

差動不思議歯車機構の効率計算式

(第1報 2K-H型差動歯車機構)

両角宗晴*

(昭和56年5月30日受理)

Efficiency Formulas for Differential Gears Employing the Mechanical Paradox Internal Gear

(1st Report. The 2K-H Type Differential Gears)

Muneharu MOROZUMI

A theoretical derivation was developed to obtain formulas for evaluating the efficiency of the 2K-H type differential gears with the mechanical paradox internal gear applied; the differential is a simple planetary train in which all its three principal members rotate, one serving as the driver and the other two as followers, or vice versa, and theoretical formulation of the efficiency of differential gears is of value since it allows characterization of different kinds of differential gears. The formulas derived are so handy as to contain only two variables, the number of teeth and efficiency of stationary gear trains.

1 緒 言

歯数の異なる2ケの太陽内歯車に1ケの遊星ピニオンをかみ合わせた2K-H型遊星歯車機構では、これに用いる2ケの太陽内歯車と遊星ピニオンにそれぞれ適当な転位を与えなければかみ合いが成立せず、このような遊星歯車機構はFerguson歯車機構又は不思議歯車機構と呼ばれており、筆者はこのような2K-H型不思議歯車機構の効率計算式を誘導し、さらに実際にその設計と試作を行ない、効率測定を行なって、理論効率値が実験効率値によく一致することを示した²⁾。この2K-H型遊星歯車機構は、入力軸、出力軸および補助軸の三本の基本軸からなっており、2ケの太陽内歯車と、遊星ピニオンを支持する1ケのキャリアがそれぞれ基本軸となり、2ケの基本軸の駆動により、残りの第3の軸がそれらの作用を同時に受けて回転したり、または1つの軸を駆動して他の2本の基本軸が被動されるような、いわゆる差動歯車機構が考えられるが、本論文においては、これら2K-H型差動不思議歯車機構の効率計算式を求めた。

* 精密工学教室 教授

2 2K-H 型差動不思議歯車機構の 効率計算式の誘導

図1に太陽内歯車C, D, 遊星ピニオンPおよびキャリアAからなる2K-H型差動不思議歯車を示す。いま太陽内歯車CとDの歯数をそれぞれ Z_C, Z_D とし、基本軸A, C, Dの回転角速度をそれぞれ w_A, w_C, w_D とすると次式が容易に得られる。

$$w_A = \frac{w_C - i_o w_D}{1 - i_o}, \quad (1)$$

$$w_C = (1 - i_o)w_A + i_o w_D, \quad (2)$$

$$w_D = \frac{1}{i_o}w_C + \left(1 - \frac{1}{i_o}\right)w_A. \quad (3)$$

ただし

$$i_o = Z_D/Z_C.$$

いま $Z_C > Z_D$. すなわち $0 < i_o (= Z_D/Z_C) < 1$ として論を進める。

2.1 軸Cと軸Dが入力軸で軸Aが出力軸の差動歯車機構

この差動歯車機構はつぎのごとき2つの成分の遊星歯車装置からなるものとする。すなわち、内歯車Dを固定し、内歯車Cを駆動してキャリアAに角速度 w_{A1} 、出力 N_{o1} を生ずる遊星歯車装置と、内歯車Cを固定し、内歯車Dの回転によってキャリアAに角速度 w_{A2} と出力 N_{o2} を生ずる遊星歯車装置からなるものとする。

第1成分遊星歯車装置(D固定, C駆動, A従動)

式(1)において $w_D = 0$ として次式を得る。

$$w_{A1} = \frac{1}{1 - i_o}w_C. \quad (4)$$

この遊星歯車装置の効率 η_1 は

$$\eta_1 = \frac{\eta_o - i_o}{\eta_o(1 - i_o)}. \quad (5)$$

ただし η_o はキャリアAを固定したときの基準効率であり、内歯車Cと遊星ピニオンPとの噛み合い効率を η_1' 、内歯車Dと遊星ピニオンPとの噛み合い効率を η_2' とすれば

$$\eta_o = \eta_1' \cdot \eta_2'. \quad (6)$$

このときの軸Cからの入力 N_{i1} は

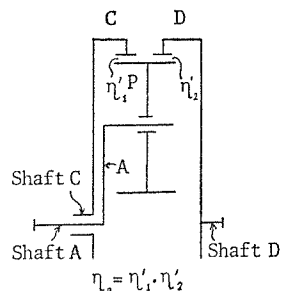


Fig. 1 2K-H Type Differential Gear Applying the Mechanical Paradox Internal Gear

$$N_{i1} = N_{o1}/\eta_1. \quad (7)$$

第2成分遊星歯車装置 (C固定, D駆動, A従動)

式(1)において $w_C = 0$ として次式を得る.

$$w_{A2} = \frac{i_o}{i_o - 1} w_D. \quad (8)$$

この遊星歯車の効率 η_2 は

$$\eta_2 = \frac{\eta_o - i_o}{1 - i_o}. \quad (9)$$

このときの軸Dからの入力 N_{i2} は

$$N_{i2} = N_{o2}/\eta_2. \quad (10)$$

したがって軸Aからの総出力を N_o とすると, 全体の効率 η は

$$\eta = \frac{N_o}{N_{i1} + N_{i2}} = \frac{N_o}{\frac{N_{o1}}{\eta_1} + \frac{N_{o2}}{\eta_2}}. \quad (11)$$

しかるに軸Aの出力トルクを T_o とすれば $N_o = T_o w_A = T_o (w_{A1} + w_{A2}) = N_{o1} + N_{o2}$.

したがって

$$T_o = N_o/w_A = N_{o1}/w_{A1} = N_{o2}/w_{A2}.$$

これより

$$N_{o1} = \frac{w_{A1}}{w_A} N_o = \frac{w_C}{w_C - i_o w_D} N_o. \quad (12)$$

また

$$N_{o2} = \frac{w_{A2}}{w_A} N_o = \frac{-i_o w_D}{w_C - i_o w_D} N_o. \quad (13)$$

式(11)に式(12)と(13)を代入すると

$$\eta = \frac{(w_C - i_o w_D) \eta_1 \eta_2}{w_C \eta_2 - i_o w_D \eta_1}. \quad (14)$$

2. 2 軸Cと軸Aが入力軸で軸Dが出力軸の差動歯車機構

この差動歯車機構はつぎのごとき2つの成分の遊星歯車装置からなるものとする。

第1成分遊星歯車装置 (A固定, C駆動, D従動)

式(3)において $w_A = 0$ とおくと

$$w_{D1} = w_C/i_o. \quad (15)$$

このときの効率 η_1 は

$$\eta_1 = \eta_o. \quad (16)$$

このときの軸 C からの入力 N_{i1} と軸 D への出力 N_{o1} の関係は

$$N_{i1} = N_{o1}/\eta_1. \quad (17)$$

第2成分遊星歯車装置 (C 固定, A 駆動, D 従動)

式(3)において $w_C=0$ とおくと

$$w_{D2} = (1 - \frac{1}{i_o})w_A. \quad (18)$$

このときの効率 η_2 は

$$\eta_2 = \frac{\eta_o(1 - i_o)}{1 - \eta_o i_o}. \quad (19)$$

このときの軸 A からの入力 N_{i2} と軸 D への出力 N_{o2} の関係は

$$N_{i2} = N_{o2}/\eta_2. \quad (20)$$

したがって軸 D からの総出力を N_o とすると, 全体の効率 η は

$$\eta = \frac{N_o}{N_{i1} + N_{i2}} = \frac{N_o}{\frac{N_{o1}}{\eta_1} + \frac{N_{o2}}{\eta_2}}. \quad (21)$$

しかるに軸 D の出力トルクを T_o とすれば,

$$N_o = T_o w_D = T_o(w_{D1} + w_{D2}) = N_{o1} + N_{o2}.$$

したがって

$$T_o = N_o/w_D = N_{o1}/w_{D1} = N_{o2}/w_{D2}.$$

これより

$$N_{o1} = \frac{w_{D1}}{w_D} N_o = \frac{w_C}{w_C + (i_o - 1)w_A} N_o, \quad (22)$$

$$N_{o2} = \frac{w_{D2}}{w_D} N_o = \frac{(i_o - 1)w_A}{w_C + (i_o - 1)w_A} N_o. \quad (23)$$

式(21)に式(22)と(23)を代入すると

$$\eta = \frac{\{w_C + (i_o - 1)w_A\}\eta_1\eta_2}{w_C\eta_2 + (i_o - 1)w_A\eta_1}. \quad (24)$$

2. 3 軸 D と軸 A が入力軸で軸 C が出力軸の差動歯車機構

第 1 成分遊星歯車装置 (A 固定, D 駆動, C 従動)

式(2)において $w_A = 0$ とおくと

$$w_{C1} = i_o w_D. \quad (25)$$

このときの効率 η_1 は

$$\eta_1 = \eta_o. \quad (26)$$

このときの軸 D からの入力 N_{i1} と軸 C への出力 N_{o1} の関係は

$$N_{i1} = N_{o1}/\eta_1. \quad (27)$$

第 2 成分遊星歯車装置 (D 固定, A 駆動, C 従動)

式(2)において $w_D = 0$ とおくと

$$w_{C2} = (1 - i_o)w_A. \quad (28)$$

このときの効率 η_2 は

$$\eta_2 = \frac{1 - i_o}{1 - \eta_o i_o}. \quad (29)$$

このときの軸 A からの入力 N_{i2} と軸 C への出力 N_{o2} の関係は

$$N_{i2} = N_{o2}/\eta_2. \quad (30)$$

したがって軸 C からの総出力を N_o とすると, 全体の効率 η は

$$\eta = \frac{N_o}{N_{i1} + N_{i2}} = \frac{N_o}{\frac{N_{o1}}{\eta_1} + \frac{N_{o2}}{\eta_2}}. \quad (31)$$

しかるに軸 C の出力トルクを T_o とすれば

$$N_o = T_o w_C = T_o (w_{C1} + w_{C2}) = N_{o1} + N_{o2}.$$

したがって

$$T_o = N_o/w_C = N_{o1}/w_{C1} = N_{o2}/w_{C2}.$$

これより

$$N_{o1} = \frac{w_{C1}}{w_C} N_o = \frac{i_o w_D}{i_o w_D + (1 - i_o)w_A} N_o, \quad (32)$$

$$N_{o2} = \frac{w_{C2}}{w_C} N_o = \frac{(1 - i_o)w_A}{i_o w_D + (1 - i_o)w_A} N_o. \quad (33)$$

式(31)に式(32)と(33)を代入すると

$$\eta = \frac{\{i_0 w_D + (1 - i_0) w_A\} \eta_1 \eta_2}{i_0 w_D \eta_2 + (1 - i_0) w_A \eta_1}. \quad (34)$$

2. 4 軸 C が入力軸で軸 A と D が出力軸の差動歯車機構

第1成分遊星歯車装置 (A 固定, C 駆動, D 従動)

式(3)において $w_A = 0$ とおくと

$$w_{C1} = i_0 w_D. \quad (35)$$

このときの効率 η_1 は

$$\eta_1 = \eta_0. \quad (36)$$

このときの軸 C からの入力 N_{i1} と軸 D からの出力 N_{o1} の関係は

$$N_{o1} = N_{i1} \cdot \eta_1. \quad (37)$$

第2成分遊星歯車装置 (D 固定, C 駆動, A 従動)

式(1)において $w_D = 0$ とおくと

$$w_{C2} = (1 - i_0) w_A. \quad (38)$$

このときの効率 η_2 は

$$\eta_2 = \frac{\eta_0 - i_0}{\eta_0(1 - i_0)}. \quad (39)$$

このときの軸 C からの入力 N_{i2} と軸 A からの出力 N_{o2} の関係は

$$N_{o2} = N_{i2} \cdot \eta_2. \quad (40)$$

したがって軸 C からの総入力を N_i とすると, 全体の効率 η は

$$\eta = \frac{N_{o1} + N_{o2}}{N_i} = \frac{N_{i1} \eta_1 + N_{i2} \eta_2}{N_i}. \quad (41)$$

しかるに軸 C の入力トルクを T_i とすれば

$$N_i = T_i w_C = T_i (w_{C1} + w_{C2}) = N_{i1} + N_{i2}.$$

したがって

$$T_i = N_i / w_C = N_{i1} / w_{C1} = N_{i2} / w_{C2}.$$

これより

$$N_{i1} = \frac{w_{C1}}{w_C} N_i = \frac{i_0 w_D}{(1 - i_0) w_A + i_0 w_D} N_i, \quad (42)$$

$$N_{i2} = \frac{w_{C2}}{w_C} N_i = \frac{(1 - i_0) w_A}{(1 - i_0) w_A + i_0 w_D} N_i. \quad (43)$$

式(41)に式(42)と(43)を代入すると

$$\eta = \frac{i_o w_D \eta_1 + (1 - i_o) w_A \eta_2}{(1 - i_o) w_A + i_o w_D}. \quad (44)$$

2. 5 軸 D が入力軸で軸 A と C が出力軸の差動歯車機構

第1成分遊星歯車装置 (A 固定, D 駆動, C 従動)

式(3)において $w_A = 0$ とおくと

$$w_{D1} = w_C / i_o. \quad (45)$$

このときの効率 η_1 は

$$\eta_1 = \eta_o. \quad (46)$$

このときの軸 D からの入力 N_{i1} と軸 C からの出力 N_{o1} の関係は

$$N_{o1} = N_{i1} \cdot \eta_1. \quad (47)$$

第2成分遊星歯車装置 (C 固定, D 駆動, A 従動)

式(3)において $w_C = 0$ とおくと

$$w_{D2} = \left(1 - \frac{1}{i_o}\right) w_A. \quad (48)$$

このときの効率 η_2 は

$$\eta_2 = \frac{\eta_o - i_o}{1 - i_o}. \quad (49)$$

このときの軸 D からの入力 N_{i2} と軸 A からの出力 N_{o2} の関係は

$$N_{o2} = N_{i2} \cdot \eta_2. \quad (50)$$

したがって軸 D からの総入力を N_i とすると, 全体の効率 η は

$$\eta = \frac{N_{o1} + N_{o2}}{N_i} = \frac{N_{i1} \eta_1 + N_{i2} \eta_2}{N_i}. \quad (51)$$

しかるに軸 D の入力トルクを T_i とすれば

$$N_i = T_i w_D = T_i (w_{D1} + w_{D2}) = N_{i1} + N_{i2}.$$

したがって

$$T_i = N_i / w_D = N_{i1} / w_{D1} = N_{i2} / w_{D2}.$$

これより

$$N_{i1} = \frac{w_{D1}}{w_D} N_i = \frac{w_C}{w_C + (i_o - 1) w_A} N_i, \quad (52)$$

$$N_{i2} = \frac{w_{D2}}{w_D} N_i = \frac{(i_o - 1)w_A}{w_C + (i_o - 1)w_A} N_i. \quad (53)$$

式(51)に式(52)と(53)を代入すると

$$\eta = \frac{w_C \eta_1 + (i_o - 1)w_A \eta_2}{w_C + (i_o - 1)w_A}. \quad (54)$$

2. 6 軸 A が入力軸で軸 C と D が出力軸の差動歯車機構

第1成分遊星歯車装置 (D 固定, A 駆動, C 従動)

式(1)において $w_D = 0$ とおくと

$$w_{A1} = \frac{1}{1 - i_o} w_C. \quad (55)$$

このときの効率 η_1 は

$$\eta_1 = \frac{1 - i_o}{1 - \eta_o i_o}. \quad (56)$$

このときの軸 A からの入力 N_{i1} と軸 C からの出力 N_{o1} の関係は

$$N_{o1} = N_{i1} \cdot \eta_1. \quad (57)$$

第2成分遊星歯車装置 (C 固定, A 駆動, D 従動)

式(1)において $w_C = 0$ とおくと

$$w_{A2} = \frac{-i_o}{1 - i_o} w_D. \quad (58)$$

このときの効率 η_2 は

$$\eta_2 = \frac{\eta_o(1 - i_o)}{1 - \eta_o i_o}. \quad (59)$$

このときの軸 A からの入力 N_{i2} と軸 D からの出力 N_{o2} の関係は

$$N_{o2} = N_{i2} \cdot \eta_2. \quad (60)$$

したがって軸 A からの総入力を N_i とすると, 全体の効率 η は

$$\eta = \frac{N_{o1} + N_{o2}}{N_i} = \frac{N_{i1} \eta_1 + N_{i2} \eta_2}{N_i}. \quad (61)$$

しかるに軸 A の入力トルクを T_i とすると

$$N_i = T_i w_A = T_i (w_{A1} + w_{A2}) = N_{i1} + N_{i2}.$$

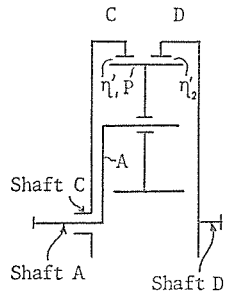
したがって

Table 1 Speed Ratio and Efficiency Formulas for 2K-H Differential Gears
Applying the Mechanical Paradox Internal Gear

$$0 < i_o (= -\frac{Z_p}{Z_c}) < 1$$

i_o : Gear Ratio

$$Z_c > Z_o$$



$$\eta_o = \eta'_1 \times \eta'_2$$

η_o : Efficiency of Stationary gear trains

Driver	Follower	Angular Velocity	Efficiency of Differentials	Driver	Follower	Fixed	Efficiency of Component Planetary Trains	Direction of Rotation of Shafts A, C and D
C, D	A	$\omega_A = \frac{\omega_c - i_o \omega_p}{1 - i_o}$	$\eta = \frac{(\omega_c - i_o \omega_p) \eta_1 \eta_2}{\omega_c \eta_2 - i_o \omega_p \eta_1}$	C	A	D	$\eta_1 = \frac{\eta_o - i_o}{\eta_o (1 - i_o)}$	Shaft D only : Opposite Direction
				D	A	C	$\eta_2 = \frac{\eta_o - i_o}{1 - i_o}$	
A, C	D	$\omega_p = \frac{1}{i_o} \omega_c + (1 - \frac{1}{i_o}) \omega_A$	$\eta = \frac{\{\omega_c + (i_o - 1) \omega_A\} \eta_1 \eta_2}{\omega_c \eta_2 + (i_o - 1) \omega_A \eta_1}$	C	D	A	$\eta_1 = \eta_o$	Shaft A only : Opposite Direction
				A	D	C	$\eta_2 = \frac{\eta_o (1 - i_o)}{1 - \eta_o i_o}$	
A, D	C	$\omega_c = (1 - i_o) \omega_A + i_o \omega_p$	$\eta = \frac{\{i_o \omega_p + (1 - i_o) \omega_A\} \eta_1 \eta_2}{i_o \omega_p \eta_2 + (1 - i_o) \omega_A \eta_1}$	D	C	A	$\eta_1 = \eta_o$	All Shafts : Same Direction
				A	C	D	$\eta_2 = \frac{1 - i_o}{1 - \eta_o i_o}$	
C	A, D	$\omega_c = (1 - i_o) \omega_A + i_o \omega_p$	$\eta = \frac{i_o \omega_p \eta_1 + (1 - i_o) \omega_A \eta_2}{(1 - i_o) \omega_A + i_o \omega_p}$	C	D	A	$\eta_1 = \eta_o$	All Shafts : Same Direction
				C	A	D	$\eta_2 = \frac{\eta_o - i_o}{\eta_o (1 - i_o)}$	
D	A, C	$\omega_p = \frac{1}{i_o} \omega_c + (1 - \frac{1}{i_o}) \omega_A$	$\eta = \frac{\omega_c \eta_1 + (i_o - 1) \omega_A \eta_2}{\omega_c + (i_o - 1) \omega_A}$	D	C	A	$\eta_1 = \eta_o$	Shaft A only : Opposite Direction
				D	A	C	$\eta_2 = \frac{\eta_o - i_o}{1 - i_o}$	
A	C, D	$\omega_A = \frac{\omega_c - i_o \omega_p}{1 - i_o}$	$\eta = \frac{\omega_c \eta_1 - i_o \omega_p \eta_2}{\omega_c - i_o \omega_p}$	A	C	D	$\eta_1 = \frac{1 - i_o}{1 - \eta_o i_o}$	Shaft D only : Opposite Direction
				A	D	C	$\eta_2 = \frac{\eta_o (1 - i_o)}{1 - \eta_o i_o}$	

$$T_i = N_i/w_A = N_{i1}/w_{A1} = N_{i2}/w_{A2}.$$

これより

$$N_{i1} = \frac{w_{A1}}{w_A} N_i = \frac{w_C}{w_C - i_0 w_D} N_i, \quad (62)$$

$$N_{i2} = \frac{w_{A2}}{w_A} N_i = \frac{-i_0 w_D}{w_C - i_0 w_D} N_i. \quad (63)$$

式(61)に式(62)と(63)を代入すると

$$\eta = \frac{w_C \eta_1 - i_0 w_D \eta_2}{w_C - i_0 w_D}. \quad (64)$$

以上の結果から表1を得る.

3 A軸, C軸およびD軸の回転方向の関係

遊星ピニオンにおける力の釣り合いから, 遊星ピニオンに作用する力の大きさと方向が定まる. すなわち内歯車Cと遊星ピニオンPのかみ合いピッチ円半径をそれぞれ r_C , r_{P1} とし, 内歯車Dと遊星ピニオンPのかみ合いピッチ円半径を r_D , r_{P2} とするとき, 不思議歯車においては $Z_C > Z_D$ とすると $r_C < r_D$, $r_{P1} < r_{P2}$ となり, 遊星ピニオンPの中心に

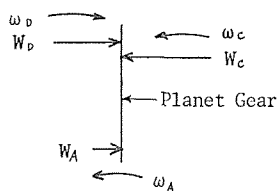


Fig. 2 Forces and Angular Velocities in Planet Gear

かかる力 W_A , 内歯車Cと遊星ピニオンPのかみ合いピッチ点にかかる力 W_C , 内歯車Dと遊星ピニオンPのかみ合いピッチ点にかかる力 W_D の関係は図2のごとくなる. そして入力軸ではトルクのかかる方向と回転方向が同方向であり, 出力軸ではトルクのかかる方向と回転方向が反対方向であることより, w_A , w_C , w_D の方向が定まる. 例えば表1の一番上の欄には, C軸とD軸が入力軸でA軸が出力軸の差動歯車が表示されている. この場合は w_C , w_D , w_A の回転方向は図2に示す方向をとることになり, w_A と w_C が同方向で w_D はこれらと反対方向をとらなければならない.

すなわち式(3)において正の w_C と w_A を代入したときに得られる w_D が負になるような w_A , w_C , w_D の関係を保つとき, この差動歯車装置が成立することになる. この考え方により表1のすべての場合の軸A, C, Dの回転方向を求め, 表1の右端の欄に, 軸A, C, Dの回転方向関係を示した.

4 結 言

2K-H型差動不思議歯車機構の効率を計算するための計算式について考察し, 基準効率 η_0 と歯数比 i_0 を用いてこれら装置の効率を計算する式を導き, 回転角速度と効率の計算式の一覧表を作成した. 終りに本研究に助力された三浦司郎君に感謝の意を表します.

文 献

- 1) 中田孝：新版転位歯車，誠文堂新光社，(昭46—4)，p. 177.
- 2) 両角宗晴：不思議歯車を用いた遊星歯車装置の効率に関する研究，信州大学工学部紀要，46号(昭54—7)，p. 1.