スペースに制約のある在庫問題

浜　崎　　実*

1. は じ め に

小売経営における集中化は，あるものはいまや巨大産業に発展した。年商50億円以上の，いわゆるビッグストアと呼ばれる小売業は200社に近づいている。しかも，その規模の大小を問わず，市場の獲得に狂奔しており顧客の創造に激烈な競争をしているのが現状である。

強引な値引制策やセルフサービスという特色によって，衣料品，薬品，日用雑貨，食料品などの業界に次々と浸透していったスーパーマーケットは小売総売上げのかなりの部分を占めている。

アメリカにおいては，小売業はその規模が大きくなるにしたがって，町の中心部から離れたところに立地を求める傾向があるが，我が国では道路や土地事情によって，住宅地に隣接しているか，繁華街の中心に立地されるのが一般的である。したがって，そこでは限られたスペースにできるだけ多種類の商品を大量に取扱う売場を必要とする。大規模店では1,000品目以上の商品を取扱い，ある種の品目については原価に近い価格で販売する。仕入れ商品の大部分を，直接店舗に発送されるようになると，倉庫のスペースは不必要になり，その分だけ店舗の拡大がなされ，多品種大量商品を扱える結果，大量販売によるコストダウンに結びつく。また，青果，精肉，鮮魚などの部門は，商品回転を早めることによって，わずかの利幅で利益を高めることが可能である。このために，限られたスペースに仕入量をどれだけにすれば，期待利益を最適にしうるかを考えてみる。

2.　仕入れ量と売場スペースの問題

一般的には多期間を考えるべきであるが，商品の回転が早いこと，次期に仕入れるまでに残らず売ってしまうことなどから1期間だけを考える。売れ残りの商品については，原価を何%か割って売られると仮定し，品切れによる顧客の不満足に対して何らかのペナルティを課すものとする。また，販売量すなわち需要量は大量であるから正規分布に従うものと仮定する。

記号を次のように定める。

c：原価，　s：売価，　h：仕入量，　x：需要量，　$f(x)$：確率密度，　$F(x)$：正規分布，$N(\mu,\sigma^2)$ の分布関数，　p：失った客に対するペナルティ，　l：売れ残り商品の売価，　$E(h)$：期待利益，　i：商品の種類（$i=1,2,\cdots\cdots,n$）

以上から，全商品の総期待利益は

＊ 信州大学繊維学部工業経営学研究室

$$(1)\qquad \sum_{i=1}^{n} E(h_i)=\sum_{i=1}^{n}\Big[s_i\int_0^{h_i} x_i f(x_i)dx_i+s_ih_i\int_{h_i}^{\infty} f(x_i)dx_i$$
$$+l_i\int_0^{h_i}(h_i-x_i)f(x_i)dx_i-c_ih_i-p_i\int_{h_i}^{\infty}(x_i-h_i)f(x_i)dx_i$$

仕入量 h の最適値は(1)式を h について偏導関数を求め，それを 0 とおいた式から求められる。すなわち，$\partial\sum E(h)/\partial h=0$

ここで，各商品の単位あたり容量を w_i 売場全体の商品スペースをWとすれば，

$$(2)\qquad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_ih_i\leq W$$

という関係が生ずる。これは，平均仕入量の2倍がWより小さいか等しいことを意味し，h_1，h_2，……，h_n によって与えられる n 次元空間において，$\sum_{i=1}^{n} w_ih_i=2W$ と軸 $h_1, h_2\cdots$，h_n によって定められた領域を与えられる。(1)式から決められる各々の最適仕入量によって与えられる点が，この領域内にある場合は問題はないが，この領域外にくるとき，計画は変更されなければならない。このとき，もし

$$W-\frac{1}{2}\sum w_ih_i=0 \qquad \text{ならば，}\lambda<0$$

$$W-\frac{1}{2}\sum w_ih_i>0 \qquad \text{ならば，}\lambda=0$$

であるようなラグランジュ乗数 λ を定義すれば，　$\lambda(W-\frac{1}{2}\sum w_ih_i)=0$　となるから，

結局，(1)式は次のように修正される。

$$(3)\qquad F=\sum_{i=1}^{n} E(h_i)+\lambda(W-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_ih_i)$$

(3)式から $\partial F/\partial h_i=0$ を計算し，任意に与えた負の λ に対して，(3)式から h_i を算出し，$\frac{1}{2}\sum w_ih_i$ を計算する。次に(2)式を満足する絶対値が最小であるような λ の値を見出すことによって，最適な仕入量が決定される。

需要量 x が，平均 μ，標準偏差 σ の正規分布に従うことから，(3)式は次のように書かれる。

$$(4)\qquad F=\sum_{i=1}^{n}\Big\{(s_i-l_i)\mu_i-(c_i-l_i)h_i$$
$$+(s_i-l_i+p_i)(h_i-\mu_i)\Phi\left(\frac{h_i-\mu_i}{\sigma_i}\right)$$
$$-\sigma_i(s_i-l_i+p_i)\phi\left(\frac{h_i-\mu_i}{\sigma_i}\right)\Big\}+\lambda(W-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_ih_i)$$

$$\frac{\partial F}{\partial h_i}=\frac{\partial \sum E(h_i)}{\partial h_i}-\frac{1}{2}\lambda \sum w_i=0$$

$$(s_i-l_i+p_i)\Phi\left(\frac{h_i-\mu_i}{\sigma_i}\right)-(c_i-l_i)-\frac{1}{2}\lambda w_i=0$$

$$(5)\qquad \Phi\left(\frac{h_i-\mu_i}{\sigma_i}\right)=\frac{c_i-l_i+\frac{1}{2}\lambda w_i}{s_i-h_i+p_i},\quad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

但し，$\phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}$,

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_z^\infty e^{-y^2/2}dy=\int_z^\infty \phi(y)dy$$

$$z=\frac{h-\mu}{\sigma}$$

(5)式の右辺は，λ の値を任意にとれば定まるから，正規分布表から $\Phi(z)$ が求められ，したがって，$h=\mu+\sigma z$ によって h が計算される。

例題として次表のような場合を考えてみる。（スペース$W=3500$）

i	c	s	l	p	w	μ	σ
1	30	35	25	20	2	900	150
2	35	45	30	20	1	700	120
3	40	48	30	25	2	650	85
4	50	55	40	30	2	500	80
5	60	75	55	50	3	750	100

この表の数値を(5)式に代入し，λ に任意の値を入れて計算すると，例えば，

$$\Phi\left(\frac{h_1-900}{150}\right)=\frac{30-25-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2}{35-25+20}=\frac{4}{30}=0.133$$

$$\frac{h_1-900}{150}=\phi(0.133)=0.34$$

$$h_1=900+150\cdot 0.34=951$$

したがって，$\lambda=-1$のとき，$h_1=951$ となる。次表は λ の値の変化によって h_i($i=1, 2, 3, 4, 5$) がどう変わるか，(2)式の条件を満足する λ の値はどうかを計算したものである。

$-\lambda$	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	$\frac{1}{2}\Sigma hw$
1	951	740	697	542	763	3705
2	938	735	692	537	757	3670
6	888	717	670	518	736	3539
7	874	713	665	514	730	3505
8	862	708	660	509	725	3473

わずかの誤差は無視すれば$\lambda=-7$のとき，条件(2)を満足している。このときの期待利益を求めると，表の数値を(1)に代入して，

$$\sum_{i=1}^{5} E(h_i)=3917+6493+4436+1790+9660=26296$$

いま，ペナルティや失った顧客に対する損失その他を一切無視し，平均μの90%を仕入れて全部売りつくすものとすると，

$$\sum_{i=1}^{5}(s_i-c_i)(0.9\cdot\mu_i)=27405$$

となり，先に求めた期待利益より大であることは明白だが，リスクを多分に含んでおり現実的ではない。

ところで我が国の小売業経営は，従来から売場販売効率の向上に努力してきたが，効率を高めることは必ずしも経営をよくすることには結びつかない。通常，小売店の場合は，売場面積3.3m²当りの年間売上高で表現しているが，年間300万円以上になると，よい店であると云われた。しかし開店後，数年でその効率の伸びがなくなり，販売効率だけで店の良悪の判断が難しくなってきた。これは，販売促進費用と高価なレイアウトに投資する費用がかさむことによって，売上高の増加より，むしろ，それらの費用の増加の方が高いことによる。したがって，利益の増加率は減少する傾向にあるから，売場販売効率を高めるより，売場面積の拡大に努めた方が有利となってくる。

しかし，一店当りの売場面積の拡大にも自ら限界があることがわかってきた。すなわち管理の限界とその大きさに見合う多種商品の確保の問題，および地域住民の購買力（消費量）などである。また，人間の買物に関する歩行限界も，データによって9000m²位であることも調べられた。都市の大部分の百貨店は，5万m²以上で，ワン・ストップ・ショッピングの機能を果たすために，歩行の限界を越えた過大なものになっている。しかし，チェーンストアのような経営では，一店当り面積の最適化をはからねばならない。そのためには，消費人口，消費者の動向，生活レベルなどから合理的な値を求めるべきである。消費者を引きつける力，すなわち顧客の吸引度を需要の予測に導入し，商品の在庫間隔（または発注，納入間隔）を考慮すれば，上のモデルはさらに現実的になると思われる。また逆に，各商品の回転率と需要から，売場面積が決められるだろう。

参 考 文 献

G. Hadley & T. M. Whitin, Analysis of Inventory Systems, 1963, Prentice-Hall
E. Naddor, Inventory Systems, 1966, John Wiley
川崎進一，渥美俊一著，チェーンストア・エイジ，1971，ダイヤモンド社

Summary

Inventory Problem with Space Constraints

Minoru Hamazaki

(Received September 10, 1973)

This paper deals with a problem how many units of item to purchase to maximize the expected profit under the condition of space constraint. Demand is supposed to be normally distributed, and it is given a simple example problem.

Instructor of Industrial Management,
Faculty of Textile Science and Technology, Shinshu University.