

# 仮想的なパラメータ変動を用いたロバスト安定性解析方法 — 保守性を低減化した解析方法の提案\*

千田 有一<sup>†</sup>・木村 剛生<sup>‡</sup>・古川 亮<sup>§</sup>

## Robust Stability Analysis Method Using Virtual Parametric Variations

### — Proposition of Less Conservative Analysis Method\*

Yuichi CHIDA<sup>†</sup>, Takeo KIMURA<sup>‡</sup> and Ryo FURUKAWA<sup>§</sup>

In this paper, a robust stability analysis problem is considered.  $\mu$ -Analysis is a useful tool in order to guarantee stability robustness, but obtained results by conventional procedures are sometimes conservative. On the other hand, to guarantee stability robustness of active control systems in space is extremely important. A new robust stability analysis procedure by using virtual parametric variations is proposed in order to carry out tight evaluation of the stability robustness for active control systems. Performance of the proposed procedure is verified by an example of a mechanical vibration control system.

#### 1. はじめに

宇宙機や宇宙システムにおいてアクティブ制御を用いる場合には、その信頼性を確保するため、設計時に十分なロバスト安定性を保証する必要がある。とくに、機械振動系では、地上と境界条件が異なり、不安定化のリスクが増すためにその重要性は非常に大きい[7]。そこで、 $H^\infty$ 制御や $\mu$ 設計などのロバスト制御設計[2]が用いられるが、得られた制御器が理論的に安定性保証できる制御対象パラメータの変動幅は、その制御器が実際に許容する変動幅に比べて小さい場合が多い。このようなロバスト安定性評価の保守性を低減化するため、制御系設計後に、より保守性の少ない方法でロバスト安定性解析を行い、許容されるパラメータ変動幅をタイトに見積もることが行われる。宇宙システムのように、ロバスト安定性を厳密な形で保証したい場合、このような理論的

なロバスト安定性の保証は非常に重要である。このような観点から、本論文では、保守性を低減化したロバスト安定性解析方法を提案する。すなわち、与えられた制御系のもつロバスト安定余裕を、理論的裏付けのもとでできるだけタイトに見積もることが本論文の主目的である。

本論文では、制御対象として振動系を念頭に置く。多くの機械振動系では、複数の振動モードを制御モードと非制御モードに分けて考え、制御モード周波数帯域での変動はパラメトリックな変動、非制御モード周波数帯域での変動については非構造的摂動で取り扱うと合理的であることが指摘されている[5]。しかしながら、機械振動系の物理パラメータは、制御モードと非制御モードの両者に影響を与えるため、都合よくパラメトリック変動と非構造的摂動に分けることは困難であった。そこで本論文では、制御対象のパラメータ変動を、制御モードダイナミクスのパラメータ変動と、非制御モード周波数帯域における非構造的摂動の二つに分けて表すことを考える。その際、制御モードダイナミクスのパラメータ変動は、制御対象の物理パラメータの変動とは異なる、仮想的に導入したパラメータの変動として表す[1]。その後、 $\mu$ 解析を用いてロバスト安定解析を行うことにより、保守性を低減化したロバスト安定性評価が可能となる。提案方法の有効性は、機械連成振動制御系を例題とした解析結果により示す。

\* 原稿受付 2006年6月26日

<sup>†</sup> 信州大学 工学部 Department of Mechanical Systems Engineering, Shinshu University; 4-17-1, Wakasato, Nagano 380-8553, JAPAN

<sup>‡</sup> 信州大学 大学院 工学系研究科 Graduate School of Engineering, Shinshu University; 4-17-1, Wakasato, Nagano 380-8553, JAPAN

<sup>§</sup> (株)東芝 研究開発センター R&D Center Toshiba Corporation; 1, Komukai Toshiba-cho, Saiwai-ku, Kawasaki 212-8582, JAPAN

**Key Words:** robust stability analysis, structured singular value, vibration system, virtual perturbation.

## 2. 問題設定

### 2.1 例題とする制御対象

現状のロバスト安定解析方法の保守性を示し、得られる性能を比較するため、Fig. 1 に示す機械振動系を例題として用いる<sup>1</sup>。Fig. 1 のシステムは振動問題に関するベンチマーク問題 [6] として示されている対象である。このシステムは、四つのマスによって構成され、それぞれのマスはバネとダンパを介して結合されている。 $m_i$  ( $i=1\sim 4$ ),  $k_i$  ( $i=1\sim 4$ ),  $d_i$  ( $i=1\sim 4$ ) はそれぞれ、マス、バネ定数、減衰定数である (パラメータは Table 1 に示す)。運動方程式は次式で表される。

$$m_1 \ddot{x}_1 = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2 - (d_1 + d_2)\dot{x}_1 + d_2 \dot{x}_2 \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = k_2 x_1 - (k_2 + k_3)x_2 + k_3 x_3 + d_2 \dot{x}_1 - (d_2 + d_3)\dot{x}_2 + d_3 \dot{x}_3 \quad (2)$$

$$m_3 \ddot{x}_3 = k_3 x_2 - (k_3 + k_4)x_3 + k_4 x_4 + d_3 \dot{x}_2 - (d_3 + d_4)\dot{x}_3 + d_4 \dot{x}_4 \quad (3)$$

$$m_4 \ddot{x}_4 = k_4 x_3 - k_4 x_4 + d_4 \dot{x}_3 - d_4 \dot{x}_4 + u_p \quad (4)$$

状態変数ベクトルを  $x_p$  とし、状態方程式を次式で表す。

$$x_p := [x_1, x_2, x_3, x_4, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_4]^T \quad (5)$$

$$\dot{x}_p = \underbrace{\begin{bmatrix} O_{4 \times 4} & I_{4 \times 4} \\ M^{-1}K & M^{-1}D \end{bmatrix}}_{A_p} x_p + \underbrace{\begin{bmatrix} O_{4 \times 1} \\ M^{-1}B \end{bmatrix}}_{B_p} u_p \quad (6)$$

$$y_p = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C_p} x_p \quad (7)$$

$$M := \text{diag}(m_1, m_2, m_3, m_4) \quad (8)$$

$$K := \begin{bmatrix} -(k_1 + k_2) & k_2 & 0 & 0 \\ k_2 & -(k_2 + k_3) & k_3 & 0 \\ 0 & k_3 & -(k_3 + k_4) & k_4 \\ 0 & 0 & k_4 & -k_4 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$D := \begin{bmatrix} -(d_1 + d_2) & d_2 & 0 & 0 \\ d_2 & -(d_2 + d_3) & d_3 & 0 \\ 0 & d_3 & -(d_3 + d_4) & d_4 \\ 0 & 0 & d_4 & -d_4 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$B := [0, 0, 0, 1]^T \quad (11)$$

制御入力  $u_p$  はマス 4 に加えられ、マス 4 の速度  $y_p = \dot{x}_4$  が検出可能とする。制御対象のボード線図を Fig. 2 に示す。このシステムは四つの振動モードをもち、1 次振動モードの固有振動数は 23[Hz]、2 次以上の振動モード

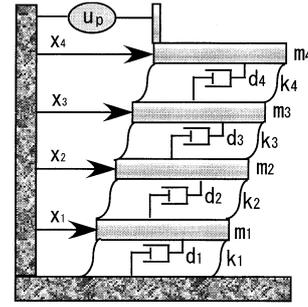


Fig. 1 Mechanical vibration system

Table 1 Nominal parameters

$m_1, m_2, m_3, m_4$	1.5 [kg]
$k_1, k_2, k_3, k_4$	$2.6 \times 10^5$ [N/m]
$d_1, d_2, d_3, d_4$	10 [Ns/m]

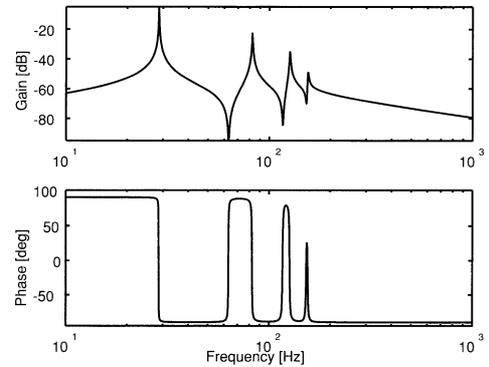


Fig. 2 Plant

はそれぞれ 66[Hz], 102[Hz], 127[Hz] である。また、一つのパネ定数  $k_i$  を変動させた場合、四つすべての振動モードに影響を与える系となっている。

### 2.2 制御器の設計

システムはフィードバック制御  $u_p(s) = -K(s)y_p(s)$  によって安定化され、前提条件として、安定化制御器  $K(s)$  はあらかじめ適切な方法で設計されているとする。本論文で用いた制御器は、次式の 3 次のローパスフィルタとし、そのボード線図を Fig. 3 に示す。

$$K(s) = \frac{7.661 \times 10^{11}}{s^4 + 1608s^3 + 1.152 \times 10^6 s^2 + 4.064 \times 10^8 s + 6.384 \times 10^{10}} \quad (12)$$

一巡伝達関数のボード線図を Fig. 4 に示す。Fig. 4 より、この系は  $K(s)$  によって安定化されていることがわかる。また、1 次振動モードは位相安定化された制御モードであり、2 次以上の振動モードはゲイン安定化された非制御モードとなっている。ここで、「位相安定化」とは、一巡伝達関数のゲインが 0[dB] 以上であるが、位相が  $-180$  度未満となるために安定性が保証されることを意味し、「ゲイン安定化」とは一巡伝達関数のゲインが 0[dB] 未満となることにより安定性が保証されることを意味する [8,9]。

<sup>1</sup>本論文で提案するロバスト安定解析方法は一般の制御対象に適用可能であり、Fig. 1 のシステムに特化した方法ではない。Fig. 1 のシステムは、本論文で考える問題を具体化するために便宜的に用いるものである。

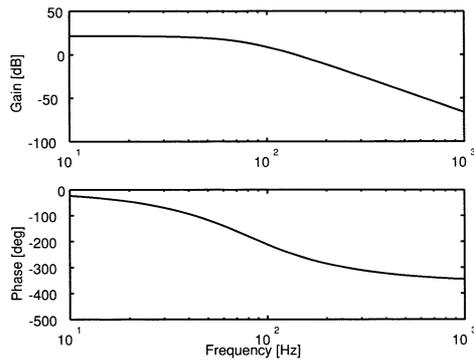
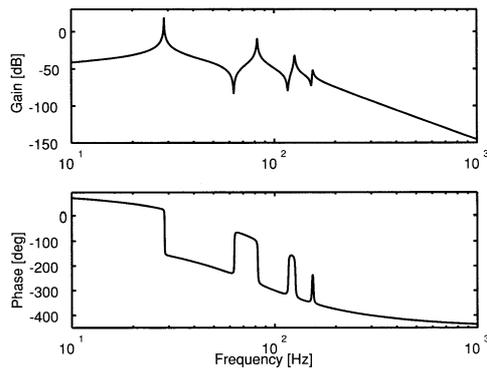
Fig. 3 Pre-designed controller  $K(s)$ 

Fig. 4 Loop transfer function

### 2.3 考える問題

制御系のロバスト安定性を考慮するためには、ロバスト制御理論によって制御器を設計することが一般的であるが、許容される変動幅は、設計された制御器が実際に許容できる変動幅よりも小さくなることが多い。そのため、制御系設計後に、より保守性の少ない方法で改めてロバスト安定性解析を行い、許容されるパラメータ変動幅をタイトに見積もることが行われる。本論文では、ロバスト安定性解析問題について考え、与えられた制御系が許容する制御対象の変動幅をできるだけ厳密な形で見積もることを目的とする。そのため、制御系設計問題は本論文の考慮外とし、制御器はあらかじめ適切な方法で設計されているとする。そのうえでロバスト安定性解析によって保証されるパラメータ変動の最大幅を求めることによって、提案方法を含めた各種解析手法の保守性の度合いを比較する。ロバスト安定性解析の保守性を比較する便宜上、本論文では(12)式の制御器によって構成された制御系について、次のロバスト安定性解析問題を考える。

**[ロバスト安定性解析問題]** 与えられた(12)式の制御器によって構成された制御系が、すべての  $k_i$ ,  $d_i$  ( $i=1\sim 4$ ) について、 $\pm 35\%$  のパラメータ変動に対するロバスト安定性を保持していることを保証する。

Fig. 4 から明らかなように、制御器(12)は非常に弱いフィードバック制御を行う。そのため、制御系は非常に広いパラメータ変動幅を許容すると予想される。実際、制御対象の各パラメータをそれぞれ  $\pm 35\%$  変動させ

た端点における256個の変動モデルにおいて安定判別を行った結果、すべての変動系において安定性を確認した。よって、上記のロバスト安定性の保証は各種ロバスト安定解析手法によって可能であると予想される。

上記ロバスト安定性解析問題について、以下の3種類のアプローチ方法が考えられる。

- 方法1: すべてのパラメータ  $k_i$ ,  $d_i$  をそれぞれ異なるパラメトリック変動として扱い、 $\mu$  解析を用いてロバスト安定性解析を行う方法。
- 方法2: パラメータ変動によって起こる摂動を一括して非構造的摂動として扱い、スモールゲイン定理に基づく方法で安定性解析を行う。
- 方法3 (提案方法): 制御モード周波数帯域に寄与する変動はパラメトリック変動、非制御モード周波数帯域に寄与する変動は非構造的摂動として扱い、 $\mu$  解析に基づいた安定性解析を行う。その際、制御モード周波数での変動は、新たに導入した仮想的なパラメータを用いて表す。

以上、3種類の方法を用いてロバスト安定性の保証が可能かどうかを検証した。その結果、方法1および方法2では安定性の保証が困難であった。一方、方法3を用いると、ロバスト安定性の保証が可能となった。

## 3. 従来方法による結果の比較

### 3.1 方法1によるロバスト安定性解析結果

考慮すべき八つのパラメータ  $k_i$  および  $d_i$  ( $i=1\sim 4$ ) はすべてパラメトリック変動として扱い、文献[3,4]の方法を適用した。以下では、 $\bar{\cdot}$  は、各パラメータのノミナル値を表す。また、 $k_i$ ,  $d_i$  は変動  $\delta_i$  を用いて  $k_i = \bar{k}_i + \delta_i k_i^\Delta$ ,  $d_i = \bar{d}_i + \delta_{i+4} d_i^\Delta$  ( $i=1\sim 4$ ) と表される。ここで、 $|\delta_i| < 1 (\forall i)$  である。また、 $k_i^\Delta$ ,  $d_i^\Delta$  は  $\delta_i$  を正規化するパラメータである。システム(6)は、ディスタリプタ表現を用いて次のように表される。

$$(E_0 + \sum_{i=1}^8 \delta_i E_i) \dot{x}_p = (A_0 + \sum_{i=1}^8 \delta_i A_i) x_p + (B_0 + \sum_{i=1}^8 \delta_i B_i) u_p \quad (13)$$

ここで、 $E_0 := \text{diag}(I, M)$ ,  $E_0 A_p := A_0$ ,  $E_0 B_p := B_0$  である。変動パラメータ  $\delta_1 \sim \delta_8$  を取り出すため、(13)式を次の最大階数分解を用いて書き直す。

$$E_0^{-1} \begin{bmatrix} E_i & A_i & B_i \end{bmatrix} = L_i \begin{bmatrix} R_i & W_i & Z_i \end{bmatrix}, \quad i=1, \dots, 8 \quad (14)$$

行列  $L$ ,  $R$ ,  $W$ ,  $Z$  を次式とする。

$$L = [L_1, L_2, \dots, L_8] \quad (15)$$

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_8 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_8 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_8 \end{bmatrix} \quad (16)$$

このとき、システム (6),(7),(13)-(16) は、次式で表される。

$$\begin{bmatrix} y_\Delta \\ y_p \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u_\Delta \\ u_p \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$P := \begin{bmatrix} A_p & L & B_p \\ W - RA_p & -RL & Z - RB_p \\ C & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$u_\Delta = \Delta_\delta y_\Delta, \quad \Delta_\delta = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_8) \quad (19)$$

上式に基づき、Fig. 5 のシステムに基づいて  $\mu$ -解析を行う。Fig. 5 において、 $P(s)$ 、 $\Delta_\delta$  は (18)-(19) 式である。 $\Delta(s)$  は  $\mu$ -解析を実行するために導入したダミーの非構造的摂動である。ただし、Fig. 6 に示すように、重み  $W(s)$  のゲインは  $-400[\text{dB}]$  程度と非常に小さくし、ロバスト安定性評価に与える影響をごくわずかとなるように設定した。上記設定による  $\mu$ -解析の結果を Fig. 7 に示す。構造化特異値が  $\mu > 1$  となっており、ロバスト安定性は保証されていないことがわかる。方法 1 の解析方法によって許容されるパラメータ変動幅を求めたところ、 $\pm 17\%$  以下のパラメータ変動であればロバスト安定性を保証できることを確認した。

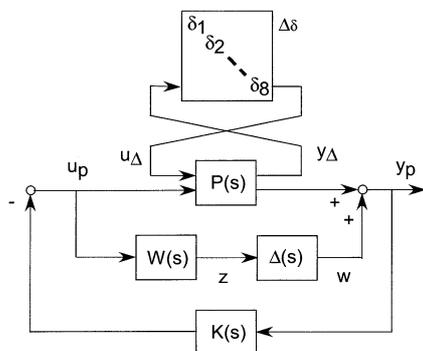


Fig. 5 Analysis system of Method 1

### 3.2 方法 2 によるロバスト安定性解析結果

Fig. 8 のシステムにたいして、 $H^\infty$  ノルム評価を行う。 $\Delta(s)$  は非構造的摂動であり、 $k_i$  と  $d_i$  についての、すべてのパラメータ変動を一括して表したものである。見積もった変動量と、すべての変動を包含する重み関数  $W(s)$  のゲイン線図を Fig. 9 の破線と実線で示す。1 次振動モードの固有振動数である  $23[\text{Hz}]$  周辺での  $\Delta(s)$  のゲインが大きくなっていることに注意する。 $w$  から  $z$  までの閉ループ系の  $H^\infty$  ノルムを求めた結果、 $\|G_{zw}(s)\|_\infty > 1$  となり、ロバスト安定性が保証されないことを確認した。

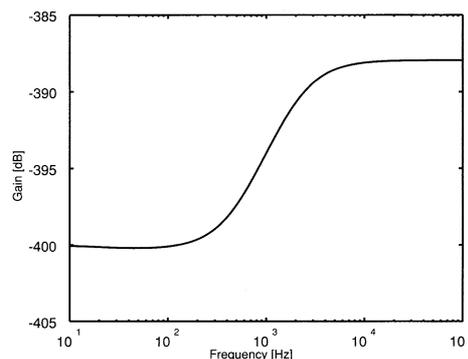


Fig. 6  $W(s)$

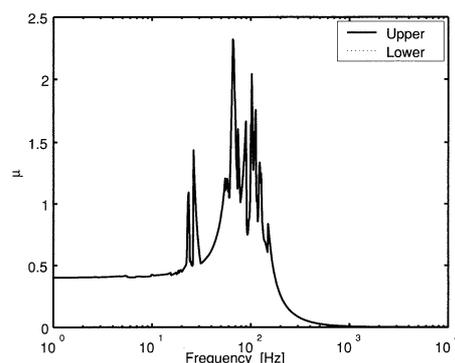


Fig. 7  $\mu$ -analysis result (Method 1)

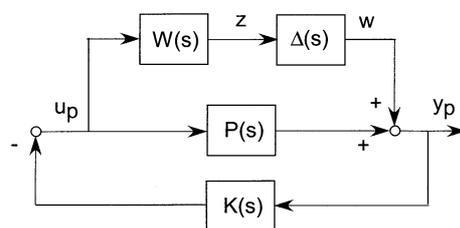


Fig. 8 Analysis system of Method 2

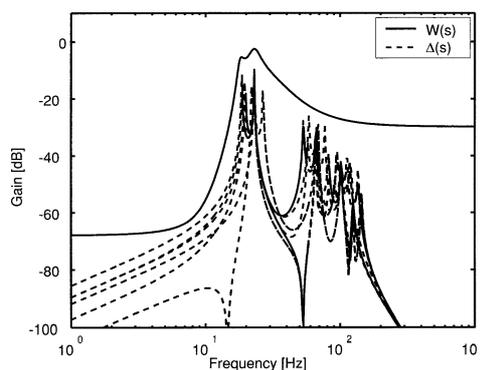
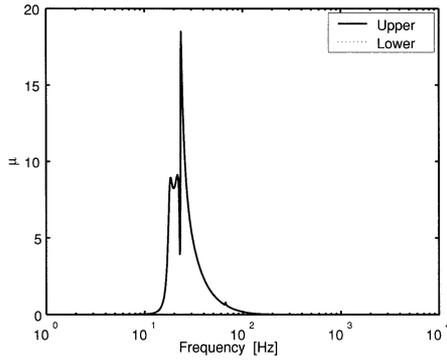


Fig. 9  $W(s)$  and  $\Delta(s)$

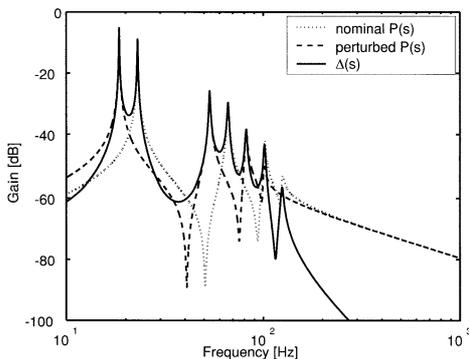
構造化特異値の計算結果を Fig. 10 に示す。方法 2 の解析方法によって許容されるパラメータ変動幅を求めたところ、 $\pm 0.001\%$  以下という非常に小さいパラメータ変動しか許容されなかった。

Fig. 10  $\mu$ -analysis result (Method 2)

## 4. 提案するロバスト安定性解析方法

### 4.1 提案方法の基本的考え方

方法2がうまく行かない原因は、位相安定化されている1次振動モードのロバスト安定性をスモールゲイン定理によって保証しようとしていることによる(たとえば、 $k_i$ と $d_i$ が $-35\%$ 変動した場合、変動のゲイン線図を描くとFig. 11となり、 $\Delta(s)$ のゲインは1次振動モードにおいて大きな値となる)。そこで、位相安定な周波数領域の変動はパラメトリック変動、ゲイン安定な周波数領域での変動は非構造的摂動で表すことを考える。これを実現するため、まず、システムをモード分解し、位相安定な制御モードとゲイン安定な非制御モードに分けて表す。さらに、位相安定化された振動モードを表す仮想的なパラメータ変動を導入し、制御対象のすべての変動を仮想的なパラメータ変動と、その残差である非構造的摂動の二つの変動によって再表現する。以下では、仮想的なパラメータ変動の導入方法と変動量の見積方法、およびそれを用いたロバスト安定解析方法を示す。さらに、提案方法を用いると、方法1,2では困難であったロバスト安定性保証が可能となることを示す。

Fig. 11  $P(s)$  and  $\Delta(s)$ 

### 4.2 仮想的変動の導入による変動の再表現

ノミナル制御対象はSISO系とし、 $m$ 個の振動モードを持つとする。はじめの $p$ 個は位相安定化されたモードであり、残りの $(m-p)$ 個のモードはゲイン安定化されたモードであるとする。このとき、制御対象のノミナル

モデル  $P_n(s)$  は次のように表せる。

$$P_n(s) = \sum_{i=1}^p \frac{\bar{g}_i s + \bar{h}_i}{s^2 + \bar{a}_i s + \bar{b}_i} + \sum_{i=p+1}^m \frac{\bar{g}_i s + \bar{h}_i}{s^2 + \bar{a}_i s + \bar{b}_i} \quad (20)$$

ここで、 $\bar{a}_i, \bar{b}_i, \bar{g}_i, \bar{h}_i$  はノミナルパラメータである。一方、変動モデルを次式で表す。

$$P_{per}(s) = \sum_{i=1}^m \frac{g_i s + h_i}{s^2 + a_i s + b_i} \quad (21)$$

1~ $p$ 次以下の振動モードの変動はパラメトリックな変動と考え、 $p+1$ 次以上の振動モードの変動は非構造的摂動によって取り扱うことにする。この方針に従い、 $P_{per}(s)$ を次のように表現し直す。

$$P_{per}(s) = P_{p1}(s, \delta_{abgh}) + \sum_{i=p+1}^m \frac{g_i s + h_i}{s^2 + a_i s + b_i} \quad (22)$$

$$= P_{p1}(s, \delta_{abgh}) + \sum_{i=p+1}^m \frac{\bar{g}_i s + \bar{h}_i}{s^2 + \bar{a}_i s + \bar{b}_i} + \Delta(s) \quad (23)$$

$$= P_{n1}(s, \delta_{abgh}) + \Delta(s) \quad (24)$$

$$P_{p1}(s, \delta_{abgh}) := \sum_{i=1}^p \frac{(\bar{g}_i + \delta_g^i) s + (\bar{h}_i + \delta_h^i)}{s^2 + (\bar{a}_i + \delta_a^i) s + (\bar{b}_i + \delta_b^i)} \quad (25)$$

$$P_{n1}(s, \delta_{abgh}) := P_{p1}(s, \delta_{abgh}) + \sum_{i=p+1}^m \frac{\bar{g}_i s + \bar{h}_i}{s^2 + \bar{a}_i s + \bar{b}_i} \quad (26)$$

$$\Delta(s) := \sum_{i=p+1}^m \frac{g_i s + h_i}{s^2 + a_i s + b_i} - \sum_{i=p+1}^m \frac{\bar{g}_i s + \bar{h}_i}{s^2 + \bar{a}_i s + \bar{b}_i} \quad (27)$$

ここで、 $\delta_a^i, \delta_b^i, \delta_g^i, \delta_h^i$  は位相安定化された振動モードのパラメータ変動を表し、次式で与えられる。

$$\delta_a^i = a_i - \bar{a}_i, \quad \delta_b^i = b_i - \bar{b}_i, \quad \delta_g^i = g_i - \bar{g}_i, \quad \delta_h^i = h_i - \bar{h}_i \quad (28)$$

(24)式は、 $k_i, d_i$ 等の物理パラメータの変動によって発生したすべての変動 $P_{per}(s)$ を、 $\delta_a^i, \delta_b^i, \delta_g^i, \delta_h^i$ と、高次振動モード周波数帯域での変動である非構造的摂動 $\Delta(s)$ に分けて表現し直したものである。これにより、位相安定な制御モードの周波数帯域における変動はパラメトリック変動、ゲイン安定な非制御モードの周波数帯域での変動は非構造的摂動として表現されている。一つの制御対象の変動 $P_{per}(s)$ に対して、 $\delta_a^i, \delta_b^i, \delta_g^i, \delta_h^i, \Delta(s)$ はそれぞれ唯一に求められる。ここで、 $\delta_a^i, \delta_b^i, \delta_g^i, \delta_h^i$ は制御対象の物理パラメータとは無関係のパラメータであることから、本論文では仮想的なパラメータ変動とよぶ。

### 4.3 仮想的パラメータの変動量の見積方法

位相安定化された振動モードを表す仮想的なパラメータの変動量を見積もる手順を示す。まず、(24)式を状態方程式表現する。まず、ノミナル制御対象の状態方程式

である(6),(7)式は正則な座標変換行列  $T$  を用いてモード座標系で表せる.  $\tilde{x}_p = T^{-1}x_p$  とすると, 次式を得る.

$$\dot{\tilde{x}}_p = \tilde{A}_p \tilde{x}_p + \tilde{B}_p u_p, \quad y_p = \tilde{C}_p \tilde{x}_p \quad (29)$$

$$\tilde{A}_p = \begin{bmatrix} A_1 & 0_{2 \times 2} & \cdots & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & A_2 & \cdots & 0_{2 \times 2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{2 \times 2} & \cdots & 0_{2 \times 2} & A_m \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_p = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\tilde{C}_p = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_m \end{bmatrix} \quad (31)$$

$A_i, B_i, C_i$  は  $i$  次振動モードに対応した行列である. 行列  $A_i, B_i, C_i$  は, 座標変換行列  $S_i$  を用いて, 次式の可観測正準形式に変換できる.

$$\tilde{A}_i = S_i A_i S_i^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{b}_i \\ 1 & -\bar{a}_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (32)$$

$$\tilde{B}_i = S_i B_i = \begin{bmatrix} \bar{h}_i \\ \bar{g}_i \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}_i = C_i S_i^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

同様の手続きで, (21)–(24) 式の変動系についても適当な正則行列  $R_i$  等を用いて可観測正準形式に変換する.

$$\tilde{A}_i^{per} = R_i A_i^{per} R_i^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -b_i \\ 1 & -a_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (34)$$

$$\tilde{B}_i^{per} = R_i B_i^{per} = \begin{bmatrix} h_i \\ g_i \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}_i^{per} = C_i^{per} R_i^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

このとき, (24) 式で与えられる  $P_{per}(s)$  は次式となる. ただし,  $\Delta(s)$  は (27) 式 of 非構造的摂動である<sup>1</sup>.

$$P_{per}(s) = \tilde{C}_p (sI - \tilde{A}_p - \Delta_A)^{-1} (\tilde{B}_p + \Delta_B) + \Delta(s) \quad (36)$$

$$\Delta_A := \begin{bmatrix} S_1^{-1} A_\delta^1 S_1 & \cdots & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & \cdots & 0_{2 \times 2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{2 \times 2} & \cdots & S_p^{-1} A_\delta^p S_p & 0_{2 \times 2} & \cdots & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \cdots & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & \cdots & 0_{2 \times 2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{2 \times 2} & \cdots & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & \cdots & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_B := \begin{bmatrix} S_1^{-1} B_\delta^1 \\ S_2^{-1} B_\delta^2 \\ \vdots \\ S_p^{-1} B_\delta^p \\ 0_{2 \times 1} \\ \vdots \\ 0_{2 \times 1} \end{bmatrix}$$

$$A_\delta^i := \begin{bmatrix} 0 & -\delta_b^i \\ 0 & -\delta_a^i \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 & -b_i \\ 1 & -a_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\bar{b}_i \\ 1 & -\bar{a}_i \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$B_\delta^i := \begin{bmatrix} \delta_h^i \\ \delta_g^i \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} h_i \\ g_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{h}_i \\ \bar{g}_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (38)$$

ここで, (37),(38) 式の変動量  $\delta_a^i, \delta_b^i, \delta_g^i, \delta_h^i$  の大きさは, それぞれの変動系  $P_{per}(s)$  について計算する必要がある. 想定したすべての変動について (37),(38) 式を計算し, その最大値が  $\hat{a}_i, \hat{b}_i, \hat{g}_i, \hat{h}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) と求められたとする. そのとき, 仮想パラメータの変動幅は, 次式のような  $A_\delta^i, B_\delta^i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) として求められる. ここで,  $\delta_i$  ( $i = 1 \sim 4$ ) は正規化された仮想変動であり,  $|\delta_i| < 1$  ( $\forall i$ ) とする.

$$A_\delta^i = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_{2i-1} \hat{b}_i \\ 0 & -\delta_{2i} \hat{a}_i \end{bmatrix}, \quad B_\delta^i = \begin{bmatrix} \delta_{2(p+i)-1} \hat{h}_i \\ \delta_{2(p+i)} \hat{g}_i \end{bmatrix} \quad (39)$$

#### 4.4 仮想パラメータ変動の抽出と $\mu$ 解析

つぎに, 仮想的なパラメータ変動を抽出する手順を示す. まず,  $\Delta_A, \Delta_B$  の  $A_\delta^i, B_\delta^i$  として (39) 式を用いるとする. このとき, (36) 式から  $\Delta(s)$  を除いた部分の状態方程式は次式となる.

$$\dot{x}_p = (A_p + T \Delta_A T^{-1}) x_p + (B_p + T \Delta_B) u_p \quad (40)$$

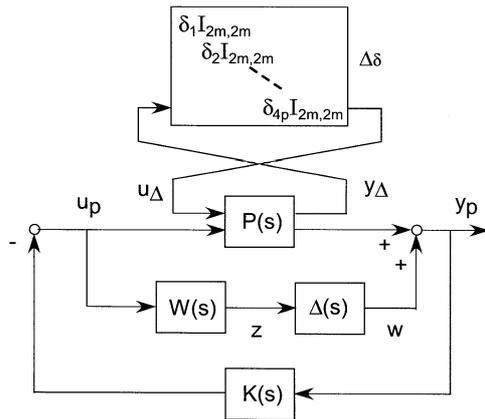
$$= (A_p + \sum_{i=1}^{2p} \delta_i A_{pi}) x_p + (B_p + \sum_{i=2p+1}^{4p} \delta_i B_{pi}) u_p \quad (41)$$

ここで,  $A_{pi}$  と  $B_{pi}$  は  $T \Delta_A T^{-1}, T \Delta_B$  から決まる適当な行列である. (41) 式は, 仮想変動パラメータについて線形な形式で表されているので,  $\mu$  解析によるロバスト安定解析手法が適用できる.  $\mu$  解析は Fig. 12 のシステムに基づいて行う. その際, 3.1 節で述べたディスクリプタ形式を用いた変動パラメータの抽出方法を利用することができる.

### 5. 提案方法による解析結果

Fig. 1 の系に対して, 提案したロバスト安定性解析手法を適用した. 制御対象は 4 個の振動モードを持ち ( $m = 4$ ), 1 次振動モードが位相安定化され ( $p = 1$ ), 2 次以上の振動モードがゲイン安定化されている. よって, 仮想変動として  $\delta_1 \sim \delta_4$  の四つのパラメータを用いる. 想定した変動量は  $k_i$  と  $d_i$  に関する  $\pm 35\%$  のパラメー

<sup>1</sup>当然のことではあるが,  $\Delta(s)$  としては, (27) 式による変動のほかに, 高周波数領域における不確かさに起因する変動を同時に考慮することも可能である.

Fig. 12  $\mu$ -Analysis system (Proposed method)

タ変動であるので、それぞれのパラメータ変動によって求まる仮想変動量と、残差として求まる(27)式の非構造的摂動の最大値を求める必要がある。 $k_1$ と $k_2$ を $\pm 35\%$ 変動させた場合の仮想変動の変動幅 $|\delta_a^1|$ ,  $|\delta_b^1|$ を求めると、それぞれFig. 13, Fig. 14となり、変動の端点において仮想変動量が最大となる。これは、他のパラメータを変化させた場合においても同様であるため、それぞれのパラメータの変動の端点で最大値を与えると期待される。そこで、各端点での値の組合せに基づく256個での変動によって変動の大きさを見積もることとし、仮想変動の大きさを(32)–(39)式に基づいて求めた。たとえば、すべてのパラメータが $-35\%$ 変動したとすると、仮想変動は次のように求められる。

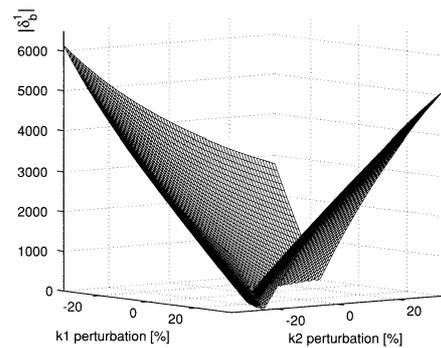
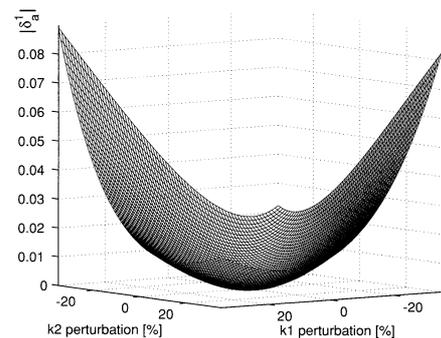
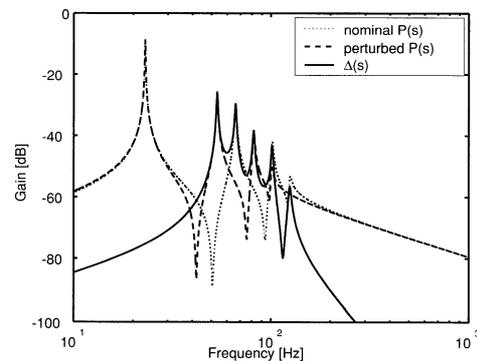
$$A_\delta^1 = \begin{bmatrix} 0 & 7.3173 \times 10^3 \\ 0 & 0.28143 \end{bmatrix}, B_\delta^1 = \begin{bmatrix} -9.3564 \times 10^{-14} \\ 4.9960 \times 10^{-16} \end{bmatrix}$$

このときの(27)式の非構造的摂動 $\Delta(s)$ のゲインはFig. 15の実線に示すように求められた。1次振動モード周波数における非構造的摂動のゲインが、Fig. 9に比較して小さくなっていることがわかる。これは、1次振動モード周波数での変動を仮想的なパラメータ変動によって表したことによる。同様の手続きで、256個すべての変動モデルについて仮想変動 $A_\delta^1$ および $B_\delta^1$ と非構造的摂動 $\Delta(s)$ を計算した。変動端点の256個から得られた仮想変動の最大値は以下となる。

$$\hat{b}_1 = 7.3174 \times 10^3, \hat{a}_1 = 0.45136 \quad (42)$$

$$\hat{h}_1 = 8.7046 \times 10^{-2}, \hat{g}_1 = 1.2437 \times 10^{-3} \quad (43)$$

また、各仮想変動に対応して得られる $\Delta(s)$ と指定した重み関数 $W(s)$ のゲイン線図をFig. 16に示す。 $W(s)$ の指定は、変動の各端点パラメータでの $\Delta(s)$ のほか、いくつかのパラメータをスイープさせて $\Delta(s)$ を求め、すべての $\Delta(s)$ を包絡するように設定している。以上の設定のもと、Fig. 12のシステムに対して $\mu$ 解析を行った。結果をFig. 17に示す。Fig. 17より、構造化特異値を $\mu < 1$ とすることができ、想定した変動に対するロバスト

Fig. 13 Virtual perturbation  $\delta_b^1$ Fig. 14 Virtual perturbation  $\delta_a^1$ Fig. 15 Re-allocated  $\Delta(s)$  ( $-35\%$  perturbed case)

ト安定性が保証できた。

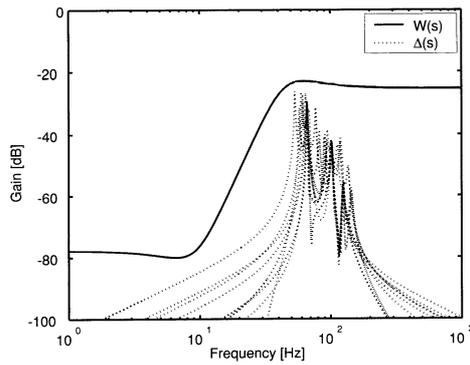
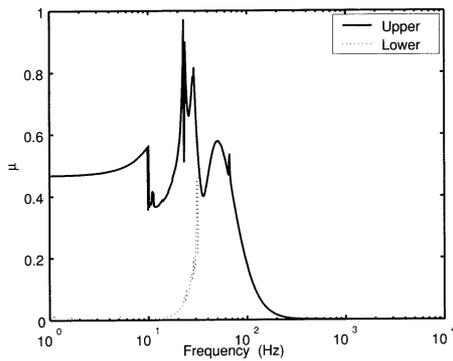
参考のため、ノミナル制御対象における1次振動モードの可観測正準形式表現を求めると

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2.0907 \times 10^4 \\ 1 & -0.80410 \end{bmatrix}, \tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 8.8263 \times 10^{-14} \\ 0.28736 \end{bmatrix}$$

となり、(42)式の変動量 $\hat{a}_1, \hat{b}_1$ は、ノミナルパラメータの約35%変動量に相当していることがわかる。

## 6. おわりに

本論文では、機械振動系に対して、制御対象のパラメータ変動を制御モードのパラメータ変動と非制御モード周波数帯域での非構造的摂動に分けて表し、ロバスト安定解析する方法を提案した。その結果、従来の方法と

Fig. 16  $\Delta(s)$  and  $W(s)$ (Re-allocated)Fig. 17  $\mu$ -Analysis Result (Proposed Method)

比較してより広い変動にたいするロバスト安定性保証が可能となった。よって、従来方法より保守性を低減化させることができたといえる。本方法は、振動系を念頭に考えているが、一般の制御対象でも応用可能である。

## 謝 辞

宇都宮大学 平田光男先生には有益なコメントを頂きました。記して感謝の意を表します。

## 参 考 文 献

- [1] 木村, 千田: 振動系に対するロバスト安定性解析と保守性の低減; 第5回計測自動制御学会制御部門大会, pp. 829-832 (2005)
- [2] 劉: 線形ロバスト制御, コロナ社 (2002)
- [3] 平田, 劉, 美多: 2慣性系に対する  $\mu$ -Synthesis を用いた制振制御; 電気学会論文誌 D 部門, Vol. 114-D, No. 5, pp. 512-519 (1994)
- [4] 浅井, 原: パラメータ変動のモデリングと設計を同時に行うロバスト制御系設計法; 計測自動制御学会論文集, Vol. 32, No. 1, pp. 35-44 (1996)
- [5] 渡辺, 吉田: パラメータ変動と非制御モードのモデル誤

- 差を考慮する柔軟構造物のロバスト振動制御; 計測自動制御学会論文集, Vol. 32, No. 7, pp. 1001-1010 (1996)
- [6] 野波, 西村, 平田: *MATLAB*による制御系設計, 東京電機大学出版局 (1998)
  - [7] F. Otsuki, H. Uematsu, Y. Nakamura, Y. Chida, O. Nishimura, K. Ohtomi and M. Tanaka: Vibration isolation control of centrifuge rotor; *Proc. of the 5th International Conference on Motion and Vibration Control*, pp. 415-420 (2000)
  - [8] 木田: スペースクラフトの制御, コロナ社 (1999)
  - [9] G. F. Franklin, J. D. Powell and A. Emami-Naeini: *Feedback Control of Dynamic Systems (4th ed.)*, Prentice Hall (2002)