

大学課程での物理学実験教育における 電子の比電荷の測定について

内藤勝之*・鈴木昭弘*

1 はじめに

電子の比電荷（電子の電気量 e と質量 m の比 e/m ）は、陰極線の電磁場中での運動を観測することにより、比較的簡単に測定できる。市販のセットが安く手に入るようになり、殆どどの大学では、教養または専門課程の初期に、 e/m の測定を物理学実験のテーマとして採用している。

特に理工科系の学生が、1, 2 年次にこのテーマから学ぶ意義は大きい。例えば(i)1859年のプリュッカーによるガイスラー管の中での陰極線の発見は近代物理学の幕あけであり、テーマのもつ歴史性から見て、(ii)また電磁場の基本的法則であるマクスウェルの方程式の理解の助けになることや、(iii)真空管、ブラウン管など、電子の性質を利用した機器の構造を一般常識としてもつことの必要性、(iv)さらに電子顕微鏡の操作など専門課程での実験の理解への助けになること、をあげれば充分であろう。

電子の均一な電磁場中の運動は、一般に三次元空間でのサイクロイド曲線を描く。直観的にはラセン状のバネを両方から電磁場の方向に対応して様々な方向に引いたようなものと考えてよい。しかし、このような運動からは、直接、比電荷を測定することは困難なので、様々な工夫がなされる。代表的なのは、電場と磁場、そして電子の入射速度の三つのベクトルを互いに直角に配置する方法である。そうすれば、電子が、電場と磁場からうける力を互いに相殺することができ、その時の電場、磁場の強さを測定することにより、比電荷を求めることができる。歴史的には J. J. トムソンが考案したものである。また電子の入射速度が、別の測定により関連づけられる場合には、電場を除き磁場中の電子の運動を観測すれば、後に述べるように e/m を求めることができる。物理実験指導書の中には、これら二つの方法を同時に記載している例¹⁾もあるが、多くは、後者の方法によっている。信州大学でも我々の知る範囲では教養部（医学部進学課程）、繊維学部とも、後者の方法を採用している。

原理的には、均一磁場に直角に入射した電子は、常に運動と直角の方向に力をうけるため、円運動を行なうということによっている。まず、遠心力とローレンツ力が釣り合うという条件、 $mu^2/r = euB$ を用いれば電子の初速度 u は $u = eBr/m$ で与えられる。ここで r は円軌道の半径、 B は磁束密度である。また初速度 u は電子銃の中の加速電圧によっても関係づけられる。何故なら、加速電圧を V とすれば、電子の得る運動エネルギーは $mu^2/2 = eV$ で与えられるからである。この式に、前に求めた関係式 $u = eBr/m$ を代入すれば、比電荷は $e/m = 2V/(B^2r^2)$ で与えることができる。したがって、 V 、 B 、 r を測定すれば e/m を知ることができる。

* 信州大学繊維学部共通講座

学生の提出するレポートに書かれているデータは、一般に大きなばらつきを示す。この実験も例外ではない。しかし、この実験では、データの読み違い、データ処理の明らかなミスを除いても、そのばらつきは大きく、担当教官の悩みとなっている。その原因は、 V 、 B 、 r からくる誤差の三つの部分に分けられる。しかし、円軌道の半径 r は遊動望遠鏡を用いて、比較的正確な測定が可能であり、原因から除いてもよい。ありていに言えば、(i)加速電圧 V の含む誤差、(ii)磁束密度の均一性及び理論値からのずれである。今回の報告では、この二つの点を詳しく検討することを目的としている。その上で、学生実験の範囲内で、比電荷 e/m の信頼できる値を求めるのにはどうしたらよいか、一つの試案を提出する。

まず(ii)の点について述べよう。磁束密度 B を精度よく測定するための、学生実験用の安価なガウスメータがないことをあげねばならない。理論的には均一な磁場は無限に長いソレノイドコイルによって得ることができる。しかし、ある程度の長さのソレノイドコイルよりも、むしろヘルムホルツコイルの方が精度よく均一な磁場を発生させることができる。その上ヘルムホルツコイルは円形電流の作る磁場の例として、物理学演習で出題され、物理学実験でもヘルムホルツコイルを使用することはより教育的といえる。ヘルムホルツコイルの作る磁束密度は、その内部では近似的には位置に無関係に流れる電流 I に比例し、 $B=kI$ とおくことができる。そのため e/m は V 、 I 、 r を測定すれば、一義的に決まる。しかし、電子銃の加速電圧 V はそう大きくなく、電子の得る初速度は高々 10^7m/sec であり、そのため、弱い磁場、例えば装置のもつ残留磁化 B_r 、地磁気 B_e からも影響をうける。また(i)の点についていえば加速電圧 V は測定器の読みより常に V' だけずれている可能性を含む。

これらの点を克服し、より信頼できる e/m を求めるのには、二つのデータ整理の方法が提唱されている。一つは、ヘルムホルツコイルに流す電流を一定にし、 V と r を測定し、 V と r^2 の比例関係から e/m を求める方法である。他の一つは、円運動の半径を一定にし、 V と I を測定し、同様の手続きで e/m を得る方法である。殆んどの実験指導書²⁾では前者の方法によっており、信州大学繊維学部でもそうである。中心となる指導書として広島大学で書かれたものをあげることができるので、ここでは広島方式と呼ぶことにする。後者の方法を採用している例³⁾は、少数派に属し、我々の手許にある物としては、唯一、北海道大学の指導書がある。ここでは、その方法を北大方式と呼ぼう。信州大学教養部(医学部進学課程)では、この方式を採用している。

今回の報告では、二つの方法にしたがって、注意深く実験を行なった上で、二つの方法を結びつけることによって、未知の量である加速電圧のずれ V' 、装置のもつ残留磁化 B_r 、及び地磁気 B_e を評価できることを示そう。その評価にもとづき、 V' 、 B_r 、 B_e を無視しても、充分信頼できる e/m を得ることのできる V 、 I 、 r の範囲を検討する。

次の第二節では実験法を、第三節では理論的視点をふまえ、二つのデータ処理法及び、 V' 、 B_r 、 B_e を評価する方法について、第四節では、実験データとデータ処理した結果を、第五節では、まとめと、再び、実験法について述べる。

2 実験方法

実験装置の概要を図1に示す。右から、電子銃に加速電圧 V を付加するための、安定化電源、その上は、 V の測定に用いるデジタル型の電圧計、その左は、電子銃を封じこんだ真空管球、その回りの円型に見えるのはヘルムホルツコイルである。最も左の二つはヘルムホルツコイルに2Aまでの直流電流を流す安定化電源、及び電流計である。直流電流の脈動率が大いいと、磁場も脈動し、電子の飛跡も脈動するので、脈動率の小さなものを用いる。次に主な装置について簡単にふれる。

(i) 電子銃を封じこんだ真空管球

直径、約14cmの球形のガラス管で、中に水素ガスを 10^{-2} mmHg程度の圧力で封入してある。ガラス管中を走る電子は水素ガスと衝突し、運動エネルギーの一部を水素ガスに与える。水素分子は、エネルギーを受けとり、励起された後、もとの状態にもどる。水素分子はもとの状態にもどる時、エネルギー差を光として放出する。その光を電子の飛跡として観測する。電子の飛跡が正しく観測されるための、適切な平均自由行程を与

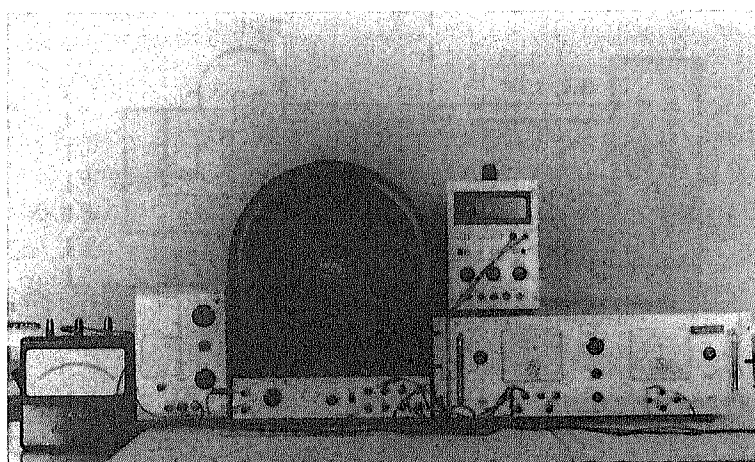


図1 実験装置の概念写真

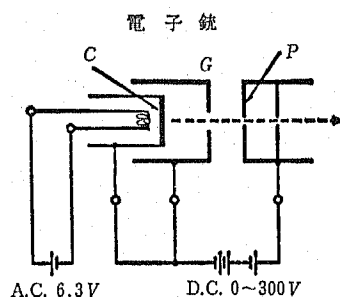


図2 電子銃の配線図

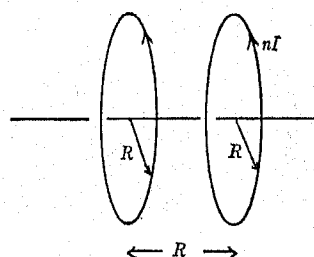


図3 ヘルムホルツコイルの概念図

える程度の水素ガス密度が要請される。

また中の電子銃を図2に示す。 C より熱電子を放出させ、 PC 間で加速電圧 V をかけ、 P から電子ビームとして飛び出す装置である。電子ビームの焦点調節は図4の抵抗 R_1 で行う。また本装置の電子銃は真空管球をセットした状態で、ヘルムホルツコイルの中心軸より4.2~4.5cmに位置する。

(ii) ヘルムホルツコイル

半径 R の円形コイルを図3のように R だけ離して中心軸をあわせ、軸に垂直に対置させたものである。二つのコイルに同じ強さの電流を同方向に流すと、非常によい精度で、

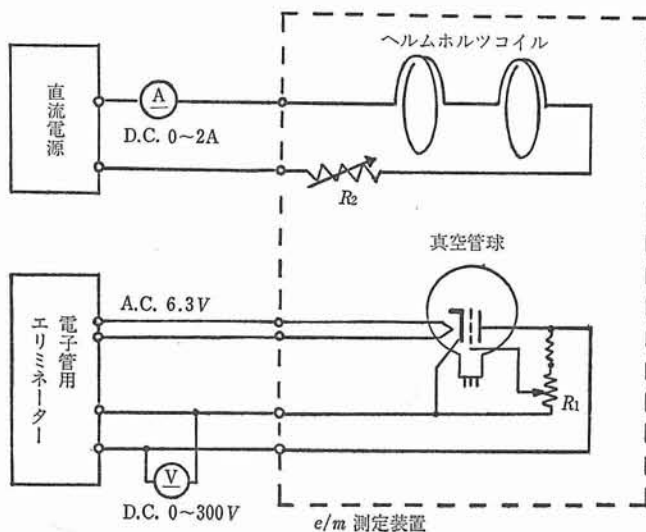


図4 実験装置の結線図

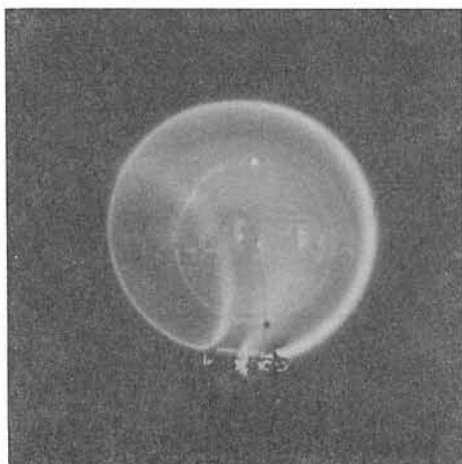


図5 電子の飛跡(円軌道)

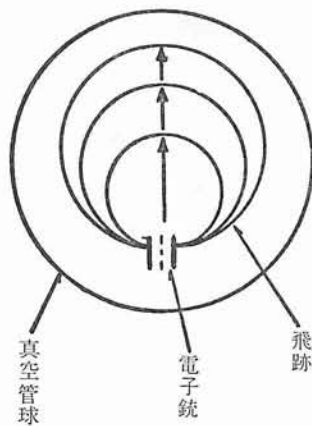


図6 電子の飛跡

均一な磁場を軸方向に得ることができる。本実験では $R=0.15\text{m}$ 、それぞれのコイルに 130 回、電線をまいたものを用いる。(付録参照)

実験方法を次にのべる。まず電源の結線を図 4 のようにする。その後

(i) 真空管球のヒータを点灯し、電子銃の加速電圧をゆっくりあげていくと電子ビームが飛び出し、飛跡が青白く光る。ヘルムホルツコイルの中心付近に真空管球はセットされており、 90° まで回転できるが、電子ビームがコイル面に平行になるよう固定する。つづいてヘルムホルツコイルに直流電流を流すと、図 5 のように、電子ビームは円軌道を描く。写真から見るように、電子は円運動をした後、電子銃に衝突し、散乱され、再び左側に円軌道を描く。また円軌道はヘルムホルツコイル内では、一種のレンズ効果により、矢のように細くなっていく様子も読みとれる。円の大きさは、外側を測定すればよいことも理解されよう。電子の加速電圧 V 、あるいはコイルの電流 I を変化させれば、図 6 に示すように、円の大きさもかわる。 V 、 I 、円の半径 r を測定する。 V 、 I はそれぞれ、電圧計、電流計により、また r は遊動望遠鏡により測定される。

3 データ整理のための定式化

電子の磁場中の運動は方程式

$$\mathbf{F} = -e(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (1)$$

を適切な境界条件のもとで解けばよい。今均一な磁束密度 \mathbf{B} は z 方向の成分のみを有すると仮定する、すなわちカーテシアン座標系を用いれば、 $(0, 0, B)$ とおくことを意味する。このように仮定しても、均一磁場中の運動を式(1)にしたがって解く上で、一般性を失わない。式(1)を x 、 y 、 z の成分にわけて書き下すと

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{dy}{dt} eB \quad (2-1)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dx}{dt} eB \quad (2-2)$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = 0 \quad (2-3)$$

の連立微分方程式となる。境界条件として $t=0$ で位置 $(x, y, z)=(0, 0, 0)$ 、速度 $\mathbf{u}=(u_x, 0, u_z)$ を考える。式 (2-3) から直ちに

$$z = u_z t \quad (3)$$

を得ることができる。式 (2-1)、(2-2) を、互いに代入しあえば独立の三次の線形微分方程式に変形することができる、境界条件を考慮すれば解は

$$x = \frac{u_x m}{eB} \sin\left(\frac{eB}{m} t\right) \quad (4)$$



図7 電子の飛跡（ラセン軌道）

$$y = \frac{u_x m}{eB} \cos\left(\frac{eB}{m}t\right) + \frac{mu_x}{eB} \quad (5)$$

となる。

t を消去すれば、よく知られたように、 x - y 平面への射像は半径 $r = \frac{mu_x}{eB}$ の円軌道となる：

$$x^2 + \left(y - \frac{mu_x}{eB}\right)^2 = \left(\frac{mu_x}{eB}\right)^2 \quad (6)$$

式(4), (5)からわかるように周期は $2\pi m/(eB)$ であるので式(3)に代入すれば

$$z = \frac{2\pi m}{eB} u_z \quad (7)$$

のピッチをもつ、ラセン運動であることが理解される。その様子を写真で示したのが図7である。この式から $u_z = 0$ となるように実験を行えば初速度 $u_x = u$ と加速電圧 V が

$$eV = \frac{1}{2} mu^2 \quad (8)$$

で結びつけられるので、比電荷は

$$e/m = \frac{2V}{(Br)^2} \quad (9)$$

で与えられる。

この式をもとにデータ処理の方法を考えよう。まず、加速電圧 V は電圧計の読み V よりも少めにしか、出ていないと仮定する。電子の加速に対して何らかの障害があることを前提におき、その量は V' であるとする。次に磁束密度は、ヘルムホルツコイルにより作られるもの B_c 、装置のもつ残留磁化 B_r 、地磁気 B_e の三つからなる：

$$B = (B_c + B_r) + B_e. \quad (10)$$

一般に B_c と B_r は同じ方向なので括弧でくくった。すると式(9)は

$$e/m = \frac{2(V - V')}{\{(B_c + B_r) + B_e\}^2 r^2} \quad (11)$$

と書ける。もちろん、 V' 、 B_r 、 B_e は未知の量である。

広島方式の具体的説明から入ろう。 $(B_c + B_r)$ と B_e が直角になるよう装置をセットするところから実験は開始される。この理由は

$$B^2 = (B_c + B_r)^2 + B_e^2 \quad (12)$$

となり、 B_e が一定の大きさでも $(B_c + B_r)$ に比べ小さい場合は、無視することができるからである。しかし、電子銃の方向をヘルムホルツコイルの軸方向に直角におけば、これまで述べてきたように電子はラセン運動をする。比電荷はラセン運動の半径 r を測定することにより、式(6)と式(8)を用いて

$$e/m = \frac{2(V - V') \cos^2 \theta}{\{(B_c + B_r)^2 + B_e^2\} r^2} \quad (13)$$

と求められる。ここで θ はヘルムホルツコイルの軸方向と磁場の方向のなす角である。この関係式から $\cos \theta$ を 1 とするには、電子銃の方向を若干、回転してやればよい。そうすれば式(13)は

$$e/m = \frac{2(V - V')}{\{(B_c + B_r)^2 + B_e^2\} r^2} \sim \frac{2(V - V')}{(B_c + B_e)^2 r^2} \quad (14)$$

となる。もし B_r を無視できるなら、式(14)から $B_e^2 =$ 一定の条件のもと縦軸を r^2 、横軸 V という測定値をプロットすれば、直線にのり、その勾配から e/m を求めることができる。また縦軸の切片から V' の大きさを見積もることも可能である。しかし、ここで、もう一つ別の仮定が入っている。それは B_c がヘルムホルツコイルの軸方向に直角方向により精度で均一であるという前提である。ここでは B_c として中心軸の midpoint のそれを採用し、前節で与えた装置に対する数値を代入すると

$$B_c \cong u_0 \left(\frac{4}{5} \right)^{3/2} \frac{n}{R} I = 7.793 \times 10^{-4} I \text{ (Wb/m}^2\text{)} \quad (15)$$

しかし、当然 R が大きくなれば、その均一性はくずれてくる (付録参照)。次の節で述べるように、くずれの程度は B_r の大きさと同じ程度である。そのため B_c のくずれは理論的に評価しえても、 B_r を何らかの方法で、知る必要がある。

一言でいえば、広島方式は磁束密度 B を B_c のみと仮定し、式(14)に従って B_c を一定とすれば V と r^2 が比例関係にあることから、比電荷 e/m を求める方法である。また、この方法から B を均一性のずれなど、正確に評価することが可能であれば、加速電圧のずれ V' を知ることが出きることを指摘しておく。

次に北大方式の説明に移ろう。実験指導書には具体的には述べられていないが、まず装置を $(B_c + B_r)$ と B_e が平行になるようセットする。しかし、地磁気 B_e には伏角があるので、それは不可能であるが、實際上、ヘルムホルツコイルの軸方向と南北方向を一致させることによって近似する。すると式(14)は

$$e/m = \frac{2(V - V')}{(B_c + B_r \pm B_e)^2 r^2} \quad (16)$$

となる。ここで土はヘルムホルツコイルの作る磁場の方向が地磁気の方

反方向になるかに依存してとられる。ここで r^2 を一定とすれば

$$\sqrt{2(V-V')} = \sqrt{\frac{e}{m}}(B_c + B_r \pm B_e)r \quad (17)$$

であり、 $\sqrt{V-V'}$ と B_c が比例する。従って、もし V' が小さいと仮定すれば、 r を一定の条件で、縦軸に \sqrt{V} 、横軸にヘルムホルツコイルに流す電流 I をとり、測定値をプロットすると、直線にのることがわかる。その勾配から比電荷 e/m を求めることができる。また縦軸の切片から $B_r \pm B_e$ を知ることが可能である。ヘルムホルツコイルに流す電流を時計回り、反時計回りと二回とり実験を行えば、 B_r 、 B_e を独立に求めることもできる。さらに半径 r が一定という条件なので、 B_c の均一性もほぼ保証されるという利点がある。そのため、 B_c をヘルムホルツコイルの中心軸上の中心からのずれも考慮してより正確にとることが望ましい。附録でのべる近似式に再び、前の節で与えた装置に対する数値を代入すると

$$\begin{aligned} B_c &\cong \mu_0 \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} \frac{n}{R} \left(1 - \frac{54}{125} \left(\frac{r}{R}\right)^4\right) I \\ &= 7.793 \times 10^{-4} \left(1 - \frac{2 \times 10^8}{3 \times 5^7} r^4\right) I \text{ (Wb/m}^2\text{)} \end{aligned} \quad (18)$$

となり、データ処理にはこの値を用いる。

北大方式の利点はヘルムホルツコイルの作る磁場のみを引き出し \sqrt{V} と B_c の比例関係から比電荷 e/m を求める点にある。しかし、電子銃の加速電圧の含む誤差 V' を評価することは、全く不可能である。またつけ加えれば、電子銃の位置がヘルムホルツコイルの中心より約4.3cmなので、この値に近い円軌道を描かすことが望ましいことは、いうまでもない。

今まで見てきたように、二つの方法はそれぞれ、利点、欠点をもっている。未知量 B_r 、 B_e と V' の評価について、おさらいすると

- (i) 広島方式： B_r と B_e を他の方法で求めることができれば V' を評価できる。
 - (ii) 北大方式： V' を他の方法で求めることができれば B_r と B_e を評価できる。
- すると広島方式、北大方式を総合して用いれば三つの未知量全てを評価できることに気づく。すなわち、評価の手続を次のようにすればよい。
- (i) $V'=0$ とおいて、北大方式で B_r と B_e を求める。
 - (ii) その B_r 、 B_e を用いて広島方式を用いて V' を求める。
 - (iii) (ii)で求めた V' を代入して再び北大方式で B_r と B_e を求める。

この手続をくり返し、三つの未知量が一つ前のステップで求めた量と計算精度の範囲内で一致すれば、それが求める未知量である。よく知られた逐次近似の方法である。このように、三つの未知量が求まれば、これらの量を無視することが可能である V 及び B_c の範囲を設定することができる。

4 実験データ及び解析

4-1 広島方式による実験

ヘルムホルツコイルに流す電流を $I = 1.0A, 1.2A, 1.4A, 1.6A$ に固定して, 加速

表1 加速電圧 V と円軌道 r の測定値 (ヘルムホルツコイルに流す電流 I =一定)

$I = 1.0A$

$V(V)$	$r(10^{-2}m)$
80	3.556
90	3.851
100	4.102
110	4.325
120	4.538

$I = 1.2A$

$V(V)$	$r(10^{-2}m)$
90	3.315
110	3.701
130	4.028
150	4.329
170	4.617

$I = 1.4A$

$V(V)$	$r(10^{-2}m)$
120	3.375
140	3.646
160	3.901
180	4.152
200	4.346

$I = 1.6A$

$V(V)$	$r(10^{-2}m)$
110	2.837
140	3.211
170	3.543
200	3.839
230	4.109

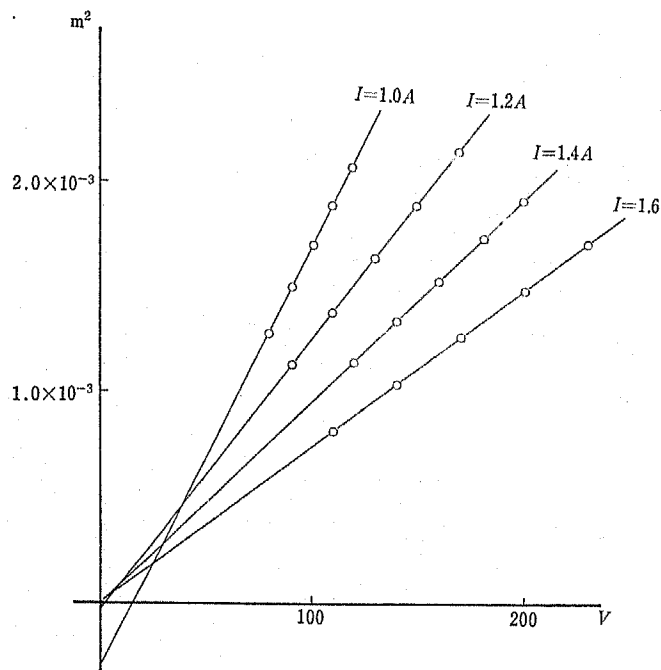


図8 加速電圧 V と (半径 r)² の関係

表2 測定値から求められた e/m

$I(A)$	$e/m(10^{11}C/kg)$
1.0	1.666
1.2	1.781
1.4	1.775
1.6	1.749

電圧を変化させ、円軌道の半径を測定する。そのデータを表1に載せる。式(1), 式(2)に従ってデータを処理するために、 V を横軸に、 r^2 を縦軸にプロットしたのが図8である。測定点が直線にのると仮定し、最小二乗法を用いて、その勾配と切片をきめる。直線も同時に図8に描いてある。直線の勾配から比電荷を求めた結果を表2に示す。図8から見て、

$I=1.0A$ に対応する測定点から求めた縦軸の切片が

極端に原点からずれる。次に、ずれが大きいのは $I=1.2A$ に対する場合である。この傾向は式(4)が示すように切片は $-2V'/\{B_c^2 e/m\}$ となり B_c の増加とともに、小さくなる点とよく一致している。しかし、 $I=1.0A$ に対する r^2 は $3.06 \times 10^{-4} m^2$, $I=1.2A$ は $0.50 \times 10^{-4} m^2$ であり、この値から $V'=1.5V, 2.5V$ と大きく、ずれている結果となっている。この原因は前の節で述べたように磁束密度 B の不均一性によるものと考えられる。 $r=3cm$ と $r=5cm$ の B_c の理論値を比較すれば4%程度ほどの差が見られる。この補正を考慮に入れば、直線の傾向はより原点に近づくようになる。しかし、その定量的分析は、 B_r, B_e の正しい評価に待たねばならない。

$I=1.4A, I=1.6A$ の場合、直線の傾向は、非常に良い振まいとなる。 B_c に比し、 B_r は相対的に小さくなること、 B_e が大きくなることから円軌道の半径が小さくなり、磁場の均一性が保たれることによる。

4-2 北大方式による実験

円軌道の半径 r を 3.8cm, 4.3cm, 4.8cm に固定し、ヘルムホルツコイルに流す電流 I を変化させ、加速電圧 V を測定する。加速電圧は $100V \leq V \leq 300V$ の範囲内で実験を

表3 電流 I と加速電圧 V の測定値 (円軌道 r =一定)

(地磁気方向)

 $r=3.8cm$

$I(A)$	$V(V)$
1.2	119.88 ± 0.17
1.4	154.82 ± 0.10
1.6	206.24 ± 0.16
1.8	265.08 ± 0.36

 $r=4.3cm$

$I(A)$	$V(V)$
1.0	111.12 ± 0.13
1.2	150.00 ± 0.27
1.4	203.36 ± 0.11
1.6	266.84 ± 0.36
1.8	337.98 ± 0.34

 $r=4.8cm$

$I(A)$	$V(V)$
1.0	131.28 ± 0.52
1.2	177.80 ± 0.20
1.4	243.98 ± 0.15
1.6	318.04 ± 0.24

(反方向)

 $r=3.8cm$

$I(A)$	$V(V)$
1.2	133.30 ± 0.16
1.4	175.16 ± 0.41
1.6	225.80 ± 0.41
1.8	285.74 ± 0.54

 $r=4.3cm$

$I(A)$	$V(V)$
1.0	122.34 ± 0.12
1.2	171.12 ± 0.19
1.4	223.94 ± 0.28
1.6	290.16 ± 0.30

 $r=4.8cm$

$I(A)$	$V(V)$
0.8	107.02 ± 0.29
1.0	151.34 ± 0.23
1.2	211.34 ± 0.37
1.4	281.24 ± 0.25

行なう。まずヘルムホルツコイルの作る磁場と地磁気の方が同じ方向、次に反方向になるよう装置をセットし、測定する。実験データを表3に載せる。測定は5回行ない、誤差の評価は確率誤差（公算誤差）によっている。このデータから一目で、地磁気 B_e の影響が読みとれる。同じ半径 r でも逆方向の場合、 I を共通におけば加速電圧 V は、

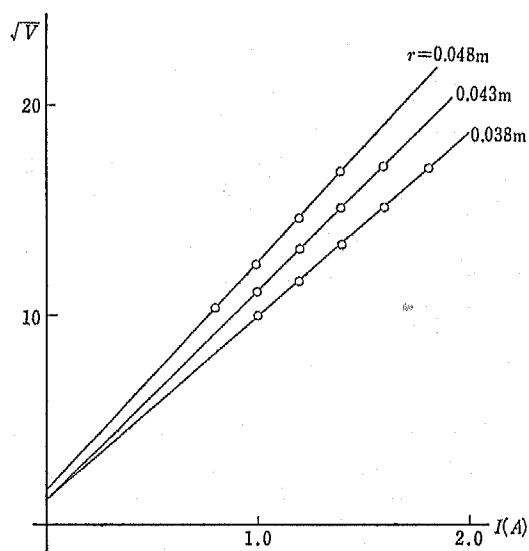


図9 $\sqrt{\text{加速電圧 } V}$ と電流 I の関係（地磁気方向）

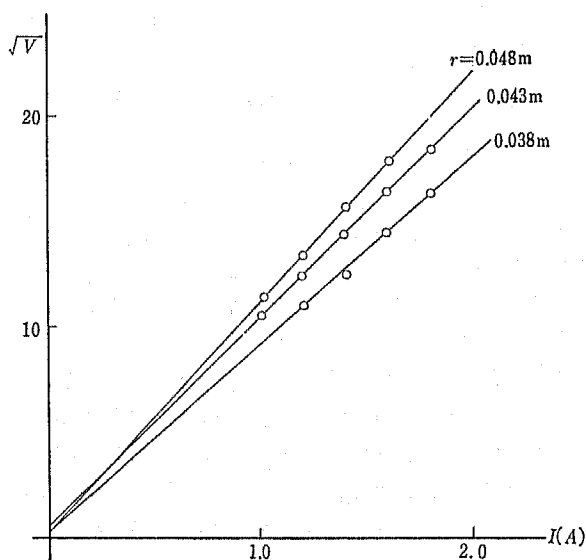


図10 $\sqrt{\text{加速電圧 } V}$ と電流 I の関係（反方向）

表4 測定値から求められた e/m (地磁気方向)

(反方向)

$r(10^{-2}m)$	$e/m(10^{11}C/kg)$	$r(10^{-2}m)$	$e/m(10^{11}C/kg)$
3.8	1.838	3.8	1.805
4.3	1.725	4.3	1.757
4.8	1.719	4.8	1.691

順方向のそれより小さくなる。縦軸を \sqrt{V} に横軸を I にとり、データをプロットしたのが図9、図10である。確率誤差の逆数を重みとして、最尤法⁴⁾を用いて、データを処理し、直線として描いたものも同時にのせてある。またその勾配から求めた比電荷 e/m を表4にのせる。加速電圧を100V以上と範囲を設定したため、 V' は小さいものとして、無視することが出来る。そのため、どの場合の比電荷も比較的信頼できるものとなっている。また縦軸の切片から、それぞれ $B_r + B_e$, $B_r - B_e$ を評価することができる。結果は $B_r = 0.59 \times 10^{-4} \text{Wb/m}^2$, $B_e = 0.34 \times 10^{-4} \text{Wb/m}^2$ である。この値 B_e は松本地区の地磁気を理科年表から引用した値、水平分力は $0.34 \times 10^{-4} \text{Wb/m}^2$, 絶対値は $0.47 \times 10^{-4} \text{Wb/m}^2$ とよく一致している。

このように求めた B_r と B_e の値と B_c の理論値、式(9)を用い、広島方式に代入し、逐次近似で B_r , B_e , V' を求めると、それぞれ $B_r = 0.59 \times 10^{-4} \text{Wb/m}^2$, $B_e = 0.34 \times 10^{-4} \text{Wb/m}^2$, $V' = 1.8 \text{V}$ となる。残留磁化 B_r も B_e が小さい時、例えば $I = 1.0 \text{A}$ の時は、 B_c の5%と決して無視することができない大きさである。また V' も加速電圧 V の小さい時、70V程度の際は2.5%とこれも考慮せねばならぬ量となる。このようにして、 B_r , B_e , V' を評価した後、比電荷 e/m を求めると

$$e/m = (1.756 \pm 0.019) \times 10^{11} \text{C/kg}$$

となり、この値は、物理定数表に用いられている

$$e/m = 1.7588 \times 10^{11} \text{C/kg}$$

をよく再現している。

5 結 論

最初に、学生実験用の簡単な装置を用いても電子の比電荷 e/m に対する、比較的信頼できる値を求めることが可能であることを指摘した。このため、広島方式、北大方式と二つのデータ処理法を実際の実験に即して、詳しく検討してきた。さらに、二つの方法の利点を組みあわせることにより、納得できる e/m を求めることが可能であることを示した。広島方式は、その単純明快さ、北大方式は、磁場の理論値からのずれを正確に扱った点にその特徴があった。今回の報告で、 e/m の測定値の誤差の原因となる三つの要素、装置の残留磁化 B_r 、地磁気 B_e と加速電圧の電圧計からのずれ V' の凡その評価を与えることができた。これらにもとずき、次の手順で実験を行なうことを提唱したい。

- (1) 装置をヘルムホルツコイルの作る磁場の方向と地磁気を逆方向になるようセットす

る。 B_r と B_e がほぼ同じ大きさであることに着目すれば $B_e + B_r - B_e \cong B_e$ と近似することができることによる。

- (2) ヘルムホルツコイルに流す電流 I を比較的大きめにとる。しかし、あまり大電流を流すとヘルムホルツコイルが熱をもつので、その範囲を $1.4 \leq I \leq 1.8 \text{ A}$ ととる。また加速電圧 V も、 V' を無視できる程度の大きさが望ましい。具体的には $150 \leq V \leq 300 \text{ V}$ の範囲を仮定する。また、円軌道の半径は大きくない方がよい。何故なら、均一な磁場を精度よく保証するためである。また電子銃の位置から見て、その距離 4.3 cm 程度もまた望ましい。これらの点から $3.5 \leq r \leq 4.3 \text{ cm}$ 程度を設定する。これらの範囲内で10~15点を選び実験する。
- (3) 円軌道の半径 r の測定には遊動望遠鏡を用いる。まず電子銃の位置に視点を置き、その目盛を読む。その後の測定は、電子銃が固定されているので、円軌道の最上端を測定すればよい。また、望遠鏡の位置も固定することができるので、 r を数点選び、 r を一定にするという条件で測定をするのが望ましい。
- (4) データの整理として、 I を一定の条件で、 V と r^2 を縦軸、横軸にとりプロットする。測定点が直線にのっていること、その直線が、ほぼ原点を通ることを確認する。練習のため、最小二乗法を用いるのもよい。
- (5) 各測定値から比電荷 e/m を求め平均する。

また各装置によっては V' が極端に大きい場合、逆に B_r が大きい場合など様々であろう。その場合、場合に応じて、広島方式、北大方式を選択することになる。さらに、 V' 、 B_r とも大きい最悪の場合は、今回の報告で述べたように、二つの方法を結びつける必要がある。

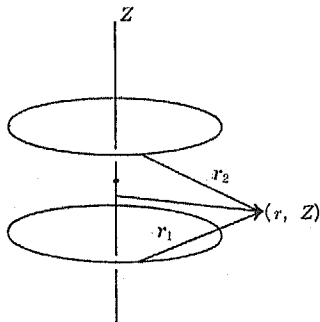
今回の報告を作成するにあたり、均一な磁場が得られているか、どうしても確認する必要があった。そのためのガウスメータを心よく貸して下さった信州大学教養部の一之瀬匡典教授をはじめ教養部物理学教室の皆様にご感謝いたします。

引用文献

- 1) 重田重二郎(他), 基礎教育物理学実験: 167, 175 (1979) 共立出版
- 2) 下村健次(他), 基礎物理学実験: 142 (1977), 共立出版
影山誠三郎(他), 基礎物理実験: 190 (1979), 朝倉書店
鮎川武二(他), 医学歯学のための物理実験: 115 (1978), 集文社
奥田毅(他), 基礎教養物理実験: 147 (1979), 内田老鶴圃
- 3) 林正一(他), 物理学基礎実験: 117 (1979), 学術図書出版社
- 4) S. プラント(吉城肇他訳): データ解析の方法: 128 (1970), みすず書房

(附録) ヘルムホルツコイルの作る磁場

ヘルムホルツコイルは図に示すように、半径 R のコイル 2 個を、その中心軸をそろえ、 R だけ離してセットしたものである。そのコイルに同じ方向、同じ強さの電流 I を流す。中心軸を z 軸にとり、二つのコイルの中点を原点におけば、点 $P(x, y, z)$ の磁束密度



附図1 ヘルムホルツコイル

は MKSA 有理単位系では

$$\frac{\mu_0 n I}{4\pi} \left\{ \int \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_1}{r_1^3} + \int \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_2}{r_2^3} \right\} \quad (\text{A. 1})$$

とおける。ベクトル $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ は図のようにとる。また $d\mathbf{l}$ はコイル上の線積分要素である。 μ_0, n は透磁率, コイルの巻き数である。 z 方向, 中心軸から r 方向への磁束密度は

$$B_r(r, z) = \frac{\mu_0 n I}{4\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{R(z - \frac{R}{2}) \cos \theta d\theta}{(\frac{5}{4}R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta + z^2 + zR)^{3/2}} \right.$$

$$\left. + \int_0^{2\pi} \frac{R(z + \frac{R}{2}) \cos \theta d\theta}{(\frac{5}{4}R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta + z^2 - zR)^{3/2}} \right\} \quad (\text{A. 2})$$

$$B_z(r, z) = \frac{\mu_0 n I}{4\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - Rr \cos \theta) d\theta}{(\frac{5}{4}R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta + z^2 + zR)^{3/2}} \right.$$

$$\left. + \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - Rr \cos \theta) d\theta}{(\frac{5}{4}R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta + z^2 - zR)^{3/2}} \right\} \quad (\text{A. 3})$$

と式 (A. 1) は書き下される。この積分は、解析的には解けない。しかし $r=0$ とおけば、よく知られた電磁気学の例題となる。一般的には次のマクローリン展開をした後、 $\int_0^{2\pi} \cos^n \theta d\theta$ を実行すれば、級数展開の形で求めることができる。すなわち、

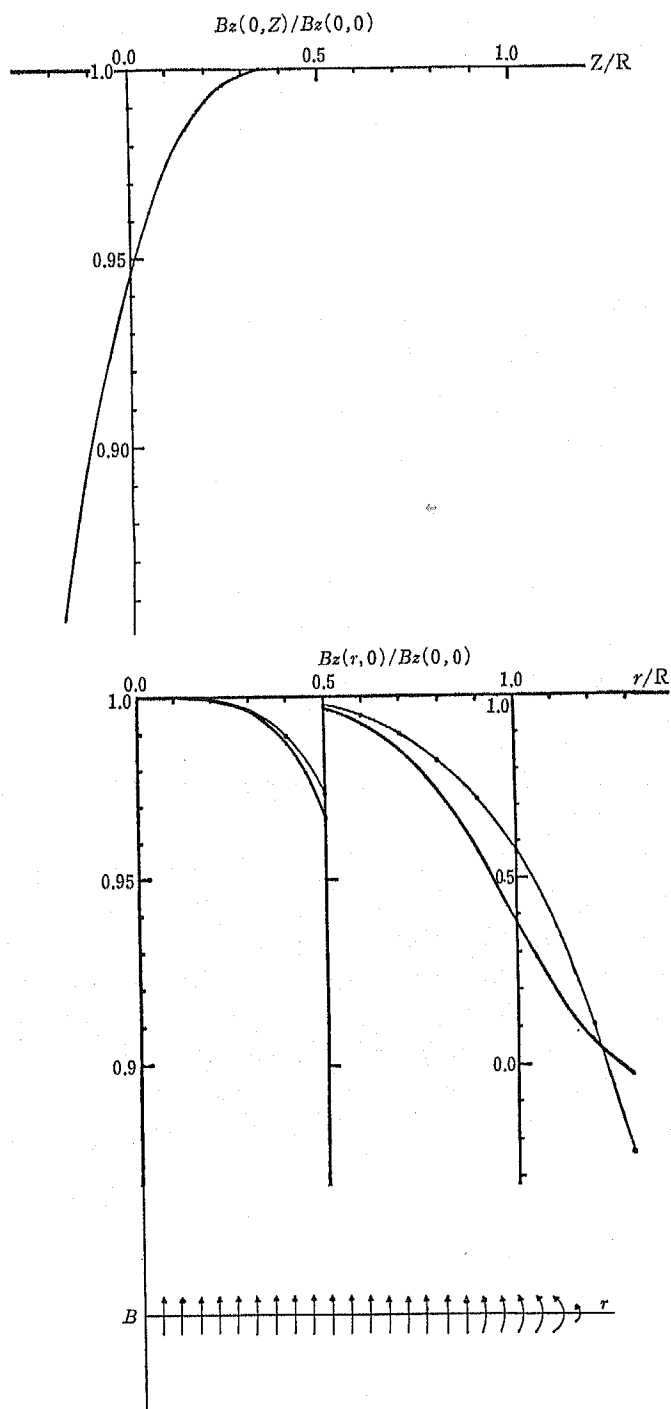
$$B_r(r, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(r \frac{\partial}{\partial r} + z \frac{\partial}{\partial z} \right)^m B_r(r, z) \Big|_{r=0, z=0} \quad (\text{A. 4})$$

$$B_z(r, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(r \frac{\partial}{\partial r} + z \frac{\partial}{\partial z} \right)^m B_z(r, z) \Big|_{r=0, z=0}$$

となる。 B_r はその三次までの全ての項, B_z は第二, 第三項の係数が 0 となる。 $B_z(r, z)$ の z 方向, r 方向の必要な式をかけば

$$B_z(0, z) = B_z(0, 0) \left(1 - \frac{144}{125} \left(\frac{z}{R} \right)^4 + O\left(\frac{z}{R} \right)^6 - \dots \right) \quad (\text{A. 5})$$

$$B_z(r, 0) = B_z(0, 0) \left(1 - \frac{54}{125} \left(\frac{r}{R} \right)^4 + O\left(\frac{r}{R} \right)^6 - \dots \right) \quad (\text{A. 6})$$



附図2 ヘルムホルツコイルの作る磁束密度と r 軸方向での磁力線

であり, r , z 方向とも非常に安定な磁場であることが理解できる。また, 式 (A. 2), (A. 4) は電子計算機を用いれば, 直接数値積分により求めることも可能である。(A. 5) の正確な値, (A. 6) の正確な値と 4 次までの近似的な値を附図 2 に示す。また, どの程度安定な磁場であるか知るには, 磁力線の曲率半径を見るのが便利である。 $B(r, 0)$ に対する曲率半径 ρ は

$$\rho = \lim_{dz \rightarrow 0} \frac{B_r(r, dz) dz}{B_z(r, 0)}$$

と求めることが出き, それもあわせて, 附図 2 にのせる。この様子から, まずヘルムホルツコイルの作る磁場は, 非常に安定であること, 次に磁力線のカーブは, 電子の軌道が散るのを防ぐように働くこと, つまり一種のレンズ効果を示すことがわかる。

Summary

On the Teaching Method for e/m of Electron by Cathode-ray Tube

Katsuyuki NAITO and Akihiro SUZUKI

Faculty of Textile Science and Technology, Shinshu University, Ueda

A new kind of data analysis for e/m of electron is proposed. The electron in a uniform magnetic field makes orbits on a circle. The e/m is obtained by measuring its radius, the strength of magnetic field and initial velocity of electron. These experimental data, however, include various kinds of indispensable errors. A reliable value of e/m is extracted by the data analysis which eliminates these errors skilfully. This procedure is a combination of two different methods mentioned in ordinary textbooks. Experiment and data analysis are demonstrated by the use of a traditional cathode-ray tube.