

平成 28 年 6 月 2 日現在

機関番号：13601

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2011 ~ 2015

課題番号：23330255

研究課題名 (和文) 中学校数学科における「課題探究型の証明」カリキュラムの構築と活用

研究課題名 (英文) Development and Realization of Curriculum for Explorative Proving in Secondary School Mathematics

研究代表者

宮崎 樹夫 (MIYAZAKI, Mikio)

信州大学・学術研究院教育学系・教授

研究者番号：10261760

交付決定額 (研究期間全体) : (直接経費) 13,700,000 円

研究成果の概要 (和文) : 本研究では、「課題探究として証明する」ことを、事柄の生成、証明の生成 (構想 / 構成)、評価・改善・発展及び三側面の相互作用による営みとして捉え、この捉えに基づいて現行のカリキュラムの問題点を特定し、その問題点を解決するために、「証明の構想」と「証明の構成」、「評価・改善・発展」に着目し、課題探究として証明することのカリキュラム開発枠組みを設定した。

この枠組みに基づき、中学校数学科における証明の学習に関する各内容で実現されるべき活動を「内容 活動対応表」として整理し、授業者と研究者が理論知と実践知の相互作用に基づいてカリキュラムを授業として形づくることを通じてカリキュラムの実行可能性を確認した。

研究成果の概要 (英文) : Key word “Explorative proving” is defined as the interactions among the following aspects: producing propositions, producing proofs (planning/ constructing), evaluating| improving| advancing. Based on this definition the problematics of current curriculum are specified. In order to resolve the specified, the framework to develop the curriculum of explorative proving is concluded with especially focusing on the followings: planning proofs, constructing proofs, and evaluating| improving| advancing.

By applying the framework to the current curriculum, corresponding tables between contents and activity are formulated. These tables show the relations of the intended contents and the essential activities. Sharing these tables between practitioners and researchers makes it possible to collaborate in realizing lessons in accordance with the frameworks and the tables. Finally, by the collaboration the feasibility of the developed curriculum is verified.

研究分野：科学教育学 (数学教育学)

キーワード：課題探究 証明 カリキュラム 中学校 数学

1. 研究開始当初の背景

(1) 証明の学習状況の改善は国際的な課題

全国学力・学習状況調査によると、我が国の証明の学習状況が望ましくないままになっており、その改善が急務とされ続けている

（国立教育政策研究所，2009）。こうした学習状況は国際的に同様であり，証明の学習状況の改善は国際的に主要な課題として認知されている。このことから，証明の学習状況の改善は国内外で重要な課題である(ICMI, 2009)といえる。

(2) 次期学習指導要領改訂に対し「課題探究型の証明」カリキュラム開発を提案

数学教育研究では課題探究型として証明を学習する必要があることが指摘され，試験的な授業が単発的に実践されてきたが，カリキュラム開発には至っていない。本研究によってカリキュラム開発を実現できれば，本研究は国際的にオリジナリティの高いものとなるとともに，我が国における次期学習指導要領作成に対し，実証に基づく提案をすることができる。

(3) 「課題探究型の証明」の学習状況を改善する可能性

先行する科研費（基盤研究(B)課題番号：18330187)により，構成的な論証学習カリキュラムを開発済みであった。この成果をもとに証明の学習状況を真に改善するためには，中学校数学科における「課題探究型の証明」のカリキュラムを構築することが可能であり，カリキュラムの実施により，証明の学習状況に関する国内外の課題が解消される可能性がある。

2. 研究の目的

本研究の目的は次の通りである：『中学校数学科において，“課題解決のために証明を構想し実践し評価・改善する”という「課題探究として証明すること」（課題探究型の証明）のカリキュラムを構築すること』。

3. 研究の方法

(1) 「課題探究として証明する」の概念規定

清水(1994), Miyazaki & Fujita (2010)等の先行研究に基づいて「課題探究として証明すること」の概念を規定する。

(2) 現行カリキュラムの問題点の特定

規定された概念に基づいて現行のカリキュラムについて分析し，「課題探究として証明すること」に関する問題点を特定する。

(3) カリキュラム開発枠組みの設定

特定された問題点を解消するために，カリキュラム開発枠組みを定める。

(4) 内容・活動対応表の作成

カリキュラム開発枠組みに基づいて，内容，活動及びそれらの配列を定める。

(5) 授業化による実行可能性と限界の確認

研究代表者・分担者と中学校教員（研究協力者）の協働により内容・活動対応表に基づく授業を開発・実践・評価し，カリキュラムの実行可能性と課題を確認する。

4. 研究成果

(1) 「課題探究として証明する」こと概念規定

① 数学教育における課題探究力の位置

資質・能力のうち，我が国では「様々な課題解決のために，構想を立て実践し評価・改善する力」（中央教育審議会 初等中等教育分科会 教育課程部会審議経過報告：平成18年2月13日），「活用する力」（全国的な学力調査の実施方法等に関する専門家検討会議 H18/4），「課題解決力」（育成すべき資質・能力を踏まえた教育目標・内容と評価の在り方に関する検討会：論点整理：平成26年3月31日）等の言葉で，課題探究力の育成が重視されている。

科学での生産的な営みに目を向けると，探究は，疑い(doubt)を信念(belief)に置き換える奮闘(struggle)であり(Peirce, 1877/1982)，この奮闘は，携わる者の共同体で三種類の推論（アブダクション，演繹，帰納）が相互に機能することにより遂行される。その際，知識の真偽は共同体による長期的な議論の収束に依存するため，知識の可謬性と探究の方向の開放性が重視されることになる(Siegel & Borasi, 1994)。科学としての探究を教育に“投影”すると，知識は協働的な集団での探究を通じて反省的に生成され，学習は目的が明確な場面での個人及び社会的な相互作用による意味形成という生産的な過程であり，指導は探究の豊かな環境と学習者の共同体を支援する営みとなる(Siegel, Borasi & Fonzi, 1998)。

数学教育では，問題解決(Polya, 1957)が学校段階や内容領域を横断して研究と実践において長きに渡り重視されている。資質・能力として課題探究力が数学教育で“紐解かれる”ことによって，問題解決の“姿”が先鋭化され得る。実際，探究における疑いの発生に着目すると，子ども自らが解決の必要を感じる問題を「課題」として捉える価値が再確認される。他方，疑いの解消による信念の獲得に着目すると，解決の計画における見通し・構想の充実と精緻化が一層重要視されることが期待できる。

また，知識の可謬性と探究の方向の開放性に着目すると，数学教育研究では科学哲学における可謬主義(Lakatos, 1978)が研究や実践の基盤とされており，この学問的意義と教育的価値が議論の余地を残しながらも広く認められている(Hanna, 2007)。こうした“土壌”において問題解決の振り返りを，信念獲得のために解決の過程や結果を評価・改善等することとして詳らかにすることにより，解決での間違いや誤りを更なる課題探究の原動力とするダイナミックな過程が一層顕在化されるようになる。その上で，共同体による長期的な議論の収束に着目すると，研究や実践が形だけの「学び合い」に陥ることなく，漸進的な真理観のもと探究が実現され得るよう，即ち，疑いが一定の信念に確実に置き換

えられるよう、個人追究や他者との共同追究の在り方が見直され、必要に応じ再生・更新されることが期待できる。

②「課題探究として証明する」ことの捉え

数学において証明することは、相対的な真理観(Fawcett, 1938), 発見学(Polya, 1962), 可謬主義(Lakatos, 1976)に支えられ, ダイナミックで生産的な諸側面を有し, それらが互いに共鳴し合い, 知的な“息吹”を形づくっている。即ち, 証明する活動には, その側面として, 日常的／数学的事象に関する事柄を帰納的／演繹的／類比的に生成すること, そして, 生成された事柄の証明を生成することがある。また, 事柄と証明の生成で立ち止まることなく, 現実世界や数学世界における事柄や証明の不確かさを契機に, 事柄や証明のみならず知識や概念までも精選する, さらに, 事柄(命題)について組織化・公理化・体系化(Freudenthal, 1971; 杉山吉茂, 1985; Devilliers, 1990 他)という現実や数学の数学化の諸側面が展開されていく。言うまでもなく, これらの諸側面が相互に作用し合うことで「数学的活動」(島田茂, 1995)が進展していく。

このように, 数学における証明することを見つめ直すと, そこに課題探究としての本性が内在しているといえる。実際, 知識の可謬性のもと, 事柄や証明の正誤は疑いを発生させ, 事柄及び証明の生成は共同体による長期的な議論の収束を通じて疑いの解消による信念を獲得させる。そこで, 本研究では, 「課題探究として証明する」ことを, 事柄の生成, 証明の生成(構想／構成), 評価・改善・発展及び三側面の相互作用による営みとして捉える(宮崎・藤田, 2013)。(図1参照)

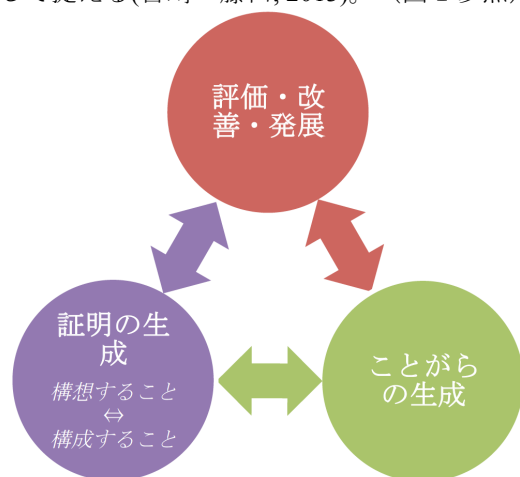


図1 課題探究として証明すること

このように「課題探究として証明する」を捉えることによって, 学校数学における証明の学習は, 数学における証明することの本性に基づく真正さを有し得るとともに, 「構想を立て, 実践し, 評価・改善する」という課題探究力を, 数学という形而上学的内容領域を通して育む学習として, 学校数学のみならず, 学校教育さらには教育全体の“支柱”として価値を有するようになり得る。

(2) 現行カリキュラムの問題点の特定

「課題探究として証明する」ことを前記のように捉え, 中学校数学科において課題探究として証明することの学習を実現するために, カリキュラムとしての問題点を次のように整理した。

① 中学校第1学年のカリキュラムの問題点

■ 領域「数と式」の問題点

- ・ 根拠に基づいて, 数量の関係や法則などを, 文字を用いた式に表したり, 文字を用いた式の意味を読みとったりすることの充実
- ・ 第2学年の準備として, 第1学年における証明の構想や構成の導入

■ 領域「図形」の問題点

- ・ 第1学年で意図される, 証明することの意味の明確化
- ・ 小学校算数科と中学校第1学年における, 証明することに関する接続の確立
- ・ 第1学年と第2学年における, 課題探究として証明することに関する接続の確立

② 中学校第2学年のカリキュラムの問題点

■ 領域「数と式」の問題点

- ・ 第2学年の準備として, 第1学年における, 根拠に基づいて式をよむことの充実
- ・ 第2学年と第3学年の教科書における, 証明することの学習に関する差異の明確化
- ・ 課題探究として証明することの充実, 特に証明を構想すること/評価・改善・発展することの充実

■ 領域「図形」の問題点

- ・ 第2学年との接続のための, 第1学年で意図される証明の明確化
- ・ 第2学年における学習の漸進性の設定, 特に, 証明することについて学習するまでの説明の質に関する段階的な向上。
- ・ 課題探究として証明することの充実, 特に証明を構想し構成すること, ことがら及び証明の生成について評価・改善・発展することの充実

③ 中学校第3学年のカリキュラムの問題点

■ 領域「数と式」の問題点

- ・ 第2学年と第3学年の教科書における, 証明することの学習に関する差異の明確化
- ・ 課題探究として証明することの充実, 特に証明を構想することの充実

■ 領域「図形」の問題点

- ・ 第3学年における学習の接続性, 特に第2学年における証明することの学習を第3学年の学習の初期段階で振り返ることの重要性
- ・ 課題探究として証明することの充実, 特に, 義務教育最終段階として, 子どもの主体的な学習場面としての位置づけの明確化
- ・ 図形の性質や関係を基に, 具体的な長さや角の大きさなどを求める過程を説明する学習の補充

(3)カリキュラム開発枠組みの設定

①証明を構想することの学習に関するレベル
証明を構想するとは、ことがらの前提と結論を演繹的な推論によってどのように結びつけるかについて探る営み(辻山, 2012)である。この営みでは、前提と結論を結びつけるために、どのような着想に基づいて、何を(対象)、どのように用いればよいのか(方法)を捉えることが必要である。これが証明を構想することの学習に関する第一レベル(P1)である。

一方、証明を構想する営みでは、前提と結論を結びつけるために、前提からの中間命題の関係網と結論からの関係網が拡充され両者に共通な中間命題の有無が検討される

(Heinze, et al, 2008)。これが証明を構想することの学習に関する第二レベル(P2)である。

以上のことから、証明を構想することの学習に関するレベルとして次の二つを設定する。

P1: 前提と結論を結びつけるための着想、必要となる対象と方法を捉える。

P2: 前提と結論を結びつけるために双方から中間命題の関係網を拡充する。

②証明を構成することの学習に関するレベル
証明を構成するには、前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形づくり表現することが必要である。この連鎖を形づくり表現する主な推論は仮言三段論法であるので、前提と結論の間における命題の演繹的な連鎖のうち、この演繹的な推論を実行することによって仮言三段論法に基づく部分を形づくり表現できるようになることが、証明を構成することの学習として求められる。これが第一レベル(C1)である。

一方、前提と結論の間における命題の演繹的な連鎖には、仮言三段論法に加え、定理等の全称命題に基づく普遍例化が用いられている。そのため、前提と結論の間における命題の演繹的な連鎖を厳密に形づくり表現するために、演繹的な推論を仮言三段論法と普遍例化に分化し(Miyazaki & Fujita, 2010)、特に、普遍例化について根拠となる全称命題と、この命題から導かれる単称命題を明確に区別して表現できるようになることが求められる。これが第二レベル(C2)である。

以上のことから、証明を構成することの学習に関するレベルとして次の二つを設定する。

C1: 前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形づくり表現する。

C2: 演繹的な推論を普遍例化と仮言三段論法に分化して前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形づくり表現する。

さらに、証明を構想すること／構成することの両者が未分化である学習レベルが設定され得る。このレベルを「O」と表す。なお、本研究では中学校数学科のカリキュラム開発を目的とするため、このレベルにおいて、証

明することの対象となる命題の生成という側面は既に分化されているとする。

③ 学習レベルの移行とその過程の設定

整理された問題点を解消するために、証明を生成することに焦点化し、証明を構想すること(横軸)と、証明を構成すること(縦軸)に基づいて、学習レベルの移行過程に関する枠組みを図2のように設定した(宮崎・永田・茅野, 2012)。

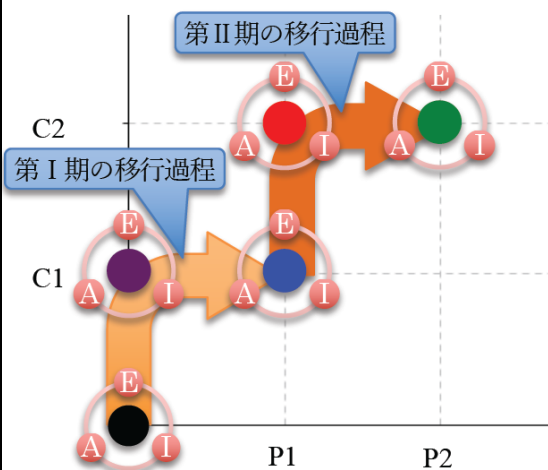


図2 カリキュラム開発枠組み

それぞれのレベルの組み合わせと学習レベルの移行可能性により、第I期の移行(学習レベル $O \Rightarrow (P1, C1)$)と、第II期の移行(学習レベル $(P1, C1) \Rightarrow (P2, C2)$)が定まり、いずれの学習レベルでも、ことがら及び証明の生成について評価・改善・発展(EIA)が意図される。学年との対応については、第I期の移行が第1学年で、第II期の移行が第2学年及び第3学年で達成されることにした。これらの移行過程をカリキュラム開発枠組みとして設定した。

一方、評価・改善・発展という側面について、これら9つの各レベルにおける証明の生成について評価・改善・発展することが学習として意図され得る。(評価・改善・発展することをC,I,Aと表す。)なお、証明の生成に連動する命題の生成という側面についても評価・改善・発展することが学習として意図され得る。

なお、領域「数と式」では、我が国の中学校数学科で意図されている証明に即し、第II期の移行過程を(P1, C1)から(P2, C1)として、学習レベルの移行過程をカリキュラム開発枠組みとして準用する。

(4) 内容・活動対応表の作成

開発されたカリキュラムが授業として実現され実効力を発揮するために、本研究では内容の系統や配列を現行のものに暫定的に固定して課題探究として証明することの実現を探ることにした。

内容の系統や配列を現行のものに暫定的に固定する方法として、中学校学習指導要領解説数学編の「第2章目標及び内容 第3節 各学年の内容」に示された各学年の領域の項目とその順

序を基本的に採用する。特に、中学校数学において証明することが主に扱われている領域「数と式」及び「図形」に注目し、当該の学年で意図される学習レベルの移行が、その学年の領域における項目とその系列に応じて達成されるようにする。また、評価・改善・発展することについては、学習レベルの移行が意図されている項目には対応させず、それに続く項目に示された内容や場面の特徴に応じて評価・改善・発展の一部、あるいは全体をサイクリックに実現していく。その上で、各項目で扱われる場面の特徴に応じ、可能となる活動を一般的に記述し、「内容－活動対応表」として整理する。（各学年の詳細については、別項「中学校数学科第○学年の領域「数と式」及び「図形」における学習の構想」を参照）。

表1 第1学年の内容－活動対応表

領域	項目	学習レベル・移行
数と式	式を用いて表したり読み取ったりすること	$O \rightarrow C1$
		$C1 + EIA$
		$C1 \rightarrow (P1, C1)$
図形	平行移動、対称移動及び回転移動	$O \rightarrow C1$
	基本的な作図とその活用	
	平面図形の運動による空間図形の構成	$C1 + EIA$
	空間図形の平面上への表現と読み取り	$C1 \rightarrow (P1, C1)$

表2 第2学年の内容－活動対応表

領域	項目	学習レベル・移行
数と式	文字を用いた式でとらえ説明できること	$(P1, C1) \rightarrow (P2, C1)$
	目的に応じた式の変形	$(P2, C1) + EIA$
図形	平行線と角の性質	$(P1, C1) \rightarrow (P1, C2)$
	多角形の角についての性質	$(P1, C2) + EIA$
	合同の意味と三角形の合同条件	
	証明の必要性和意味及び方法	$(P1, C2) \rightarrow (P2, C2)$
	三角形や平行四辺形の性質	$(P2, C2) + EIA$

表3 第3学年の内容－活動対応表

領域	項目	学習レベル・移行
数と式	文字を用いた式でとらえ説明すること	$(P1, C1) \rightarrow (P2, C1) + EIA$
図形	三角形の相似条件	$(P1, C2) \rightarrow (P2, C2)$
	平行線と線分の比についての性質	$(P2, C2) + EIA$
	相似な図形の性質の活用	
	円周角と中心角の関係が証明できることを知ること	$(P2, C2) + EIA$
	円周角と中心角の関係の活用	
	三平方の定理が証明できることを知ること	$(P2, C2) + EIA$
	三平方の定理の活用	

(5) 授業化によるカリキュラムの実行可能性の確認

①本研究における「授業化」の意味・意義

カリキュラムは意図される教育の“魂”であり、学校教育で授業としてその“肉体”を得る。カリキュラムが授業として形づくられるまでには、「企画・立案→実践→評価・改善」という循環・発展的なプロセスがある。

意図されたカリキュラムは、ややもすると実行し難く夢物語に終わってしまう。こうした事態を避けるため、カリキュラムの開発途上では、理論知と実践知の相互作用が重要であり、そのためにカリキュラム開発に携わる研究者と実践者の真摯な連携・協働が不可欠である。実際には、研究者と実践者が子ども達のために価値あることをしたいと願い合い、互いの専門性を尊重し合い、授業実践の喜びと責任を共有することが求められる。

本研究では、理論知と実践知の相互作用に基づいてカリキュラムを授業として形づくるプロセスを「授業化」と呼ぶ。

授業化によって、カリキュラムのうち授業として実現可能な部分と更に工夫を要する部分が明らかとなる。前者は学習指導案等を通じ現場での普及が期待できる。後者については研究者と実践者がより固い絆で協働し合う契機となる。

②授業化の成果:実行可能性の確認

課題探究として証明することの授業化として、次の取組がなされた。（学会で報告済み）

- 領域「数と式」中2:1件、中3:1件
 - 領域「図形」中1:3件、中2:4件、中3:4件
- これらの授業化を通じて、内容－活動対応表の学習レベル・移行が授業として実行可能であることが確認されたとともに、授業化に必要とされる改善点が今後の課題として特定された。

(6) 今後の課題

- 授業化に基づくカリキュラム及び内容－活動対応表の改善
- 課題探究として証明することに関する学習指導法と評価法の開発

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕 (計 41件)

- ① Miyazaki, M., Fujita, T. and Jones, K. (2015). Flow-chart proofs with open problems as scaffolds for learning about geometrical proofs, *ZDM*, 47(7), 1211-1224. DOI: 10.1007/s11858-015-0712-5 (査読有)
- ② Komatsu, K., Tsujiyama, Y., Sakamaki, A., & Koike, N. (2014). Proof problems with diagrams: An opportunity for experiencing proofs and refutations. *For the Learning of Mathematics*, 34(1), 36-42. (査読有)
- ③ 宮崎樹夫, 永田潤一郎, 茅野公穂 (2014). 中学校数学における課題探究として証明することのカリキュラム開発: 進行状況と授業化の意味・役割, *日本数学教育学会誌「数学教育」*, 96(9), 2-5. (査読有)
- ④ 茅野公穂, 嶋田和美, 荻原啓一 (2014). 「基本的な作図」において課題探究として証明することの授業化, *日本数学教育学会誌「数学教育」*, 96(9), 10-13. (査読有)
- ⑤ 岩田耕司 (2014). 「空間図形の平面上への表現と読み取り」において課題探究として証明することの授業化, *日本数学教育学会誌「数学教育」*, 96(9), 14-17. (査読有)
- ⑥ 佐々祐之, 大塚武秀 (2014). 「連続する自然数の和」において課題探究として証明することの授業化, *日本数学教育学会誌「数学教育」*, 96(9), 18-21. (査読有)
- ⑦ 辻山洋介, 油井幸樹 (2014). 『平行四辺形の性質』において課題探究として証明することの授業化. *日本数学教育学会誌「数学教育」*, 96(9), 22-25. (査読有)
- ⑧ 小松孝太郎・牧野圭介 (2014). 「円周角と中心角の関係の活用」において課題探究として証明することの授業化. *日本数学教育学会誌「数学教育」*, 96(9), 26-29. (査読有)

〔学会発表〕 (計 23件)

- ① 茅野公穂, 清水あかね (2015). 中学校数学における課題探究として証明することの授業化: 第1学年の小単元「基本的な作図」. *日本科学教育学会第39回年会*. 山形大学. 2015/8/23.
- ② Keith Jones, Mikio Miyazaki and Taro Fujita (2015). Aspects of scaffolding in a web-based learning system for congruency-based proofs in geometry, 12th International Conference on Technology in Mathematics Teaching, University of Algarve, Faculty of Sciences and Technology, 2015/6/24-27
- ③ Mikio Miyazaki, Keith Jones, and Taro Fujita (2013). A WEB-BASED

LEARNING SYSTEM FOR CONGRUENCY-BASED PROOFS IN GEOMETRY IN LOWER SECONDARY SCHOOL, ICTMT11, University of Bari, 2013/7/9-12.

- ④ Miyazaki, M., Fujita, T., & Jones, D. K. (2012). Introducing the structure of proof in lower secondary school geometry: a learning progression based on flow-chart proving. *ICME2012*. Seoul, South Korea. 2012/7/8-15

〔図書〕 (計 6件)

1. Miyazaki, M. and Fujita, T. (2015). Proving as an explorative activity in mathematics education: new trends in Japanese research into proof. In Sriraman, B. (Eds.), *First Sourcebook on Asian Research in Mathematics Education: China, Korea, Singapore, Japan, Malaysia and India (International Sourcebooks in Mathematics and Science Education)* (pp. 1375-1407), Charlotte, NC: Information Age Publishing. (ISBN: 1623960290). 総ページ数: 1767.

〔その他〕

研究情報公開用サイト

- 課題探究型証明・説明カリキュラムに基づく学習指導: 中学校数学
<http://mathematics-edu.net/cms/htdocs/>

6. 研究組織

(1)研究代表者

宮崎 樹夫 (MIYAZAKI, Mikio)
信州大学・学術研究院教育学系・教授
研究者番号: 10261760

(2)研究分担者

茅野 公穂 (CHINO, Kimiho)
信州大学・学術研究院教育学系・准教授
研究者番号: 20400658

小松 孝太郎 (KOMATSU, Kotaro)
信州大学・学術研究院教育学系・准教授
研究者番号: 40578267

岩田 耕司 (IWATA, Koji)
福岡教育大学・教育学部・准教授
研究者番号: 90437542

永田 潤一郎 (NAGATA, Junichiro)
文教大学・教育学部・准教授
研究者番号: 30413909

佐々 祐之 (SASA, Hiroyuki)
北海道教育大学・教育学部・教授
研究者番号: 30315387

辻山 洋介 (TSUJIYAMA, Yosuke)
千葉大学・教育学部・准教授
研究者番号: 10637440