の種々の値に応じ \dot{A}, \dot{B} を通過する多くの円となる. 円の中心 \dot{Q} は

$$\begin{aligned}
 \dot{Q} &= \frac{\dot{B}\varepsilon^{j\theta} - \dot{A}\varepsilon^{-j\theta}}{\varepsilon^{j\theta} - \varepsilon^{-j\theta}} = \frac{\dot{A} + \dot{B}}{2} - \frac{\dot{A} - \dot{B}}{2} \frac{\varepsilon^{j\theta} + \varepsilon^{-j\theta}}{\varepsilon^{j\theta} - \varepsilon^{-j\theta}} \\
 &= \frac{\dot{A} + \dot{B}}{2} - \frac{\dot{A} - \dot{B}}{2j} \cot\theta.
 \end{aligned} \tag{110}$$

又半径 R は

$$\begin{aligned}
 R &= \sqrt{\frac{\dot{B}\varepsilon^{j\theta} - \dot{A}\varepsilon^{-j\theta}}{\varepsilon^{j\theta} - \varepsilon^{-j\theta}} \frac{\dot{B}_k\varepsilon^{-j\theta} - \dot{A}_k\varepsilon^{j\theta}}{\varepsilon^{-j\theta} - \varepsilon^{j\theta}} - \frac{\dot{A}_k\dot{B}\varepsilon^{j\theta} - \dot{A}\dot{B}_k\varepsilon^{-j\theta}}{\varepsilon^{j\theta} - \varepsilon^{-j\theta}}} \\
 &= \frac{\sqrt{(\dot{A} - \dot{B})(\dot{A}_k - \dot{B}_k)}}{2 \sin\theta}.
 \end{aligned} \tag{111}$$

\dot{W} の逆数を \dot{V} とすれば $\dot{W} = \frac{1}{\dot{V}}$ を式 (108) に入れ,

$$\frac{(\dot{V} - 1/\dot{A})(\dot{V}_k - 1/\dot{B}_k)}{(\dot{V} - 1/\dot{B})(\dot{V}_k - 1/\dot{A}_k)} = \frac{\dot{B}\dot{A}_k}{\dot{A}\dot{B}_k} \varepsilon^{j2\theta} = \varepsilon^{j2(\theta-\alpha)}. \tag{112}$$

ここに

$$\alpha = \angle \dot{A}\dot{B}_k \tag{113}$$

ゆえに \dot{V} は $1/\dot{A}$ と $1/\dot{B}$ の 2 点を共有する円群である. \dot{V} の $1/\dot{A}$, $1/\dot{B}$ を見込む角は $\theta - \alpha$ である.

5. 2. 3 2 定点からの距離の比が一定である円群とその逆数円群

2 定点を \dot{A} , \dot{B} とする. 下の式

$$\frac{(\dot{W} - \dot{A})(\dot{W}_k - \dot{A}_k)}{(\dot{W} - \dot{B})(\dot{W}_k - \dot{B}_k)} = \mu^2. \tag{114}$$

で μ は \dot{W} と \dot{A} , \dot{B} からの距離の比であって, μ が色々と異なった値を採れば \dot{W} は円群となる. 式 (114) を変形すれば

$$\dot{W}\dot{W}_k - \left(\frac{\dot{A}_k - \mu^2\dot{B}_k}{1 - \mu^2} \dot{W} + \frac{\dot{A} - \mu^2\dot{B}}{1 - \mu^2} \dot{W}_k \right) + \frac{\dot{A}\dot{A}_k - \mu^2\dot{B}\dot{B}_k}{1 - \mu^2} = 0 \tag{115}$$

となり, 円の中心位置 \dot{Q} は

$$\dot{Q} = \frac{\dot{A} - \mu^2\dot{B}}{1 - \mu^2} = \dot{A} + \frac{\mu^2}{\mu^2 - 1} (\dot{B} - \dot{A}). \tag{116}$$

円の半径 R は

$$R = \sqrt{\frac{(\dot{A} - \mu^2\dot{B})(\dot{A}_k - \mu^2\dot{B}_k)}{(1 - \mu^2)^2} - \frac{\dot{A}\dot{A}_k - \mu^2\dot{B}\dot{B}_k}{1 - \mu^2}}$$

$$= \frac{\mu}{1 - \mu^2} \sqrt{(\dot{A} - \dot{B})(\dot{A}_k - \dot{B}_k)}. \quad (117)$$

\dot{W} の逆数を \dot{V} とすれば, $\dot{W} = \frac{1}{\dot{V}}$ を式 (115) に入れ

$$\begin{aligned} \dot{V}\dot{V}_k - \left(\frac{\dot{A} - \mu^2\dot{B}}{\dot{A}\dot{A}_k - \mu^2\dot{B}\dot{B}_k} \dot{V} + \frac{\dot{A}_k - \mu^2\dot{B}_k}{\dot{A}\dot{A}_k - \mu^2\dot{B}\dot{B}_k} \dot{V}_k \right) \\ + \frac{1 - \mu^2}{\dot{A}\dot{A}_k - \mu^2\dot{B}\dot{B}_k} = 0. \end{aligned} \quad (118)$$

\dot{V} の中心位置 \dot{q} は

$$\dot{q} = \frac{\dot{A}_k - \mu^2\dot{B}_k}{\dot{A}\dot{A}_k - \mu^2\dot{B}\dot{B}_k} = \frac{1}{\dot{A}} + \frac{\mu'^2(1/\dot{A} - 1/\dot{B})}{\mu'^2 - 1}. \quad (119)$$

半径 r は

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{\dot{A}_k - \mu^2\dot{B}_k}{\dot{A}\dot{A}_k - \mu^2\dot{B}\dot{B}_k} \frac{\dot{A} - \mu^2\dot{B}}{\dot{A}\dot{A}_k - \mu^2\dot{B}\dot{B}_k} - \frac{1 - \mu^2}{\dot{A}\dot{A}_k - \mu^2\dot{B}\dot{B}_k}} \\ &= \mu' \sqrt{\frac{(1/\dot{A} - 1/\dot{B})(1/\dot{A}_k - 1/\dot{B}_k)}{1 - \mu'^2}}. \end{aligned} \quad (120)$$

ただし

$$\mu' = \mu \sqrt{\frac{\dot{B}\dot{B}_k}{\dot{A}\dot{A}_k}} \quad (121)$$

である. すなわち \dot{V} は $1/\dot{A}$ と $1/\dot{B}$ からの距離の比が μ' である円群となる. 特に例えば \dot{A} が原点上にある場合には式 (118) から

$$\dot{V}\dot{V}_k - \left(\frac{1}{\dot{B}_k} \dot{V} + \frac{1}{\dot{B}} \dot{V}_k \right) + \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2\dot{B}\dot{B}_k} = 0 \quad (122)$$

で \dot{V} は $1/\dot{B}$ を中心とする同心円群である.

5. 1. 1 はこの逆の場合を述べてある.

5. 3 直交円群

二組の円群において, 一組に属する何れの円も, 他の組に属する何れの円とも直交するとき, この二組の円群を直交円群という. \dot{w} の軌跡が円であるとき

$$\dot{W} = \frac{\dot{A} + \dot{B}\dot{w}}{\dot{a} + \dot{b}\dot{w}} \quad [\dot{A}, \dot{B}, \dot{a}, \dot{b} \text{ は複素定数}] \quad (123)$$

は円で, もし \dot{w}_1 と \dot{w}_2 が互いに直交する円群〔直線群も含める〕であれば, 等角写像の理によって

$$\dot{W}_1 = \frac{\dot{A} + \dot{B}\dot{w}_1}{\dot{a} + \dot{b}\dot{w}_1} \equiv \dot{W}_\infty + \frac{\dot{C}}{\dot{a} + \dot{b}\dot{w}_1} \quad (124)$$

と

$$\dot{W}_2 = \frac{\dot{A} + \dot{B}\dot{w}_2}{\dot{a} + \dot{b}\dot{w}_2} \equiv \dot{W}_\infty + \frac{\dot{C}}{\dot{a} + \dot{b}\dot{w}_2} \quad (125)$$

の円群は直交するが、これを複素数幾何で取扱ってみる。

5. 3. 1 \dot{w}_1, \dot{w}_2 がいずれも平行直線群である場合

\dot{w}_1 が平行直線群であれば、これに直交する円群は平行直線群である。今 \dot{w}_1 が実軸に平行な直線群、 \dot{w}_2 は虚軸に平行な直線群とすれば

$$\dot{w}_1 - jY = \dot{w}_{1k} + jY. \quad (126)$$

$$\frac{\dot{w}_2 - X}{j} = \frac{\dot{w}_{2k} - X}{-j}. \quad (127)$$

ここに Y は \dot{w}_1 直線と実軸との距離、 X は \dot{w}_2 直線と虚軸との距離である。今

$$\dot{v}_1 = \dot{a} + \dot{b}\dot{w}_1, \quad (128)$$

$$\dot{v}_2 = \dot{a} + \dot{b}\dot{w}_2 \quad (129)$$

と写像変換を行えば、式 (128) を式 (126) に入れ

$$\frac{\dot{v}_1 - (\dot{a} + j\dot{b}Y)}{\dot{b}} = \frac{\dot{v}_{1k} - (\dot{a}_k - j\dot{b}_kY)}{\dot{b}_k}. \quad (130)$$

これは実軸と角 $\angle \dot{b}$ をなす直線群であり、式 (129) を式 (127) に入れ

$$\frac{\dot{v}_2 - (\dot{a} + X\dot{b})}{j\dot{b}} = \frac{\dot{v}_{2k} - (\dot{a}_k + X\dot{b}_k)}{-j\dot{b}_k}. \quad (131)$$

これは実軸と角 $\angle j\dot{b}$ をなす直線群である。すなわち \dot{v}_1 と \dot{v}_2 は直交する直線群である。次に

$$\dot{W}_1' = \frac{\dot{C}}{\dot{a} + \dot{b}\dot{w}_1} = \frac{\dot{C}}{\dot{v}_1}, \quad (132)$$

$$\dot{W}_2' = \frac{\dot{C}}{\dot{a} + \dot{b}\dot{w}_2} = \frac{\dot{C}}{\dot{v}_2} \quad (133)$$

の写像変換を行えば、 $\dot{v}_1 = \dot{C}/\dot{W}_1'$ を式 (130) に入れ

$$\dot{W}_1' \dot{W}'_{1k} - \left\{ \frac{j \frac{\dot{C}_k}{\dot{b}_k}}{\frac{1}{j} \left(\frac{\dot{a}}{\dot{b}} - \frac{\dot{a}_k}{\dot{b}_k} \right) + 2Y} \dot{W}_1' + \frac{-j \frac{\dot{C}}{\dot{b}}}{\frac{1}{j} \left(\frac{\dot{a}}{\dot{b}} - \frac{\dot{a}_k}{\dot{b}_k} \right) + 2Y} \dot{W}'_{1k} \right\} = 0. \quad (134)$$

また $\dot{v}_2 = \dot{C}/\dot{W}_2'$ を式 (131) に入れ

$$\dot{W}_2' \dot{W}'_{2k} - \left\{ \frac{\frac{\dot{C}_k}{\dot{b}_k}}{\frac{\dot{a}}{\dot{b}} + \frac{\dot{a}_k}{\dot{b}_k} + 2X} \dot{W}_2' + \frac{\frac{\dot{C}}{\dot{b}}}{\frac{\dot{a}}{\dot{b}} + \frac{\dot{a}_k}{\dot{b}_k} + 2X} \dot{W}'_{2k} \right\} = 0. \quad (135)$$

すなわち \dot{W}_1' は原点を通り、中心が $(-j\dot{C}/\dot{b})\lambda_1$ [λ_1 は実変数] にある円群である。したがって式 (124) で表される \dot{W}_1 は \dot{W}_∞ 点を通り中心が $\dot{W}_\infty + (-j\dot{C}/\dot{b})\lambda_1$ の円群である。

また \dot{W}_2' は原点を通り中心が $\frac{\dot{C}}{\dot{b}}\lambda_2$ [λ_2 は実変数] にある円群である。したがって式 (125)

で表される \dot{W}_2 は \dot{W}_∞ 点を通り、中心が $\dot{W}_\infty + \dot{C}/\dot{b}\lambda_2$ にある円群である。 \dot{W}_1 と \dot{W}_2 の直交は簡単に証明出来るからばぶく。さらに

$$\dot{V}_1 = \frac{\dot{\alpha} + \dot{\beta}\dot{W}_1}{\dot{\gamma} + \dot{\delta}\dot{W}_1}, \quad (136)$$

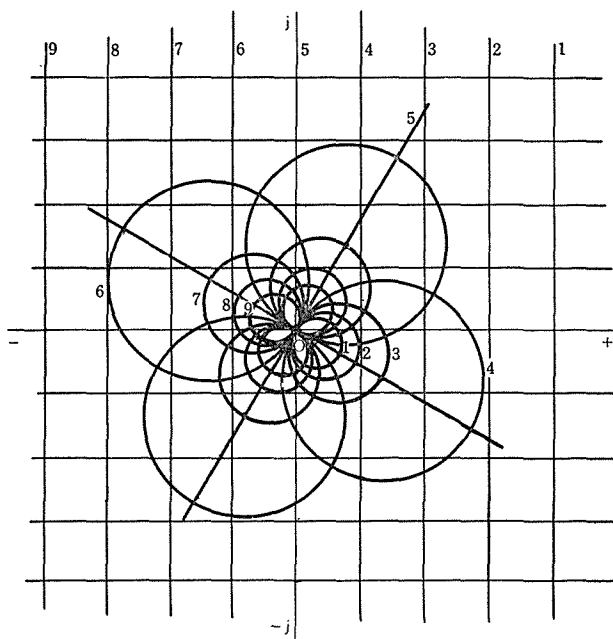
$$\dot{V}_2 = \frac{\dot{\alpha} + \dot{\beta}\dot{W}_2}{\dot{\gamma} + \dot{\delta}\dot{W}_2} \quad (137)$$

の写像変換を行っても、式 (136) に式 (124) の \dot{W}_1 を代入、また式 (137) に式 (125) の \dot{W}_2 を代入すれば容易に

$$\dot{V}_1 = \frac{\dot{A}' + \dot{B}' \dot{w}_1}{\dot{a}' + \dot{b}' \dot{w}_1}, \quad (138)$$

$$\dot{V}_2 = \frac{\dot{A}' + \dot{B}' \dot{w}_2}{\dot{a}' + \dot{b}' \dot{w}_2} \quad (139)$$

の形に整えることが出来、 \dot{W}_1 と \dot{W}_2 が直交円群であることを証したと全く同様に出来る。すなわち直交直線群をもとし、これに何度一次式の写像変換をくりかえしても、得らるる直交円群は一点を共有する形のものの種類だけである。第10図は直交直線群の一次式写像変換によって得らるる直交円群の一例として $\frac{\dot{C}}{\dot{w}_1}$ と $\frac{\dot{C}}{\dot{w}_2}$ の関係を示す。



第10図 直交直線群の写像変換によつて得られる直交円群

5. 3. 2 \dot{w}_1 が同心円群, \dot{w}_2 は \dot{w}_1 円の中心を通る直線群の場合

\dot{w}_1 が同心円群であれば, これに直交する円群 \dot{w}_2 は \dot{w}_1 円群の共通中心を通る直線群でなければならない. すなわち \dot{w}_1 円群の中心位置を \dot{Q} とすれば

$$\dot{w}_1 \dot{w}_{1k} - (\dot{Q}_k \dot{w}_1 + \dot{Q} \dot{w}_{1k}) + \dot{Q} \dot{Q}_k - \dot{R} \dot{R}_k = 0. \quad (140)$$

$$\dot{w}_2 - \dot{Q} = (\dot{w}_{2k} - \dot{Q}_k) \varepsilon^{j2\theta}. \quad (141)$$

ここに $|\dot{R}|$ は同心円群の円の半径である. また θ は直線群の一直線が実軸となす角である. 次に

$$\dot{W}_1 = \frac{\dot{A} + \dot{B} \dot{w}_1}{\dot{a} + \dot{b} \dot{w}_1}, \quad (142)$$

$$\dot{W}_2 = \frac{\dot{A} + \dot{B} \dot{w}_2}{\dot{a} + \dot{b} \dot{w}_2} \quad (143)$$

の写像変換を行えば, これはまた直交円群であるが, ここではこれを複素数幾何で取扱う. 式 (142), 式 (143) は

$$\dot{W}_1 = \dot{W}_\infty + \frac{\dot{C}}{\dot{a} + \dot{b} \dot{w}_1}, \quad (144)$$

$$\dot{W}_2 = \dot{W}_\infty + \frac{\dot{C}}{\dot{a} + \dot{b} \dot{w}_2}, \quad (145)$$

ただし

$$\dot{W}_\infty = \frac{\dot{B}}{\dot{b}}, \quad \dot{C} = \frac{\dot{b}\dot{A} - \dot{a}\dot{B}}{\dot{b}} \quad (146)$$

と表し得、 \dot{W}_∞ は軌跡図の原点からの距離を共通に変えるだけで \dot{W}_1 と \dot{W}_2 の関係位置

には影響しないから、 $\frac{\dot{C}}{\dot{a} + \dot{b} \dot{w}_1}$ と $\frac{\dot{C}}{\dot{a} + \dot{b} \dot{w}_2}$ の直交を証すれば充分である。よって

$$\dot{W}_1' = \frac{\dot{C}}{\dot{a} + \dot{b} \dot{w}_1} \quad (147)$$

と

$$\dot{W}_2' = \frac{\dot{C}}{\dot{a} + \dot{b} \dot{w}_2} \quad (148)$$

の直交を証す。式 (147) から

$$\dot{w}_1 = \frac{1}{\dot{b}} \left(\frac{\dot{C}}{\dot{W}_1'} - \dot{a} \right), \quad (149)$$

$$\dot{w}_{1k} = \frac{1}{\dot{b}_k} \left(\frac{\dot{C}_k}{\dot{W}_{1k}'} - \dot{a}_k \right). \quad (150)$$

式 (149), 式 (150) を式 (140) に入れ

$$\begin{aligned} \dot{W}_1' \dot{W}_{1k}' - & \left\{ \frac{\dot{C}_k (\dot{a} + \dot{b} \dot{Q})}{(\dot{a} + \dot{b} \dot{Q}) (\dot{a}_k + \dot{b}_k \dot{Q}_k) - \dot{b} \dot{b}_k \dot{R} \dot{R}_k} \dot{W}_1' \right. \\ & + \frac{\dot{C} (\dot{a}_k + \dot{b}_k \dot{Q}_k)}{(\dot{a} + \dot{b} \dot{Q}) (\dot{a}_k + \dot{b}_k \dot{Q}_k) - \dot{b} \dot{b}_k \dot{R} \dot{R}_k} \dot{W}_{1k}' \Big\} \\ & + \frac{\dot{C} \dot{C}_k}{(\dot{a} + \dot{b} \dot{Q}) (\dot{a}_k + \dot{b}_k \dot{Q}_k) - \dot{b} \dot{b}_k \dot{R} \dot{R}_k} = 0. \end{aligned} \quad (151)$$

この円群の中心 \dot{q}_1 および半径 r_1 は

$$\dot{q}_1 = \frac{\dot{C} (\dot{a}_k + \dot{b}_k \dot{Q}_k)}{(\dot{a} + \dot{b} \dot{Q}) (\dot{a}_k + \dot{b}_k \dot{Q}_k) - \dot{b} \dot{b}_k \dot{R} \dot{R}_k}, \quad (152)$$

$$\begin{aligned}
 r_1 &= \sqrt{\dot{q}_1 \dot{q}_{1k} - \frac{\dot{C} \dot{C}_k}{(\dot{a} + \dot{b} \dot{Q})(\dot{a}_k + \dot{b}_k \dot{Q}_k) - \dot{b} \dot{b}_k \dot{R} \dot{R}_k}} \\
 &= \frac{\sqrt{\dot{C} \dot{C}_k \dot{b} \dot{b}_k \dot{R} \dot{R}_k}}{(\dot{a} + \dot{b} \dot{Q})(\dot{a}_k + \dot{b}_k \dot{Q}_k) - \dot{b} \dot{b}_k \dot{R} \dot{R}_k}. \quad (153)
 \end{aligned}$$

なお $\dot{a} + \dot{b} \dot{w}_1$ は $\dot{a} + \dot{b} \dot{Q}$ を共通中心とする同心円群であることは明らかで、その逆数 $\frac{1}{\dot{a} + \dot{b} \dot{w}_1}$ は 5.2.1 項で述べたように、原点と $\frac{1}{\dot{a} + \dot{b} \dot{Q}}$ からの距離の比が一定である円群である。したがって $\frac{\dot{C}}{\dot{a} + \dot{b} \dot{w}_1}$ は原点と $\frac{\dot{C}}{\dot{a} + \dot{b} \dot{Q}}$ からの距離の比が一定である円群である。

つぎに式 (148) から

$$\dot{w}_2 = \frac{1}{\dot{b}} \left(\frac{\dot{C}}{\dot{W}_{2'}} - \dot{a} \right), \quad (154)$$

$$\dot{w}_{2k} = \frac{1}{\dot{b}_k} \left(\frac{\dot{C}_k}{\dot{W}'_{2k}} - \dot{a}_k \right). \quad (155)$$

式 (154), 式 (155) を式 (141) に入れ

$$\begin{aligned}
 \dot{W}_2' \dot{W}_{2k}' - \left\{ \frac{\dot{b} \dot{C}_k \varepsilon^{j\theta}}{(\dot{b} \dot{a}_k + \dot{b} \dot{b}_k \dot{Q}_k) \varepsilon^{j\theta} - (\dot{a} \dot{b}_k + \dot{b} \dot{b}_k \dot{Q}_k) \varepsilon^{-j\theta}} \dot{W}_{2'}' \right. \\
 \left. + \frac{\dot{b}_k \dot{C} \varepsilon^{-j\theta}}{(\dot{a} \dot{b}_k + \dot{b} \dot{b}_k \dot{Q}) \varepsilon^{-j\theta} - (\dot{b} \dot{a}_k + \dot{b} \dot{b}_k \dot{Q}_k) \varepsilon^{j\theta}} \dot{W}_{2k}' \right\} = 0. \quad (156)
 \end{aligned}$$

この円群の円の中心 \dot{q}_2 および半径 r_2 は

$$\dot{q}_2 = \frac{\dot{b}_k \dot{C} \varepsilon^{-j\theta}}{(\dot{a} \dot{b}_k + \dot{b} \dot{b}_k \dot{Q}) \varepsilon^{-j\theta} - (\dot{b} \dot{a}_k + \dot{b} \dot{b}_k \dot{Q}_k) \varepsilon^{j\theta}}, \quad (157)$$

$$r_2 = \frac{\sqrt{\dot{b} \dot{b}_k \dot{C} \dot{C}_k}}{(\dot{a} \dot{b}_k + \dot{b} \dot{b}_k \dot{Q}) \varepsilon^{-j\theta} - (\dot{b} \dot{a}_k + \dot{b} \dot{b}_k \dot{Q}_k) \varepsilon^{j\theta}}. \quad (158)$$

なお $\dot{a} + \dot{b} \dot{w}_2$ は $\dot{a} + \dot{b} \dot{Q}$ を通る直線群であることは明らかで、その逆数 $\frac{1}{\dot{a} + \dot{b} \dot{w}_2}$ は 5.1 節に述べてあるように原点と $\frac{1}{\dot{a} + \dot{b} \dot{Q}}$ を通る円群である。したがって $\frac{\dot{C}}{\dot{a} + \dot{b} \dot{w}_2}$ は原点と $\frac{\dot{C}}{\dot{a} + \dot{b} \dot{Q}}$ を通る円群である。

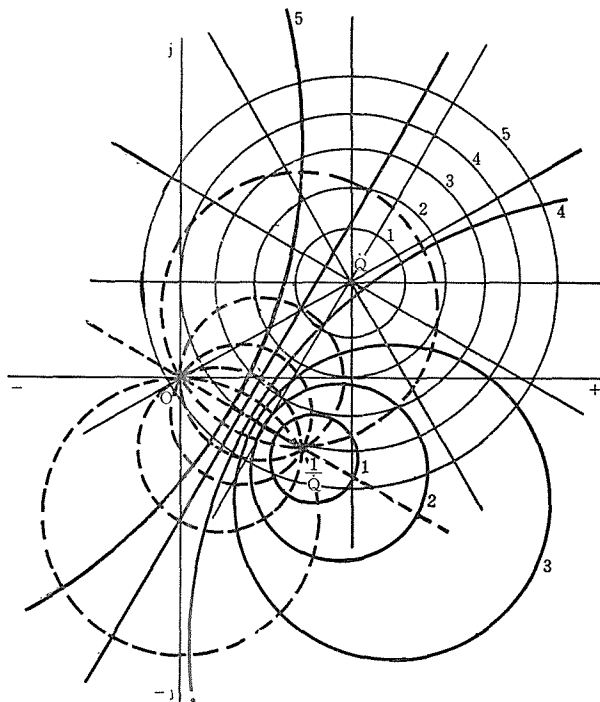
一般に中心位置が \dot{Q}_1, \dot{Q}_2 , 半径が R_1, R_2 である二つの円が直交するときは

$$|\dot{Q}_2 - \dot{Q}_1|^2 = R_1^2 + R_2^2$$

また上式の関係にあれば二つの円は直交する.

いま $|\dot{q}_2 - \dot{q}_1|^2$ を計算すると

$$\begin{aligned} |\dot{q}_2 - \dot{q}_1|^2 &= (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) (\dot{q}_{2k} - \dot{q}_{1k}) = \dot{q}_2 \dot{q}_{2k} + \dot{q}_1 \dot{q}_{1k} - (\dot{q}_2 \dot{q}_{1k} + \dot{q}_1 \dot{q}_{2k}) \\ &= \frac{\dot{C}\dot{C}_k \dot{b}\dot{b}_k}{-\left\{(\dot{b}\dot{a}_k + \dot{b}\dot{b}_k \dot{Q}_k) \varepsilon^{j\theta} - (\dot{a}\dot{b}_k + \dot{b}\dot{b}_k \dot{Q}) \varepsilon^{-j\theta}\right\}^2} \\ &\quad + \frac{\dot{C}\dot{C}_k (\dot{a} + \dot{b}\dot{Q}) (\dot{a}_k + \dot{b}_k \dot{Q}_k)}{\left\{(\dot{a} + \dot{b}\dot{Q}) (\dot{a}_k + \dot{b}_k \dot{Q}_k) - \dot{b}\dot{b}_k \dot{R}\dot{R}_k\right\}^2} \\ &\quad - \frac{\dot{C}\dot{C}_k}{(\dot{a} + \dot{b}\dot{Q}) (\dot{a}_k + \dot{b}_k \dot{Q}_k) - \dot{b}\dot{b}_k \dot{R}\dot{R}_k} \\ &= \frac{\dot{C}\dot{C}_k \dot{b}\dot{b}_k}{-\left\{(\dot{b}\dot{a}_k + \dot{b}\dot{b}_k \dot{Q}_k) \varepsilon^{j\theta} - (\dot{a}\dot{b}_k + \dot{b}\dot{b}_k \dot{Q}) \varepsilon^{-j\theta}\right\}^2} \\ &\quad + \frac{\dot{C}\dot{C}_k \dot{b}\dot{b}_k \dot{R}\dot{R}_k}{\left\{(\dot{a} + \dot{b}\dot{Q}) (\dot{a}_k + \dot{b}_k \dot{Q}_k) - \dot{b}\dot{b}_k \dot{R}\dot{R}_k\right\}^2} = r_2^2 + r_1^2. \end{aligned} \quad (159)$$



第11図 同心円群とその直交線群を基とした円群

よって \dot{W}_1 と \dot{W}_2 は直交円群である. \dot{W}_1 および \dot{W}_2 をさらに一次式で写像変換を行っても式 (138), 式 (139) の導出と同じことになるから, 2 定点からの距離の比が一定である円群と, その 2 定点を通る円群の関係となる. 第11図は $\frac{1}{a + bw_1}$ 円群と $\frac{1}{a + bw_2}$ 円群を示す.

6. 従来の方法と複素数幾何学を用いた場合との比較

円線図を取扱った経験のある方々は複素数幾何学の応用によって交流回路ベクトルの円軌跡に関する問題がどんなに明解になるかはすぐ解っていただけたと思うが, ここに従来の方法と複素数幾何学を用いた場合の二三の例を示す.

$$6.1 \quad \dot{W} = \frac{\dot{a} + \dot{b}z}{\dot{c} + \dot{d}z} \quad \text{円の中心位置および半径の求め方}$$

複素数幾何学を用いて円

$$\dot{W} = \frac{\dot{a} + \dot{b}z}{\dot{c} + \dot{d}z} \quad [\text{ただし } z \text{ は実変数}] \quad (160)$$

の中心位置, 半径を求むることは 3.2 節に示している. これは見らるる通り全く問題にならぬ程簡単に導出出来るのであるが, これを従来の方法によると仲々手数を要する. その方法には

- (1) 解析幾何学による方法
- (2) 複素数逐次計算法
- (3) 幾何学法
- (4) 複素数角方程式を用いる方法
- (5) 極限值法 $\left[\frac{d|\dot{W}|}{dz} = 0 \text{ の関係を用いる方法} \right]$
- (6) 極限值法 $\left[\frac{d\dot{W}}{dz} \text{ と } \dot{W} \text{ の交角を利用する方法} \right]$
- (7) 極限值法 $\left[\frac{d(\dot{W} \text{ の実数部})}{dz} = 0 \text{ 或は } \frac{d(\dot{W} \text{ の虚数部})}{dz} = 0 \text{ を利用する方法} \right]$
- (8) 極限值逐次法
- (9) 指数函数法

等がある. 筆者が試みたこれらの方法から最も手数を要しなかった (7) の極限值法と (9) の指数函数法を示す. (4) の複素数角方程式を用いる計算法を示している著書があり一見余り手数を要しておらぬように見えたが, 証明に不十分な点があり, これを補えば上に示す二方法より手数と説明の時間を要するので取らない.

$$6.1.1 \quad \frac{d(\dot{W} \text{ の実数部})}{dz} = 0 \quad \text{を利用する方法}$$

\dot{W} の実数部 W_P および虚数部 W_Q の極限值を与える z の値をそれぞれ Z_{P1} , Z_{P2} および Z_{Q1} , Z_{Q2} とすれば円の中心位置 \dot{Q} , および半径 R は

$$\dot{Q} = \frac{1}{2} \left([\dot{W}]_{z=Z_{P1}} + [\dot{W}]_{z=Z_{P2}} \right), \quad (161)$$

$$R = \left| \frac{1}{2} \left([\dot{W}]_{z=Z_{P1}} - [\dot{W}]_{z=Z_{P2}} \right) \right|, \quad (162)$$

あるいは

$$\dot{Q} = \frac{1}{2} \left([\dot{W}]_{z=Z_{Q1}} + [\dot{W}]_{z=Z_{Q2}} \right), \quad (163)$$

$$R = \left| \frac{1}{2} \left([\dot{W}]_{z=Z_{Q1}} - [\dot{W}]_{z=Z_{Q2}} \right) \right| \quad (164)$$

である. ここでは, W_P の極限值を使用する. W_P はよく知られておるように

$$W_P = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{a} + \dot{b}z}{\dot{c} + \dot{d}z} + \frac{\dot{a}_k + \dot{b}_k z}{\dot{c}_k + \dot{d}_k z} \right). \quad (165)$$

故に W_P の極限值を与える z は

$$\frac{dW_P}{dz} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\dot{b}\dot{c} - \dot{a}\dot{d}}{(\dot{c} + \dot{d}z)^2} + \frac{\dot{b}_k\dot{c}_k - \dot{a}_k\dot{d}_k}{(\dot{c}_k + \dot{d}_k z)^2} \right\} = 0 \quad (166)$$

から求まる. 故に z_{P1} および z_{P2} は

$$\dot{c} + \dot{d}z = \pm \sqrt{\frac{\dot{b}\dot{c} - \dot{a}\dot{d}}{\dot{a}_k\dot{d}_k - \dot{b}_k\dot{c}_k}} (\dot{c}_k + \dot{d}_k z) \quad (167)$$

を満足する z の値であって

$$\sqrt{\frac{\dot{b}\dot{c} - \dot{a}\dot{d}}{\dot{a}_k\dot{d}_k - \dot{b}_k\dot{c}_k}} = \dot{G}$$

とおけば

$$z_{P1} = \frac{\dot{G}\dot{c}_k - \dot{c}}{\dot{d} - \dot{G}\dot{d}_k}, \quad z_{P2} = \frac{-\dot{G}\dot{c}_k - \dot{c}}{\dot{d} + \dot{G}\dot{d}_k}. \quad (168)$$

ゆえに

$$\dot{Q} = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{a} + \dot{b} \frac{\dot{G}\dot{c}_k - \dot{c}}{\dot{d} - \dot{G}\dot{d}_k}}{\dot{c} + \dot{d} \frac{\dot{G}\dot{c}_k - \dot{c}}{\dot{d} - \dot{G}\dot{d}_k}} + \frac{\dot{a} - \dot{b} \frac{\dot{G}\dot{c}_k + \dot{c}}{\dot{d} + \dot{G}\dot{d}_k}}{\dot{c} - \dot{d} \frac{\dot{G}\dot{c}_k + \dot{c}}{\dot{d} + \dot{G}\dot{d}_k}} \right) = \frac{\dot{a}\dot{d}_k - \dot{b}\dot{c}_k}{\dot{c}\dot{d}_k - \dot{d}\dot{c}_k}. \quad (169)$$

R も式 (162) に式 (168) を代入し

$$R = \left| \frac{\ddot{ad} - \ddot{bc}}{\ddot{cd}_k - \ddot{dc}_k} \right|. \quad (170)$$

6. 1. 2 指数函数法

\dot{W} が実変数 Z の複素函数でその軌跡が円である場合には、とにかく

$$\dot{W} = \dot{Q} + \dot{R} \epsilon^{jf(z)} \quad (171)$$

の形で表わし得るはずである. ここに \dot{Q} は円の中心位置, \dot{R} は円の半径である. この考えを基として円軌跡の問題を取扱う方法を筆者は指数函数法と呼ぶことにする. この方法は今迄余り重視されておらぬが, その重要性を再認識すべきであると思う. 表題の場合には

$$f(z) = \frac{1}{j} \log \frac{\dot{c}_k + \dot{d}_k z}{\dot{c} + \dot{d}z}. \quad (172)$$

ゆえに

$$\dot{W} = \dot{Q} + \dot{R} \frac{\dot{c}_k + \dot{d}_k z}{\dot{c} + \dot{d}z} = \frac{(\dot{Q}\dot{c} + \dot{R}\dot{c}_k) + (\dot{Q}\dot{d} + \dot{R}\dot{d}_k)z}{\dot{c} + \dot{d}z}. \quad (173)$$

式 (160) と式 (173) から

$$\dot{a} = \dot{Q}\dot{c} + \dot{R}\dot{c}_k, \quad (174)$$

$$\dot{b} = \dot{Q}\dot{d} + \dot{R}\dot{d}_k. \quad (175)$$

この両式から

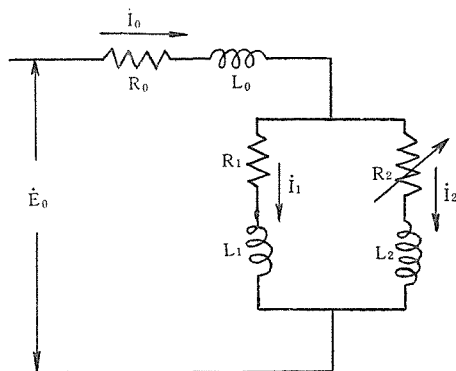
$$\dot{Q} = \frac{\ddot{ad}_k - \ddot{bc}_k}{\ddot{cd}_k - \ddot{dc}_k}. \quad (176)$$

$$\dot{R} = \frac{\ddot{ad} - \ddot{bc}}{\ddot{dc}_k - \ddot{cd}_k}. \quad (177)$$

ここに示したように指数函数法によれば, 中心および半径を求める手数は複素数幾何学によるものと, あまり変わらない. しかし円の方程式として式 (24) を得るのと違い式 (173) を得るには円線図に対する, より深い知識が必要である.

6. 2 直並列回路の円線図

複素数幾何学を電気回路の円線図に応用する一例として, 第12図のような直並列回路を取ってみる. 図において R は抵抗値 (Ω) を表し, L は自己インダクタンス (H) を表わす. R_2 以外は一定とする. a, b 端子から角周波数 ω (一定) の一定値正弦波電圧 \dot{E}_0 を加えれば, 抵抗 R_2 の変化に応じ図示の枝路電流 \dot{I}_0, \dot{I}_2 等は円を描くことは周知の通りで, その取扱い方は多様であるが少し程度の高い交流理論関係の著書には多く記述されている. しかし従来の何れの記述も, ここで示す複素数幾何学を応用するものより多くの説



第12図 直並列回路

明と手順を要するに思う。

加える電圧 \dot{E}_0 を基準ベクトルに取り、また

$$\left. \begin{aligned} \dot{Z}_0 &= R_0 + j\omega L_0 \\ \dot{Z}_1 &= R_1 + j\omega L_1 \\ \dot{Z}_2 &= R_2 + j\omega L_2 \end{aligned} \right\} \quad (178)$$

とすれば

$$\begin{aligned} \dot{I}_0 &= \frac{\dot{E}_0}{\dot{Z}_0 + \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}} = \frac{(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2) \dot{E}_0}{\dot{Z}_0 \dot{Z}_1 + (\dot{Z}_0 + \dot{Z}_1) \dot{Z}_2} \\ &= \frac{\dot{E}_0}{\dot{Z}_0 + \dot{Z}_1} + \left(\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_0 + \dot{Z}_1} \right)^2 \frac{\dot{E}_0}{\dot{Z}_0 + \dot{Z}_2}, \end{aligned} \quad (179)$$

ただし

$$\dot{Z}_p = R_p + j\omega L_p = \frac{\dot{Z}_0 \dot{Z}_1}{\dot{Z}_0 + \dot{Z}_1}. \quad (180)$$

また

$$\begin{aligned} \dot{I}_2 &= \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \dot{I}_0 = \frac{\dot{Z}_1 \dot{E}_0}{\dot{Z}_0 \dot{Z}_1 + (\dot{Z}_0 + \dot{Z}_1) \dot{Z}_2} \\ &= \left(\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_0 + \dot{Z}_1} \right) \frac{\dot{E}_0}{\dot{Z}_0 + \dot{Z}_2}. \end{aligned} \quad (181)$$

上式から

$$\begin{aligned}
 \dot{I}_2 &= \left(\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_0 + \dot{Z}_1} \right) \frac{E_0}{j\omega(L_p + L_2) + R_p + R_2} , \\
 R_p + R_2 &= \left(\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_0 + \dot{Z}_1} \right) \frac{E_0}{\dot{I}_2} - j\omega(L_p + L_2) \\
 &= \left(\frac{\dot{Z}_{1k}}{\dot{Z}_{0k} + \dot{Z}_{1k}} \right) \frac{E_0}{\dot{I}_{2k}} + j\omega(L_p + L_2) .
 \end{aligned} \tag{182}$$

すなわち

$$\begin{aligned}
 \dot{I}_2 \dot{I}_{2k} - \left\{ \frac{E_0}{-2j\omega(L_p + L_2)} \left(\frac{\dot{Z}_{1k}}{\dot{Z}_{0k} + \dot{Z}_{1k}} \right) \dot{I}_2 \right. \\
 \left. + \frac{E_0}{2j\omega(L_p + L_2)} \left(\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_0 + \dot{Z}_1} \right) \dot{I}_{2k} \right\} = 0 .
 \end{aligned} \tag{183}$$

式 (183) は \dot{I}_2 は円であることを示し、その中心 \dot{Q}_{I_2} は

$$\dot{Q}_{I_2} = \left(\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_0 + \dot{Z}_1} \right) \frac{E_0}{2j\omega(L_p + L_2)} . \tag{184}$$

すなわち

$$\left| \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_0 + \dot{Z}_1} \right| = A , \quad \left| \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_0 + \dot{Z}_1} \right| = \alpha \tag{185}$$

とすれば

$$\left| \dot{Q}_{I_2} \right| = \frac{AE_0}{2\omega(L_p + L_2)} , \quad \angle \dot{Q}_{I_2} = -\frac{\pi}{2} + \alpha . \tag{186}$$

また半径 R_{I_2} は

$$R_{I_2} = \left| \dot{Q}_{I_2} \right| = \frac{AE_0}{2\omega(L_p + L_2)} . \tag{187}$$

また式 (179) から \dot{I}_0 は一定値

$$\dot{I}_0' = \frac{E_0}{\dot{Z}_0 + \dot{Z}_1} \tag{188}$$

と

$$\dot{I}_0'' = \left(\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_0 + \dot{Z}_1} \right)^2 \frac{E_0}{\dot{Z}_p + \dot{Z}_2} = \left(\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_0 + \dot{Z}_1} \right)^2 \frac{E_0}{j\omega(L_p + L_2) + R_p + R_2} \tag{189}$$

の和であるから、 \dot{I}_0'' 円を画きこれに \dot{I}_0' を添加すればよい。式 (183) を得たと殆ど同様に

$$\dot{I}_0'' \dot{I}_{0k}'' - \left\{ \frac{E_0}{-2j\omega(L_p + L_2)} \left(\frac{\dot{Z}_{1k}}{\dot{Z}_{0k} + \dot{Z}_{1k}} \right)^2 \dot{I}_0'' + \frac{E_0}{2j\omega(L_p + L_2)} \right. \\ \left. \times \left(\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_0 + \dot{Z}_1} \right)^2 \dot{I}_{0k}'' \right\} = 0. \quad (190)$$

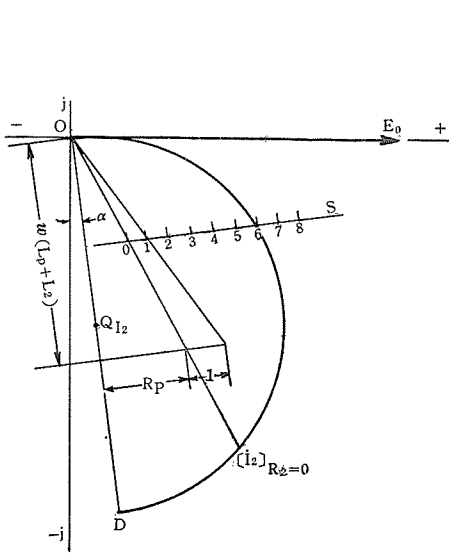
すなわち \dot{I}_0'' 円の中心位置 $\dot{Q}_{I_0''}$ は

$$|\dot{Q}_{I_0''}| = \frac{A^2 E_0}{2\omega(L_p + L_2)}, \quad \angle \dot{Q}_{I_0''} = -\frac{\pi}{2} + 2\alpha. \quad (191)$$

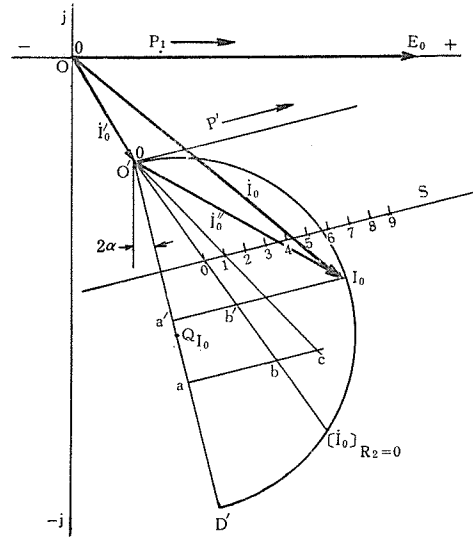
また半径 $R_{I_0''}$ は

$$R_{I_0''} = |\dot{Q}_{I_0''}| = \frac{A^2 E_0}{2\omega(L_p + L_2)}. \quad (192)$$

第13図は \dot{I}_2 円線図, 第14図は \dot{I}_0 円線図を示す.



第13図 \dot{I}_2 円線図



第14図 \dot{I}_0 円線図

電気回路に応用した円線図の機能をよりよく発揮させるためには, 軌跡円を画き易くする問題の外, 変数尺度, 諸電力〔或は無効電力〕表示用尺度, 能率表示用尺度, 力率表示用尺度等の問題がある. これ等の考察結果については他の機会に発表したいと思うがここでは \dot{I}_0 円線図に z の変数尺度, 入力電力 P_0 , R_2 中に消費される電力を表示する尺度を添加するにとどめる.

(a) R_2 の変数尺度

円線図が変数の一次式で表わされるときは、均等目盛変数尺度の根点〔変数尺度を使用するとき必要な極点〕は円線図上になければならない。ここでは \dot{I}_0' の頂点 O' に取る。そうすれば R_2 が $\pm\infty$ 〔純数学的に考えて〕のとき $\dot{I}_0'' = 0$ であるから、変数尺度 S は根点 O' における円線図円の接線に平行、すなわち O' と円の中心を結ぶ直線に直角である。目盛は直径 $\overline{O'D'}$ 上に

$$\overline{O'a} = \omega(L_p + L_2) \quad (193)$$

のように a 点を取り、 a 点から図示のように $\overline{O'a}$ と 90° をなして直線 a, b, c を引き $\overline{ab} = R_p, \overline{bc} = 1$ ならしめる。 $\overline{O'b}$ と変数尺度との交点を 0〔零〕、 $\overline{O'c}$ と変数尺度との交点を 1 と目盛る。後は $\overline{01}$ を単位長として 2, 3, 4 …… と目盛る。

(b) 入力電力

入力電力 P_0 は

$$P_0 = E_0 |\dot{I}_0| \cos \angle \dot{I}_0 \quad (194)$$

であるから虚軸はパワー表示用基線であつて、虚軸との交点を 0〔零〕目盛りとした任意の直線を入力電力表示尺度とすることが出来る。図では P_0 直線がそれである。

(c) R_2 中に消費される電力

R_2 に消費される電力 P は

$$P = R_2 |\dot{I}_2|^2 = R_2 \left| \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_0 + \dot{Z}_1} \right|^2 \frac{E_0^2}{|\dot{Z}_p + \dot{Z}_2|^2} \quad (195)$$

しかるに \dot{I}_0 円線図で \dot{I}_0 の頂点から円の直径 $\overline{O'D'}$ に下した垂線の長さを l とすれば

$$l = \frac{R_p + R_2}{|\dot{Z}_p + \dot{Z}_2|} |\dot{I}_0''| = (R_p + R_2) \left| \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_0 + \dot{Z}_1} \right|^2 \frac{E_0}{|\dot{Z}_p + \dot{Z}_2|} \quad (196)$$

式 (195) と式 (196) から $E_0 l = P'$ とおけば

$$P = \frac{R_2}{R_p + R_2} E_0 l = \frac{R_2}{R_p + R_2} P' \quad (197)$$

すなわち $\overline{O'D'}$ 線が P' パワー表示用基線で、これとの交点を 0〔零〕目盛りとした任意の直線を P' 電力表示用尺度とすることが出来、これからまた P は容易に知られる。 P を求め易くするには、円線図上 $[\dot{I}_0]_{R_2=0}$ の点と O' を結ぶ直線 $O'[\dot{I}_0]_{R_2=0}$ を画いておき任意の \dot{I}_0 に対する P を求めるには \dot{I}_0 の頂点 $[I_0]$ から P' 電力表示用尺度に平行線を引き、 $O'[\dot{I}_0]_{R_2=0}$ 線、および $\overline{O'D'}$ 線との交点を図のように b', a' とすれば、 $\overline{b'I_0}$ を P' 用尺度で読めば P を得る。

7. 結 言

以上円線図に関連して、古くから知られている諸理論の導出、その他に例を取って、円の問題への複素数幾何学の応用を示したが、複素数幾何学は解析幾何学のように x 部

y 部に分解して取扱うことがなく、ベクトルそのもので平面図形に関する問題を取扱うのが特長である。今迄円線図の諸理論は解析幾何学によって取扱われることが多かったので、交流回路のベクトル計算と円線図表示問題の間に障壁に似たものを感じたが、複素数幾何学を巧く応用すれば回路のベクトル計算から何の障壁もなく自然に円線図の計算に移行が出来、またその逆に円線図の理論を必要に応じ回路のベクトル計算に織り込ませることも不自然を感じなくなる。

本文では電気回路の例題にふれることが殆ど出来なかったが後の機会にこの足りない部分は補いたいと思う。

終りにこの方面の研究にたえず貴重な助言を下された石橋教授を始め本学電気工学科、通信工学科、数学教室の先生方に厚くお礼申し上げ、又研究結果の整理に尽力して頂いた中村君に謝意を表する。

参 考 文 献

森田清：円線図と円図表。

小串孝治：円線図。

早田，鬼頭，木間：複素数幾何学の工学への応用。

竹内端三：函数論。

La Cour and Bragstad : Theory of Alternating Currents.

Dover : Theory and Practice of Alternating Currents. .

Summary

Application of Complex Geometry to Circular Diagram

Shin-ichi FUJII

(Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering)

This paper gives some fundamental and theoretical formulas concerning the circular diagram which is useful for the analysis of the alternating current circuit. It is treated by the method of complex geometry, and consists of the formula of straight line, that of circle, the center of circle, the radius of circle, the base-line of power-scale, etc. Also it contains families of circles and of their converse circles, and the representation of two families which meet at right angles to other complex plane.

This paper would suggest that, if the complex geometry be used to the theory of circular diagram, the barrier between the vector computation of alternating current circuit and the theory of the circular diagram can be eliminated, and accordingly that the study of the alternating current circuit may be promoted more freely and efficiently.