

FEM による合流部段波の数値実験法

荒木正夫* 富所五郎** 高木茂知***

(昭和54年5月31日受理)

Numerical Experiment of Hydraulic Bores in Confluence by FEM

Masao ARAKI, Goro TOMIDOKORO, Shigenori TAKAKI

This study has applied the finite element method to the hydraulic bores in the open channel confluence. To discretize the nonlinear partial differential equations, we have used the Galerkin method in space direction and the two-step Lax-Wendroff method, which is suitable to the shock wave problems, in time direction.

Lumping the mass matrix to obtain the solutions without solving the simultaneous equations, and using together one-dimensional and two-dimensional mesh to decrease the number of nodes, we have been able to reduce the computing time. Taking account of the momentum diffusion terms, we have been able to obtain the numerical stability of the solutions. And fairly good agreements have been obtained between the numerical results and the model experimental results for the propagation of the hydraulic bores.

1 序 論

河川合流部の段波の挙動に関する研究は、従来主として模型実験や運動量の式¹⁾を用いた解析法によるものが主であったが、最近の計算機の著しい発達により分合流部の不定流を数値的にとく数値実験法も用いられるようになってきた。しかし、これらの方法のほとんどは特性曲線法²⁾や差分法³⁾を用いた1次元解析法である。このため、分合流部においていろいろな仮定を設けて⁴⁾補正を行なっているが、合流角の違いなどによる平面形状の変化の影響を完全にあらわすことは難かしく、2次元的な解析が要求される。

そこで本研究は、有限要素法を用い合流部における段波の2次元数値解析を行なおうとするものである。有限要素法は差分法などに比し、不規則な境界を忠実に表現でき、境界条件も入れ易いという特徴を持ち、最近では拡散問題や潮流解析などの分野ばかりでなく河

* 土木工学科教授

** 土木工学科講師

*** 元院生・パシフィックコンサルタンツ(株)

川の不定流^{5)~6)}に対しても用いられるようになった解析法である。この方法の欠点は、計算時間が長いことであるが、本研究ではこれを、1次元要素と2次元要素の併用による節点数の減少と質量行列の集中化などにより解消する。また数値解の安定性は、人工粘性項の導入や平滑化によるのではなく、運動量拡散項を考慮し達成する。最後に数値解析結果を模型実験結果^{7)~8)}と比較し、この数値実験法の妥当性を検討する。なお、この数値実験法と模型実験による合流部における段波の水理学的挙動に関する考察は文献7)に述べる予定である。

2 基礎方程式

不定流の基礎方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + A_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + A_H \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + A_V \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + A_H \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + A_V \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + A_H \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

である。ここに u, v, w は流速 u の x, y, z 方向の成分 (図-1), A_V, A_H は鉛直・水平渦動粘性係数, ρ は水の密度, p は圧力, g は重力の加速度, F_x, F_y, F_z は物体力の x, y, z 方向の成分で重力のみが物体力の場合 I_x, I_y を x, y 方向の河床こう配とすると $F_x = g \cdot I_x, F_y = g \cdot I_y, F_z = -g$ である。ここで解析を簡単にするため上式を z 方向には流速一定である式に変換する⁹⁾。(2.4) 式を河床 $z=0$ から水面 $z=h(x, y, t)$ の区間で積分すると,

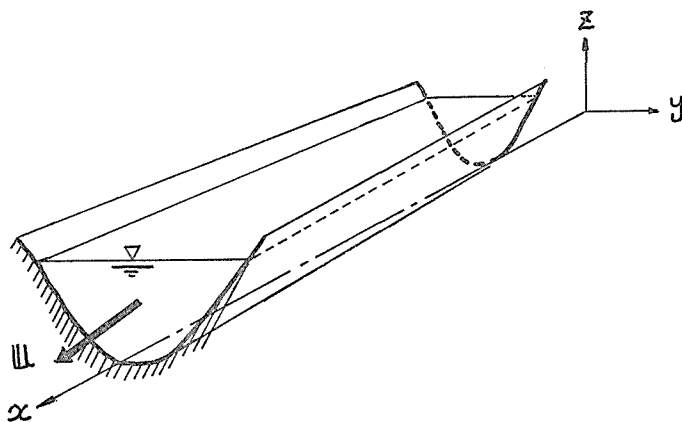


Fig. 1 Open channel flow

$$\int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \cdot dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u \cdot dz - u_s \frac{\partial h}{\partial x} \\ + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h v \cdot dz - v_s \frac{\partial h}{\partial y} + w_s - w_b = 0$$

となる。ここに添字 s は水面を, b は河床を示す。ここで

$$\left(\frac{dz}{dt} \right)_s = w_s = \frac{\partial h}{\partial t} + u_s \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + v_s \cdot \frac{\partial h}{\partial y}, \quad w_b = 0 \quad (2.5)$$

であるので (2.4) 式は

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u \cdot dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h v \cdot dz + \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}h}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}h}{\partial y} \quad (2.6)$$

となる。ここに \bar{u} , \bar{v} は z 方向の平均値

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h u \cdot dz, \quad \bar{v} = \frac{1}{h} \int_0^h v \cdot dz \quad (2.7)$$

である。つぎに (2.1) 式を積分する。左辺は

$$\int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} \right) \cdot dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h u \cdot dz - u_s \frac{\partial h}{\partial t} \\ + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u^2 \cdot dz - u_s^2 \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h uv \cdot dz - u_s v_s \frac{\partial h}{\partial y} + u_s w_s - u_b w_b \quad (2.8)$$

となる。ここで右辺の第 2, 4, 6, 7 項は (2.5) 式より消去され, また $u_b w_b = 0$ であるので上式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h u \cdot dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u^2 \cdot dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h uv \cdot dz = \frac{\partial \bar{u}h}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \bar{u}^2 h}{\partial x} + \beta \frac{\partial \bar{u}\bar{v}h}{\partial y}$$

となる。ここに α , β は運動量補正係数で

$$\int_0^h u^2 \cdot dz = \alpha \bar{u}^2 h, \quad \int_0^h uv \cdot dz = \beta \bar{u}\bar{v}h \quad (2.9)$$

と置いている。同様に右辺は A_H , A_V を z 方向に一定とすると

$$\int_0^h \left\{ Fx - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + A_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + A_H \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right\} dz \\ = \left(Fx - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) h - \left(A_V \frac{\partial u}{\partial z} \right)_b + A_H \left\{ \frac{\partial}{\partial x^2} \int_0^h u \cdot dz + \right.$$

$$\frac{\partial}{\partial y^2} \int_0^h v \cdot dz - u_s \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_s \frac{\partial h}{\partial x} - u_s \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_s \frac{\partial h}{\partial y} \Big\}$$

となり, $\bar{u} = u_s$, $\partial \bar{u} / \partial x = (\partial u / \partial x)_s$, $\partial \bar{u} / \partial y = (\partial u / \partial y)_s$ とすると

$$= \left(F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) h - \left(A_V \frac{\partial u}{\partial z} \right)_b + A_H \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) \cdot h$$

が得られる. (2.2)式も同じようにして(2.1), 式(2.2)式はつぎのようになる

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u} h}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \bar{u}^2 h}{\partial x} + \beta \frac{\partial \bar{u} \bar{v} h}{\partial y} &= \left(F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) h \\ &- \left(A_V \frac{\partial u}{\partial z} \right)_b + A_H \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) h \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v} h}{\partial t} + \beta \frac{\partial \bar{u} \bar{v} h}{\partial x} + \gamma \frac{\partial \bar{v}^2 h}{\partial y} &= \left(F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right) h \\ &- \left(A_V \frac{\partial v}{\partial z} \right)_b + A_H \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) h \end{aligned} \quad (2.11)$$

ここに, γ は (2.9) 式と同様な形の運動量補正係数である. また右辺の第 2 項は底面摩擦であり, それぞれ

$$\left. \begin{aligned} \left(A_V \frac{\partial u}{\partial z} \right)_b &= gh \cdot S_x = gh \cdot \frac{n^2 \bar{u} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}{h^{\frac{4}{3}}} \\ \left(A_V \frac{\partial v}{\partial z} \right)_b &= gh \cdot S_y = gh \cdot \frac{n^2 \bar{v} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}{h^{\frac{4}{3}}} \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

とおく. ここに S_x, S_y は x, y 方向の摩擦こう配¹⁰⁾, n はマンングの粗度係数である.

つぎに (2.3) 式において, 解析を簡単にするために w は小さいとして右辺の第 1, 2 項以外は全て無視する. この時 (2.3) 式は, $F_z = -g$ を代入し $0 \sim h$ の区間で積分し $p_s = 0$ で積分定数を定めると $p = \rho g(h - z)$ となる. この式と (2.12) 式を (2.10), (2.11) 式に代入し, 近似的に $\alpha = \beta = \gamma = 1.0$ とし, 式を変形すると 2 次元の不定流の基礎方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(I_x - S_x) + A_H \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} = g(I_y - S_y) + A_H \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} + \frac{\partial vh}{\partial y} = 0 \quad (2.15)$$

が得られる。ここに、平均を示す一は簡単のため省略している。1次元の不定流に対する基礎式は上式で v を含む全ての項を除き

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(I_x - S_x) + A_H \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} = 0 \quad (2.17)$$

となる。(2.13)から(2.17)式の誘導においてなされたいくつかの仮定は、流速が z 方向にほぼ一様とみなせれば妥当なものであるが、一様でない場合は誤差が大きくなり上式は用いることができなくなる。このような時は何らかの形で z 方向の流速分布を考慮した解析方法が必要となる。

3 有限要素法による基礎式の離散化^{11), 12)}

数値計算法として差分法、特性曲線法、有限要素法などがありそれぞれいろいろの特徴を持っている。本研究では複雑な境界が忠実に表現でき、境界条件の取り入れも容易である Galerkin 有限要素法を用い基礎式の空間変数に対する離散化を行なう。また時間変数に対しては 2-step Lax-Wendroff 法¹³⁾を用い離散化を行なう。

3.1 基礎式の空間変数に対する離散化

それぞれの変数の試験関数を

$$u = N_i \cdot u_i, \quad v = N_i \cdot v_i, \quad h = N_i \cdot h_i \quad (i = i, j, k) \quad (3.1)$$

などとする。ここに N_i は形状関数で 2次元不定流に対して用いる三角形一次要素では

$$\left. \begin{aligned} N_i &= a_i + b_i x + c_i y & (i = i, j, k) \\ a_i &= (x_j x_k - x_k y_j) / 2S, \quad b_i = (y_j - y_k) / 2S \\ c_i &= (x_k - x_j) / 2S \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

である。ここに S は三角形要素の面積で i, j, k は三角形の頂点を示す。つぎの重み関数を N_i として(3.13)から(3.15)式にかけ要素内で積分すると、

$$\left. \begin{aligned} M_{ij} \cdot \dot{u}_j + R_{ijk} \cdot u_j u_k + Q_{ijk} \cdot u_j v_k + E1_{ij} \cdot h_j \\ \quad = T_i \cdot I_x - g M_{ij} \cdot S_{xi} + G_{ij} \cdot u_j - H_{ij} \cdot u_j \\ M_{ij} \cdot \dot{v}_j + R_{ijk} \cdot v_j u_k + Q_{ijk} \cdot v_j v_k + E2_{ij} \cdot h_j \\ \quad = T_i \cdot I_y - g M_{ij} \cdot S_{yi} + G_{ij} \cdot v_j - H_{ij} \cdot v_j \\ M_{ij} \cdot \dot{h}_j + K1_{ijk} \cdot u_j h_k + K2_{ijk} \cdot v_j h_k = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{ij} &= \int_S N_i N_j \cdot ds, \quad R_{ijk} = \int_S N_i N_k b_j \cdot ds, \quad Q_{ijk} = \int_S N_i N_k c_j \cdot ds \\ E1_{ij} &= \int_S g N_i b_j ds, \quad E2_{ij} = \int_S g N_i c_j \cdot ds, \quad T_i = \int_S g N_i \cdot ds \\ G_{ij} &= \int_S A_H (b_i b_j + c_i c_j) ds, \quad H_{ij} = \int_l A_H (n_x N_i b_j + n_y N_i c_i) dl \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

となる。ここに \cdot は時間微分を意味し n_x, n_y は要素の境界に立てた単位法線ベクトルの x, y 成分である。また G_{ij}, H_{ij} は微分の階数を下げるため A_H を要素内で一定と仮定し Gauss の定理を用い

$$A_H \int_S N_i \frac{\partial^2}{\partial x^2} (N_j u_j) ds = A_H \int_l n_x \cdot N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j dl - A_H \int_S \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j ds \quad (3.5)$$

などより求めた。(3.3) 式を全ての要素に適用し、これらを重ね合せれば 2 次元不定流の基礎式の空間変数に対する離散化方程式が得られる。この時 H_{ij} の項は、相隣り合う要素では打ち消し合うので計算は解析境界のみでよい。

つぎに 1 次元不定流に対する形状関数を

$$N_i = (x_j - x)/(x_j - x_i) \quad (i = i, j) \quad (3.6)$$

とすると、2 次元不定流の場合と同様にして (2.16), (2.17) 式は

$$\left. \begin{aligned} M_{ij} \cdot \dot{u}_j + R_{ijk} \cdot u_j u_k + E1_{ij} \cdot h_j \\ = T_i \cdot I_x - g M_{ij} \cdot S_{xi} + G_{ij} \cdot u_j - H_{ij} \cdot u_j \\ M_{ij} \cdot \dot{h}_j + K1_{ijk} \cdot u_j h_k = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

となる。ここに

$$G_{ij} = \int_S A_H b_i b_j ds, \quad H_{ij} = \int_l A_H \cdot n_x \cdot N_i b_j dl \quad (3.8)$$

以外は (3.4) 式と同じである。

3.2 時間変数に対する離散化

本研究では衝撃波などの急変不定流に対し有効であると言われている 2-step Lax-Wendroff 法を用い基礎式の時間変数に対する離散化を行なう。(3.3) 式または (3.7) 式の左辺の時間微分項以外は全て右辺に移項し、要素全体について重ね合せると両式とも

$$[M] \cdot \frac{\partial}{\partial t} \{V\} = \{F\} \quad (3.9)$$

となる。ここに V は u_i, v_i, h_i の未知量ベクトルである。上式の 2-step Lax-Wendroff 式は第 1 ステップが

$$[M] \cdot \{V\}_{t+\Delta t/2} = [M] \cdot \{V\}_t + \frac{\Delta t}{2} \cdot [F]_t, \quad (3.10)$$

第2ステップが

$$[M] \cdot [V]_{t+\Delta t} = [M] \cdot \{V\}_t + \Delta t \cdot \{F\}_{t+\Delta t/2} \quad (3.11)$$

である。ここに添字 $t, t + \Delta t$ などは時刻を示す。上の連立方程式を与えられた初期条件、境界条件のもとに step-by-step にとけば、全ての時刻における未知量の値を決定でき方程式はとけたことになる。

4 合流部段波の数値計算法

ここでは合流部の段波の数値計算を行なうに必要な種々の技法、問題点について述べる。
4.1 質量行列の集中化¹¹⁾

(3.10), (3.11) 式は連立方程式でありバンドマトリックス法などの技巧を用いたとしても節点数が多い時には長い計算時間を要す(連立方程式をとくこの方法を(1)の方法という)。そこでここで質量行列の集中化を行ない、同時刻における未知量間の関連をなくし連立方程式をとくことなく解を求められる集中マトリックス法を検討する。川原¹³⁾は(3.10), (3.11) 式の左辺の質量行列のみを集中化する方法を提案している(これを(2)の方法という)。しかしこの方法では右辺の質量行列の作用より未知量の平均化が起り、波など急激に変化する現象はならされてしまう。これに対し右辺の質量行列も集中化する方法も提案されている(この方法を(3)の方法という)。以上の3つの方法を数値実験により検討してみる。

図一2は長さ5m, 幅0.5m, 水深10cmで静水状態にある水路の端末に0.5秒で10cmの波高まで正弦波により上昇する段波を起した時の数値解析結果である。ここで、マンングの粗度係数は $n = 0.01$, メッシュ幅は等間隔で10cm, 1次元要素数は50, 計算時間ステップは段波がメッシュを横切る時間0.07秒より小さい0.02秒, 渦動粘性係数は(4.1)式で $K = 6.0$ の値を用いた。図より(1)に比し(2)は非常に安定で波の立ち上り部分にかなりのなまりが生じていることがわかる。この傾向はメッシュ幅, 時間ステップ, 渦動粘性

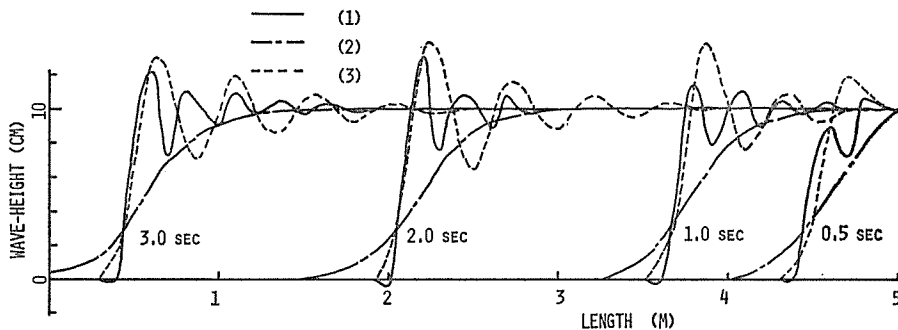


Fig. 2 Propagation of hydraulic bores

係数を変化させても同様に言えることで、この方法は段波など物理量が急激に変化する現象の過渡状態を解析するには適当でないと思える。これに対し(3)は、波高など多少の誤差を含むが立ち上り点や形などはほぼ一致している。

これより本研究では、多少の誤差を含むが計算時間が大幅に短縮できることより(3)の方法を用いることとする。

4・2 1次元・2次元要素の併用とその接合

本研究では計算時間をさらに短縮するため1次元要素と2次元要素の併用を行なった。これは流れの物理量の断面方向の変化の激しい合流部附近は2次元解析を行ない、これ以外の変化の無視できる区域では1次元解析しようとするものである。これにより解析領域全体に2次元メッシュを組むよりも節点数を大幅に減少でき、また必要データ数も少なくして計算時間の短縮が可能である。しかしこの時1次元要素と2次元要素の接合が問題となるが、ここではつぎのように行なった。

例えば図-3のように1次元要素に2次元要素の接点*i, j, k*が接するとする。ここに

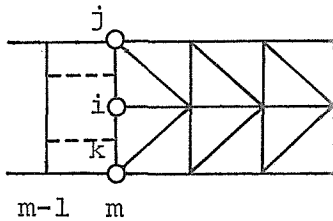


Fig. 3 Joint of one-dimensional element and two-dimensional element

点線は $m-1, m$ の断面を四等分し対応する点を結んだものである。この時1次元要素右の点*m*の1次元要素の寄与は、2次元要素の節点*i, j, k*に点線で区切る面積に比例して分配する。この計算で*m*の未知量の値としては、接する2次元要素の点*i, j, k*の未知量の値を点線で区切る面積で加重平均したものとする。こうすると2次元要素に接する1次元要素の節点の未知量は(3・10)(3・11)式に未知量として入れなくてよいことになる。

本研究では1次元要素に接する2次元要素の節点は全て3ヶであるが、これ以外の数の場合も同様に処理してよいと思える。

4・3 渦動粘性係数

従来、衝撃波面の形成を含むような非線形波動現象の数値解析を行う場合、あらかじめスキームの中に粘性項に相当するものを含ませておき、粘性係数を小さくすることにより発生する衝撃波の幅も十分に小さくなり、実用上不連続と見なせる解が得られた。しかしこれは粘性係数の値をどの程度にするかなど問題が多い。

一方(2・13)、(2・14)、(2・16)式の $A_H \cdot \partial^2 u / \partial x^2$ などの運動量拡散項は、それ自体散逸効果を持っており、新たに散逸効果を導入しなくとも、衝撃波問題が取り扱える。つぎに渦動粘性係数の値によりどのように段波が変化するかを4・1の問題で検討してみる。

渦動粘性係数の値としては $A_H = Ku_* h^{14}$ とした。ここに u_* は摩擦速度で $u_* = \rho g h I$ とマニングの等流公式より $u_* = n\{g(u^2 + v^2)\}^{1/2} / h^{5/6}$ と近似する。これを代入し

$$A_H = Kn\{g(u^2 + v^2)\}^{1/2} \cdot h^{5/6} \quad (4\cdot1)$$

となる。 K は定数で普通開水路では $K \doteq 6.0$ としているが、段波の波先の附近では上下の混合が激しいのでこれより大きくする必要があるかも知れない。どの程度の大きさにするか判断の資料がないので、ここではある地点の段波到達後の K の値を

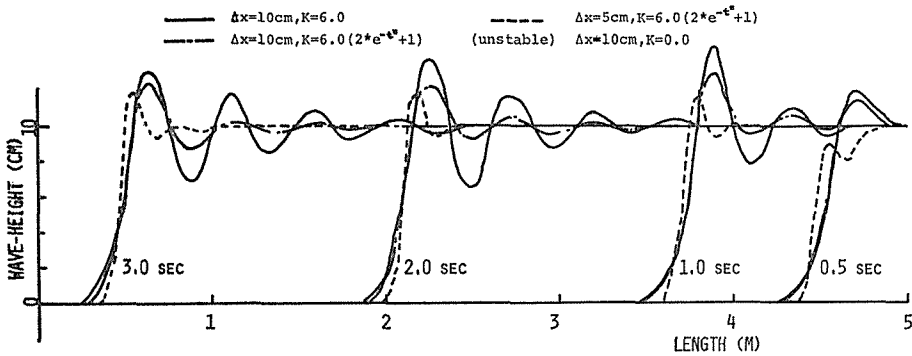


Fig. 4 Propagation of hydraulic bores

$$K = 6.0(a \cdot e^{-t^2} + 1.0) \tag{4.2}$$

にしたがい増加させるものとする。ここに t は段波到達後の時間、 a は定数である。

図-4に(4.1)式の K にいろいろの値を用いた場合の結果を示す。図より、運動量拡散項を考慮することにより安定解が得られることがわかる。しかし、これらの結果では段波の波先部分に振動が生じており、これは(4.2)式の形で波先の部分の A_H を増加させることにより小さくできる。しかしその程度は図-2,4よりわかるよりわかるように質量行列の集中化、解析メッシュ幅などにより変化するとともに段波の波速、立ち上り形や時間などにより変化すると考えられる。このことについては5で再び論ずることとする。

4.4 流量補正

本研究において壁面に垂直な流速は全て $v=0$ としたが、図-5に示す合流部の隅角点 a, b ではこの拘束条件を入れることができない。このため、図に示す流速成分により各要素に流出入が生ずるが、実際は壁からの流出入はないので何らかの形でこれを補正しなければならない。この一方法として、各流速成分による流出入と逆の流出入を各要素に与え連続式の補正を行なってみる。この補正により連続条件がどの程度満足されるか検証するため、ある時刻 t の適合度 $Mc(t)$ を

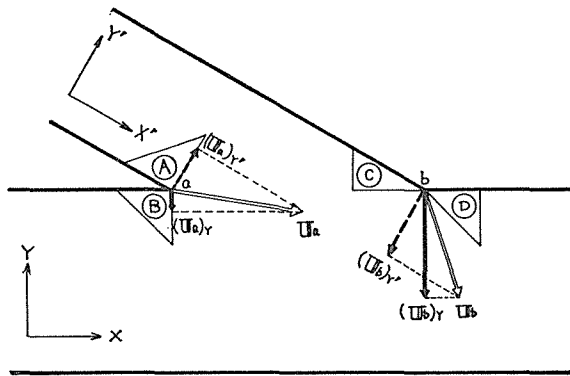


Fig. 5 Confluence

$$Mc(t) = \left\{ \int_0^t Q \cdot dt - \int_S M \cdot ds \right\} / \int_0^t Q \cdot dt \tag{4.3}$$

としてみる¹⁵⁾。ここに右辺の分子の第1項は解析領域に流入する流量、第2項は時刻 t に

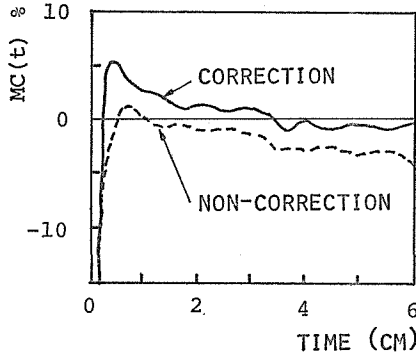


Fig. 6 Compatibility of continuous condition

における定常状態からの解析領域内の流体の体積増加量を示す。

図一6は解析結果の一部であり、流量の補正により連続条件はほぼ満足される。しかしこの方法は単に連続式の補正を行なったのみで、運動方程式については何も行なっていない。両方の式を満足させるには、 a, b 点附近の要素を小さくし、壁からの流出入を実質的に零としてしまうことである。しかしこの方法は要素数、節点数を増し莫大な計算時間を費し、実際には不可能である。

5 模型実験結果との比較

5.1 実験水路と有限要素メッシュ

実験水路は文献⁸⁾で用いたもので幅30cm、長さ5m、路床こう配1/200の支水路が30°の角度で幅50cm、長さ14m、路床こう配1/300の主水路の上流より6m位置に合流する水路である。粗度は幅1.5cm、高さ1cmの機を断面方向に6.25cmの間隔に水路床に敷

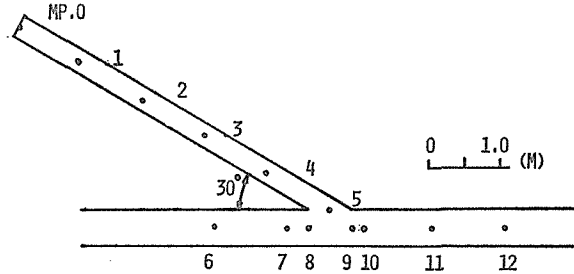


Fig. 7 Measurement points of water-level

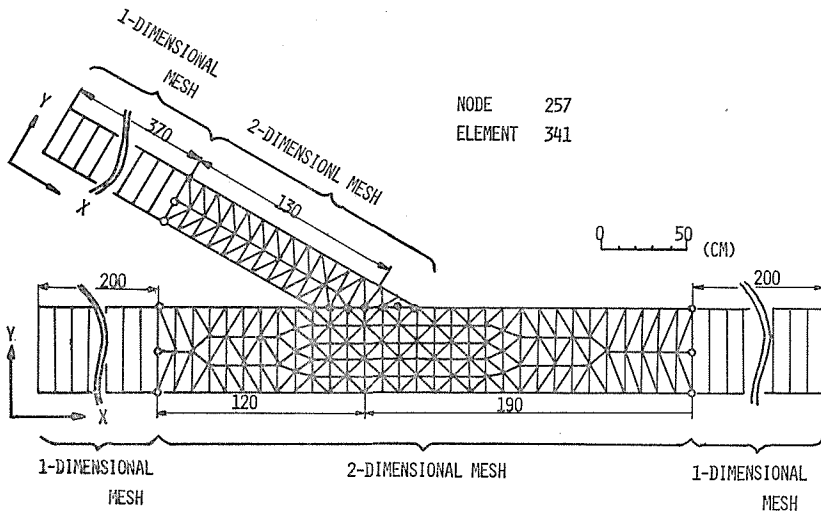


Fig. 8 Finite element mesh

いてつけたが、検定して得られたマニング粗度係数は $n = 0.025$ であった。段波は支水路上流に設けた貯水池の水位調整と支水路出口の水門により発生させ、その波高を図一七に示す地点で波高計により測定した。

図一八に解析に用いる有限要素メッシュを示す。ここで1次元要素数は77, 2次元要素数264, 総節点数257であり、白丸点は4.2で述べた1次元要素に接する2次元要素の節点を示す。座標軸は主水路、支水路で別々のものを用いており、図の黒丸点は主水路の節点としている。したがって支水路のこの節点に対する寄与は、支水路の座標で計算したものを座標変換したものとなる。

5・2 実験結果との比較

数値計算の境界条件として壁面上の節点の壁に垂直方向の流速を、4.4で述べた合流部の隅角点を除く全ての点で零とした。さらに水位の境界条件としては定常状態の流れを求めた後実験で得られた $MP = 0$ の水位変化を与えた。

図一九に、初期条件が $MP = 1$ の水深6cm, 主水路流速 20cm/sec, 支水路流速零の場合の実験値と計算値の波高変化を示す。これよりどの測点においても、両方の波高変化の

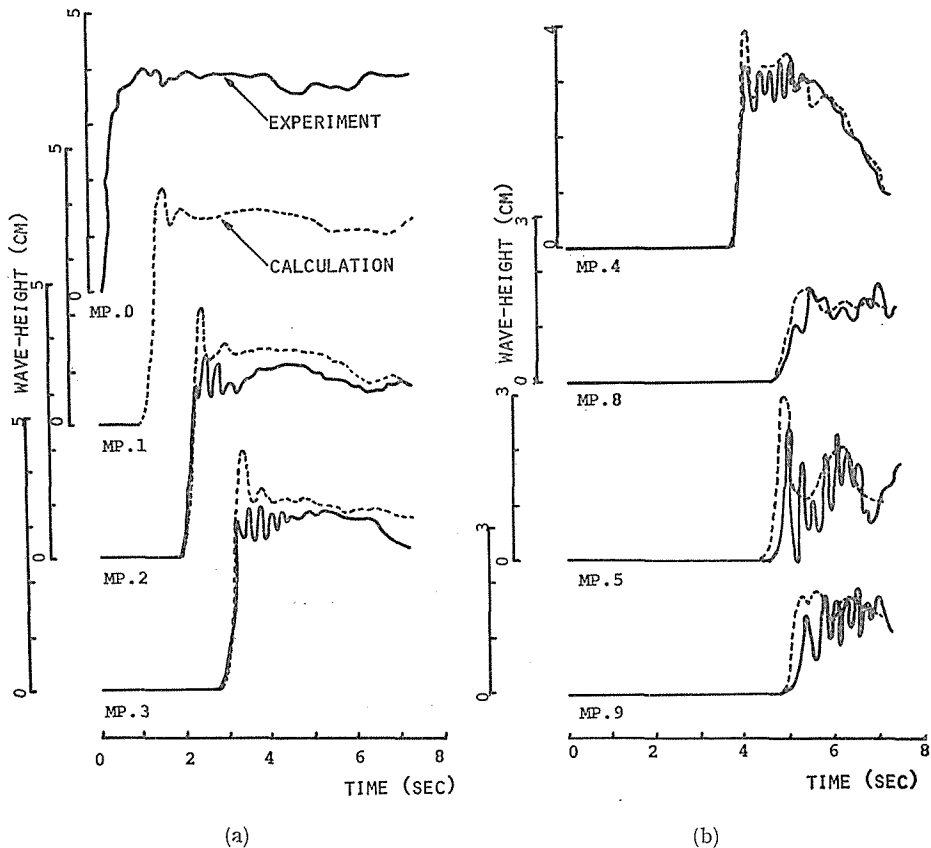


Fig. 9 Comparison of experimental results and numerical results

傾向は似ているが、計算値の方が波高が高く、波の立ち上がりが早くなっている。これは、この計算例の段波の相対波高（段波の波高と全水深の比）は0.4ほどで碎波により徐々に波高が減衰するものであるが、数値解析では碎波条件が入っていないためと、波高が実験値より高いので波の伝播速度が早くなるためと思われる。

つぎに、図-10に初期条件が $MP=1$ の水深9cm、主水路流速 20cm/s、支水路流速零の場合を示す。これは図-9に比し相対波高がほぼ0.25と低く、碎波による減衰がほとんどないため実験値と計算値の波高、立ち上がり時刻ともほぼ一致している。

上の例で渦動粘性係数は(4.1)式で $K=6.0$ としたが、これと別に(4.2)式を用い $a=2.0$ とした計算も行なった。この場合には段波の波先附近でもほとんど振動のない結果が得られ、実験結果により合わないものとなっている。しかし、この段波波先の振動は4.1、4.3でのべたように解析メッシュの大きさ、質量行列の集中化、段波の波速、その立ち上がり形や時間などによって変化するほか、本解析法では鉛直方向の流速を無視しているなどの影響も受けている。したがって現段階で最適の渦動粘性係数を決定するのは難かしく、今後の課題としたい。

なお、計算には信州大学データステーションを通じ東京大学大型計算機 HITAC 8700/8800を使用した。上の例で約10分を要した。

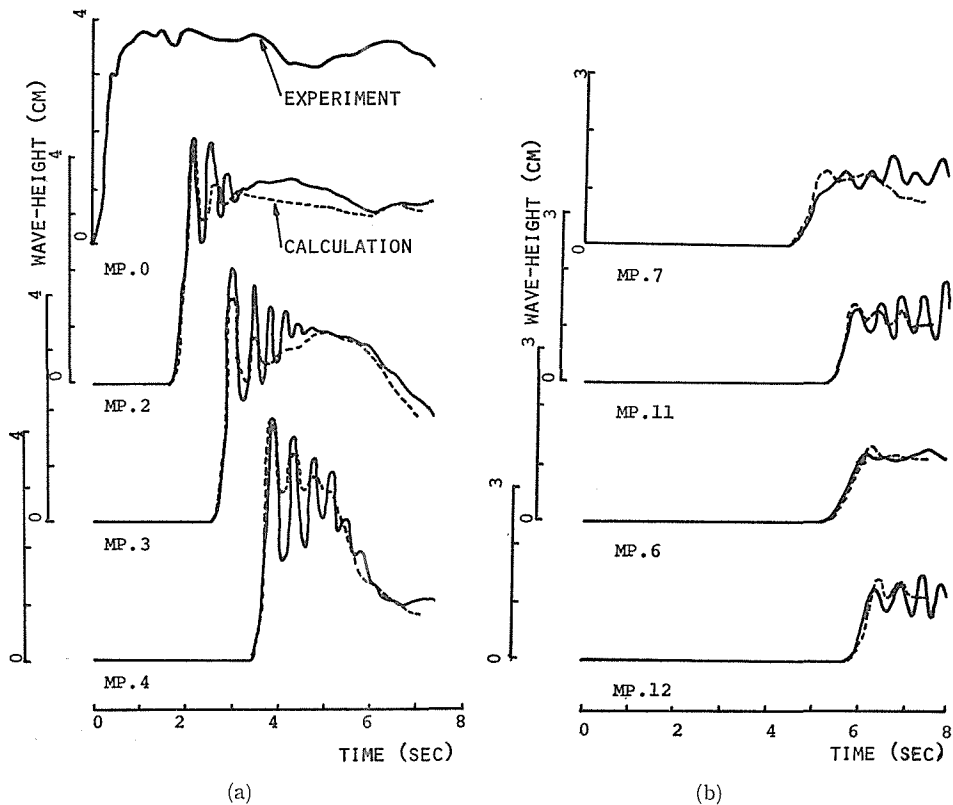


Fig. 10 Comparison of experimental results and numerical results

6 結 論

本研究は合流部の段波に有限要素法を適用する数値実験法についてのべたもので、鉛直方向流速を無視して求めた流れを支配する偏微分方程式を離散化するため、空間方向に Galerkin 法を、時間方向に 2-step Lax-Wendroff 法を用いた。そして実際の数値計算において生ずるいろいろの問題点はつぎのように解消した。

まず計算時間は多少の誤差を許すならば、1次元要素と2次元要素の併用による未知量数の減少と直接連立方程式を解くことなく解を求めることのできる質量行列の集中化によりその大幅な短縮を計ることができた。

数値解の安定性は、従来のような人工粘性項を導入するのではなく物理的意味が明確である運動量拡散項を考慮することにより達成できた。この時の渦動粘性係数には開水路の値を用いたが、この値は段波の波先附近については検討の必要がある。つぎに合流部の隅角点の壁に直角な流速による壁からの流出入は、これと逆の流出入を連続式に加えることにより補正した。

以上のようにして種々の問題点を解消した数値実験法による結果を模型実験により検討したところ、両者の結果は比較的よく合っており、この数値実験法が合流部の段波の解明に十分適用しうることがわかった。しかし本法は碎波や鉛直方向流速を考慮していないことや段波の波先附近の渦動粘性係数の決定など未解決の問題点を残している。これは今後の検討課題としたい。

参 考 文 献

- 1) 本間, 萩原, 福井; 分岐合流水路における段波について(1), 土木学会年次学術講演会, 第30回(1975)
- 2) 秋元, 丸岡; 開水路の水路幅変化部における不定流の解析, 電力中央研究所技術研究所報告 No. 67075 (1967)
- 3) 郡; 分合流する河川の不定流解析, 北海道開発局土木試験所報告, 第280号 (1976)
- 4) 伊藤; 非定常運動の境界条件について, 水理講演会講演集, 第18回 (1974)
- 5) D. H. Keuning; Application of Finite Element Method to Open Channel Flow, ASCE, HY4 (1976)
- 6) R. L. Cooley and S. A. Moin; Finite Element Solution of Saint-Venant Equations, ASCE, HY6 (1976)
- 7) 荒木, 富所, 高木; 合流部の段波に関する研究, 信州大学工学部紀要, 第47号へ投稿予定
- 8) 高木; 合流部の段波に関する研究, 信州大学修士論文 (1979)
- 9) 岩佐; 開水路流れの基礎理論, 水工学に関する夏期研修会講義集・Aコース, 土木学会水理委員会 (1964)
- 10) 伊藤編; 数値計算の応用と基礎, アテネ出版 (1971)
- 11) O. C. Zienkiewicz; The Finite Element Method, McGraw-Hill (1977)
- 12) 奥村監訳; 流体解析への有限要素法の応用, サイエンス社 (1978)
- 13) 川原, 大森; 平均型2段階ラックスウエンドロップ有限要素法について, 土木学会年次学術講演会, 第32回 (1977)

14) 土木学会編；水理公式集，土木学会 (1971)

15) 井上，岩佐，平岡；水理実験による不定流の数値計算法の検討，土木学会年次学術講演会，第31回 (1976)