

ギヤホブ二番面の軸断面輪郭について

両角宗晴*
(昭和50年10月20日受理)

On the Axial Profile of the Relieved Tooth Flank of Gear Hob

Muneharu MOROZUMI

This report deals with the change of axial profile of gear hob owing to the radius reduction made by the successive axial sections of relieved tooth flank of gear hob ground into radial relief with a cone-shaped grinding wheel.

At the successive axial sections of the relieved tooth flank of gear hob, both the outside diameter and the pitch circle diameter of the gear hob become smaller.

As the result, the change of axial profile of gear hob is produced.

To begin with, the theoretical formulas to calculate the axial profile of the relieved tooth flank of gear hob are derived by an analytical method, but these rigorous equations are so complicated that numerical calculations are very troublesome.

In order to make practical calculations easier, approximate formulas to calculate the axial pressure angle at the pitch point and the deviation from the tangent of the profile on an axial section of the relieved tooth flank of the gear hob are also derived by an analytical method, and the accuracy of the approximate formulas is numerically estimated comparing their solutions with the exact theoretical ones.

Finally some numerical examples are given for the purpose of facilitating the application of this thesis.

1 緒 言

ホブの二番面が正しく研削されているかどうかを測定するには、ホブを旋盤のセンタ間に支持し、工具台に取付けられたスモールテストの測定子先端をホブの軸心の高さにセットし、その測定子先端をホブ二番面に接触させ、工具台をねじ面の軸断面圧力角に等しい角度旋回させて、測定子先端を二番面の軸断面輪郭のピッチ点における接線方向に送り、

* 精密工学教室 教授

Table 1 Nomenclature

$\alpha (\alpha')$: Axial pressure angle (at pitch point), right (left)
α_n	: Cutter pressure angle
$\alpha_G (\alpha_G')$: Conical base angle of grinding wheel, right (left)
β_c	: Lead angle of hob thread (on the pitch cylinder)
β_c''	: Lead angle of hob gash
b	: Center distance between hob and wheel axis
γ_{ia}	: Rake angle of cutting face (at outside radius of hob)
γ_{ic}	: Rake angle of cutting face (at pitch circle radius of hob)
γ_{ja}	: Peripheral relief angle of hob
γ_{jc}	: Relief angle of hob (at pitch circle radius of hob)
$\delta_t (\delta_t')$: Deviation from a tangent at pitch point of the profile on axial section of relieved tooth flank of hob, right (left)
δ_a	: $\left(= \frac{\Delta R_a}{R_c} \right)$
Δ	: $\left(= \frac{R - R_c}{R_c} \right)$
θ, Θ, φ	: Positioning angle
k	: Coefficient of relief amount
m_n	: Normal module
N	: Number of threads in hob
N''	: Number of gashes
R, R_a, R_c	: Any, outside and pitch circle radius of hob
ΔR_a	: Radius reduction made by resharpening of hob
ρ	: Any radius of grinding wheel
ρ_c	: Pitch circle radius of grinding wheel
S	: Cam lift mm/cam revolution
τ	: Angle of resharpening of hob

二番面の軸断面輪郭の軸断面圧力角と直線からの偏倚を測定し、この測定値を理想的軸断面輪郭の計算値と比較して歯形の狂いを求めることができる。本論文は直線輪郭の紡錘形といしで半径方向に二番研削されたギヤホブの二番面の軸断面輪郭を計算するための厳密な理論式と、計算を容易にするための実用計算式を解析的に導き、1条ホブと3条ホブの数値例を与え、この実用計算式の誤差の評価を行ない、さらに実際に二番面の測定を行なって理論の正しいことを確かめた。表1は本論文に使用する記号の説明である。

2 解析理論

2.1 厳密理論式

表2はホブの設計製作に必要な諸元と計算式を示す。正しいインポリュートギヤホブの切削を与えるための二番研削といしの輪郭は、すでに筆者により理論的に明らかにされているが¹⁾、ここではといしの角度のみ正しく与え、といしの輪郭は直線輪郭とする。さて図1に示すごとく、ホブ軸をz軸とするホブに固着のx,y,z座標軸と、といし軸をZ₀軸

Table 2 Necessary specifications for designing

Specification	$m_n, \alpha_n, 2R_a, N, N'', \gamma_{ia}, \gamma_{ja}$
Radius of pitch circle	$R_c = R_a - 1.25m_n$
Lead angle	$\sin \beta_c = \frac{m_n N}{2R_c}$
Lead angle of hob gash	$\begin{cases} \beta_c'' = 90^\circ - \beta_c & (\beta_c > 3^\circ) \\ \beta_c'' = 90^\circ & (\beta_c \leq 3^\circ) \end{cases}$
Rake angle of cutting face	$\sin \gamma_{ic} = \frac{R_a}{R_c} \cdot \sin \gamma_{ia}$
Coefficient of relief amount	$k = \frac{N'' S (1 + \tan \beta_c \cot \beta_c'')}{2\pi}$
Peripheral relief angle	$\tan \gamma_{ja} = \frac{k}{R_a}, \tan \gamma_{jc} = \frac{k}{R_c} = \tan \gamma_{ja} \times \frac{R_a}{R_c}$
Radius reduction	$\Delta R_a = \frac{\pi k \tau (\text{degree})}{180}$

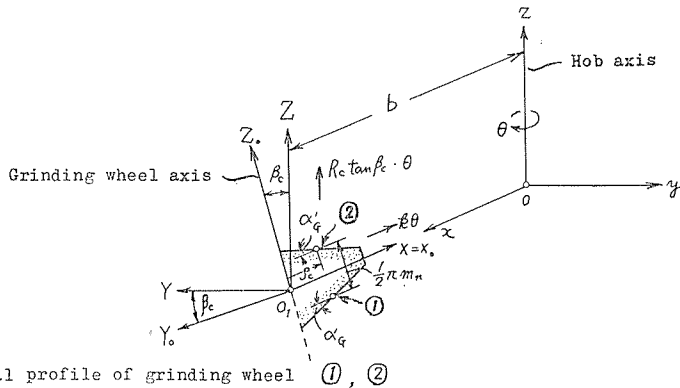


Fig. 1 Grinding method of side tooth flank of hob by grinding wheel

とするといしに固着の $X_0 Y_0 Z_0$ 座標軸を定め、 z 軸と Z_0 軸との距離を b とし、 z 軸と Z_0 軸とは β_c なる角をなしている。 $X_0 Y_0 Z_0$ 座標系により、直線輪郭の紡錘形二番研削といし面を表わすと

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= \rho \cos \theta, \\ Y_0 &= \rho \sin \theta, \\ Z_0 &= \mp \left\{ \frac{1}{4} \pi m_n + (\rho_c - \rho) \tan \alpha_G \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ただし複号はといし面①, ②の順とする。

はじめ、といし軸とホブ軸とは b なる距離にあったものが、ホブが負方向に θ 回転したとき、二番研削といしは $k\theta$ ホブ軸に近付き、しかもホブ軸方向に $R_c \tan \beta_c \cdot \theta$ だけ移動

する。しかるときは、ホブに固着の $x y z$ 座標軸に対して、といし面は次式のごとき二番研削といし面群を形成する。

$$\left. \begin{aligned} x &= \{(b - k\theta) - \rho \cos \theta\} \cos \theta \\ &\quad + \left[\rho \sin \theta \cos \beta_c \mp \left\{ \frac{1}{4} \pi m_n + (\rho_c - \rho) \tan \alpha_G \right\} \sin \beta_c \right] \sin \theta, \\ y &= \{(b - k\theta) - \rho \cos \theta\} \sin \theta \\ &\quad - \left[\rho \sin \theta \cos \beta_c \mp \left\{ \frac{1}{4} \pi m_n + (\rho_c - \rho) \tan \alpha_G \right\} \sin \beta_c \right] \cos \theta, \\ z &= -\rho \sin \theta \sin \beta_c \mp \left\{ \frac{1}{4} \pi m_n + (\rho_c - \rho) \tan \alpha_G \right\} \cos \beta_c + R_c \tan \beta_c \cdot \theta. \end{aligned} \right\} (2)$$

$$\text{ただし } b = R_c + \rho_c.$$

この曲面群の包絡面を求めれば、ホブ二番ねじ面が得られる。それには次の条件式と(2)式より、 ρ , θ , Θ のうちのいずれか一つを消去すればよい。すなわち

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \Theta} & \frac{\partial y}{\partial \Theta} & \frac{\partial z}{\partial \Theta} \end{vmatrix} = 0,$$

この条件式を(2)式について計算し、次式を得る。

$$\begin{aligned} \rho &= \left(\frac{1}{4} \pi m_n \cot \alpha_G + \rho_c \right) \sin^2 \alpha_G - k\theta \cos^2 \alpha_G \sec \theta \\ &\quad \pm k\theta \sin \alpha_G \cos \alpha_G \tan \theta \cot \beta_c + \rho_c \cos^2 \alpha_G \sec \theta \\ &\quad \mp b \sin \alpha_G \cos \alpha_G \tan \theta \cot \beta_c \pm k \sin \alpha_G \cos \alpha_G \operatorname{cosec} \beta_c \\ &\quad \mp R_c \sin \alpha_G \cos \alpha_G \tan \theta \tan \beta_c. \end{aligned} \quad (3)$$

この ρ を(2)式の曲面群の方程式に代入して ρ を消去すれば、二番面の方程式が得られるのである。したがって右ねじれの二番面は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos \varphi, \\ y &= R \sin \varphi, \\ z &= -\rho \sin \theta \sin \beta_c \mp \left\{ \frac{1}{4} \pi m_n + (\rho_c - \rho) \tan \alpha_G \right\} \cos \beta_c + R_c \tan \beta_c \cdot \theta. \end{aligned} \right\} (4)$$

ただし

$$R^2 = (b - k\theta - \rho \cos \theta)^2 + \left[\rho \sin \theta \cos \beta_c \mp \left\{ \frac{1}{4} \pi m_n + (\rho_c - \rho) \tan \alpha_G \right\} \sin \beta_c \right]^2, \quad (5)$$

$$\tan \varphi = \frac{(b - k\theta - \rho \cos \theta) \sin \theta}{(b - k\theta - \rho \cos \theta) \cos \theta} - \frac{\left[\rho \sin \theta \cos \beta_c \mp \left\{ \frac{1}{4} \pi m_n + (\rho_c - \rho) \tan \alpha_G \right\} \sin \beta_c \right] \cos \theta}{\left[\rho \sin \theta \cos \beta_c \mp \left\{ \frac{1}{4} \pi m_n + (\rho_c - \rho) \tan \alpha_G \right\} \sin \beta_c \right] \sin \theta}, \quad (6)$$

ρ は (3) 式で表わす.

すなわち, ρ は θ と θ の関数であり, θ と θ はそれぞれ R と φ の関数であるから, x , y , z は R と φ をパラメータとして二番面を表わすのである. 二番研削といし面上の半径 ρ_c なる円が二番取り運動をして, ホブの二番ピッチ曲線を作り出すが, この二番ピッチ曲線が, 半径 $(R_c - \Delta R a)$ なるホブの円筒面と交わる点を考え, といし面①と②に対するその点をそれぞれ A , B とし, この円筒面上で A 点と B 点を通る左ねじれの螺旋線を考え, この螺旋線上で A と B の中点を C とし, C 点の偏角を φ_c , z 座標を z_c とする. いま図 2 に示すごとく, x_1 軸が C 点を通るように定める. しかるときは次式が成立する.

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= x \cos \varphi_c + y \sin \varphi_c, \\ y_0 &= -x \sin \varphi_c + y \cos \varphi_c, \\ z_0 &= z. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_0 = x \cos \varphi_c + y \sin \varphi_c, \\ y_1 &= y_0 = -x \sin \varphi_c + y \cos \varphi_c, \\ z_1 &= z_0 - z_c = z - z_c. \end{aligned} \right\}$$

故に

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= R \cos (\varphi - \varphi_c), \\ y_1 &= R \sin (\varphi - \varphi_c), \\ z_1 &= z - z_c. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

いま $y_1 = 0$ とすると ($x_1 z_1$ 平面による切断) $\varphi = \varphi_c$ となり

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= R, \\ z_1 &= z_{\varphi=\varphi_c} - z_c. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

図 3 に示すごとく軸断面輪郭上で, 半径が $R_c - \Delta R a$ なる点を原点とし, x_1 , z_1 座標軸に平行な ξ , η 座標軸を考え, この ξ , η 座標軸で (8) 式を表わせば

$$\left. \begin{aligned} \xi &= R - (R_c - \Delta R a), \\ \eta &= z_{\varphi=\varphi_c} - z_{\varphi=\varphi_c} \\ &\quad R = R_c - \Delta R a. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

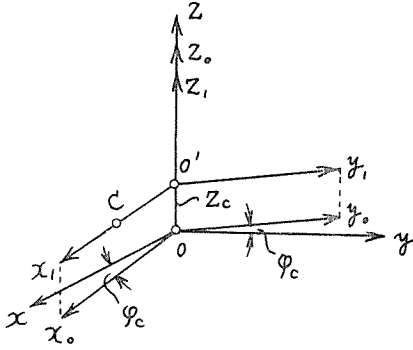


Fig. 2 Co-ordinate systems

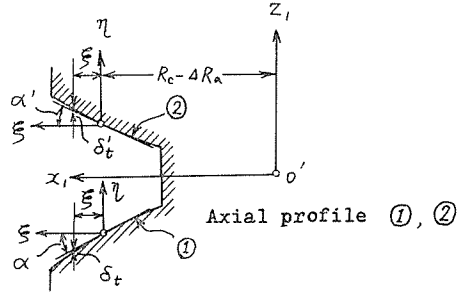


Fig. 3 Axial profile of relieved tooth flank

さて φ_c を求めるには、まず (3) 式で $\rho = \rho_c$ とおき、これより θ を求めると次式を得る。

$$\theta = \frac{\rho_c}{k} + \frac{R_c \tan \alpha_G \tan \theta \sec \beta_c \operatorname{cosec} \beta_c - \tan \alpha_G \left(k \operatorname{cosec} \beta_c \pm \frac{1}{4} \pi m_n \right) \pm \rho_c}{k (\tan \alpha_G \tan \theta \cot \beta_c \mp \sec \theta)}. \quad (10)$$

(5) 式で $\rho \rightarrow \rho_c$, $R \rightarrow (R_c - \Delta R_a)$, $\theta = (10)$ 式, とおき次式を得る。

$$\left\{ \frac{\cos \theta \left(k \operatorname{cosec} \beta_c \pm \frac{1}{4} \pi m_n \right) - \rho_c \sin \theta \cos \theta \cot \beta_c - R_c \sin \theta \tan \beta_c \mp R_c \cot \alpha_G}{\sin \theta \cot \beta_c \mp \cot \alpha_G} \right\}^2 + \left(\rho_c \sin \theta \cos \beta_c \mp \frac{1}{4} \pi m_n \sin \beta_c \right)^2 - (R_c - \Delta R_a)^2 = 0. \quad (11)$$

この (11) 式を満足する θ を求め、この θ を (10) 式に代入して θ を求め、この θ と θ および ρ_c を (6) 式に代入して、 φ_A と φ_B を求め、次式から φ_c を求める。

$$\varphi_c = \frac{1}{2} (\varphi_A + \varphi_B). \quad (12)$$

つぎに (3) 式の ρ を (5) 式に代入したものを

$$F(R, \theta, \vartheta) = 0 \quad (13)$$

とし、(13) 式で R の値を定めれば

$$G(\theta, \vartheta) = 0 \quad (14)$$

となる。つぎに (3) 式の ρ と (12) 式の φ_c を (6) 式に代入したものを

$$H(\theta, \vartheta) = 0 \quad (15)$$

とし(14)式と(15)式の連立により θ と Θ を求め、この θ と Θ を(4)式の z に代入すれば、 $z_{\varphi=\varphi_c}$ が得られる。なお(13)式の R を $R \rightarrow (R_c - \Delta R a)$ としたときの(14)式と、(15)式とを連立させて得られる θ と Θ を式(4)の z に代入すれば、 $z_{\varphi=\varphi_c}$ が得られる。この $z_{\varphi=\varphi_c}$ と $z_{\varphi=\varphi_c}$ を(9)式に代入して ξ 、 η を求めれば、これがホブ二番面の外半径が $R a$ より $\Delta R a$ 小さくなった軸断面輪郭を表わすのである。以上の方法により電子計算機を用いてホブ二番面の軸断面輪郭を計算することができる。

2.2 実用計算式の誘導

以上の方法でホブ二番面の軸断面輪郭を計算することは非常に厄介である。そこで二番面の軸断面輪郭を計算するための実用計算式を求める。すなわち、(5)式に(3)式の ρ を代入し、これを $R c^2$ で除し、 $\sin \beta_c = s_c$ 、 $\frac{k}{R c} = k$ 、 $\sin^2 \alpha_G = t$ 、 $\frac{R - R_c}{R c} = \Delta$ とおき、

これらおよび $\frac{m_n}{R c}$ 、 θ 、 Θ をすべて一次の微小値(0.1程度の大きさ)とし、

$\frac{b}{R c} = \frac{R c + \rho_c}{R c} = 1 + \frac{\rho_c}{R c} = B$ は零次の微小値とし、 Θ のべき級数に変形し、5次の微小項まで求めて次式を得る。

$$a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + a_3\theta^3 + a_4\theta^4 + a_5\theta^5 + a_6\theta^6 + \dots = 0. \quad (16)$$

ただし $a_0 = \left(\frac{1}{2}\text{次の微小項}\right) + (1\text{次の微小項}) + \dots + (5\text{次の微小項})$,

$$a_1 = \left(-\frac{1}{2}\text{次の微小項}\right) + (0\text{次の微小項}) + \dots + (4\text{次の微小項}),$$

$$a_2 = (-1\text{次の微小項}) + \left(-\frac{1}{2}\text{次の微小項}\right) + \dots + (3\text{次の微小項}),$$

$$a_3 = \left(-\frac{1}{2}\text{次の微小項}\right) + (0\text{次の微小項}) + \dots + (2\text{次の微小項}),$$

$$a_4 = (-1\text{次の微小項}) + \left(-\frac{1}{2}\text{次の微小項}\right) + \dots + (1\text{次の微小項}),$$

$$a_5 = \left(-\frac{1}{2}\text{次の微小項}\right) + (0\text{次の微小項}),$$

$$a_6 = (-1\text{次の微小項}).$$

この式から θ を $(1\text{次の微小項}) + \left(1\frac{1}{2}\text{次の微小項}\right) + \dots + \left(5\frac{1}{2}\text{次の微小項}\right)$ まで求め、これを次式のように表わす。

$$\Theta = \Theta(\Delta, \theta). \quad (17)$$

つぎに(3)式の ρ を(6)式に代入し、さらに式中の Θ に(17)式の Θ を代入し、 $4\frac{1}{2}$ 次の微小項まで求め、 θ について整理して次式を得る。

$$b_0 + b_1\theta + b_2\theta^2 + b_3\theta^3 + b_4\theta^4 + \cdots = 0. \quad (18)$$

ただし $b_0 = (1 \text{ 次の微小項}) + (1\frac{1}{2} \text{ 次の微小項}) + \cdots + (4\frac{1}{2} \text{ 次の微小項}),$

$$b_1 = (0 \text{ 次の微小項}) + (\frac{1}{2} \text{ 次の微小項}) + \cdots + (3\frac{1}{2} \text{ 次の微小項}),$$

$$b_2 = (1 \text{ 次の微小項}) + (1\frac{1}{2} \text{ 次の微小項}) + \cdots + (2\frac{1}{2} \text{ 次の微小項}),$$

$$b_3 = (0 \text{ 次の微小項}) + (\frac{1}{2} \text{ 次の微小項}) + (1 \text{ 次の微小項}),$$

$$b_4 = (1 \text{ 次の微小項}).$$

これより θ を $(1 \text{ 次の微小項}) + (1\frac{1}{2} \text{ 次の微小項}) + \cdots + (4\frac{1}{2} \text{ 次の微小項})$ まで求め、これを次式のように表わす。

$$\theta = \theta(\Delta, \varphi). \quad (19)$$

つぎに(17)式中の θ に(19)式の θ を代入し、 θ を $(1 \text{ 次の微小項}) + (1\frac{1}{2} \text{ 次の微小項}) + \cdots + (5\frac{1}{2} \text{ 次の微小項})$ まで求めると

$$\theta = \theta(\Delta, \varphi). \quad (20)$$

つぎに(3)式の ρ を R_c で除し、式中の θ には(19)式、 θ には(20)式を代入し、 ρ/R_c を $(0 \text{ 次の微小項}) + (\frac{1}{2} \text{ 次の微小項}) + \cdots + (5 \text{ 次の微小項})$ まで求めると

$$\rho/R_c = \rho/R_c(\Delta, \varphi). \quad (21)$$

さて式(4)の z を R_c で除し、式中の θ には式(19)、 θ には式(20)、 ρ/R_c には式(21)を代入し、 z/R_c を $(1 \text{ 次の微小項}) + (1\frac{1}{2} \text{ 次の微小項}) + \cdots + (5\frac{1}{2} \text{ 次の微小項})$ まで求めると

$$z/R_c = z/R_c(\Delta, \varphi). \quad (22)$$

さて式(21)において、 $\rho/R_c \rightarrow \rho_c/R_c = \frac{b - R_c}{R_c} = B - 1$ とおき、さらに

$$\Delta \left(= \frac{R - R_c}{R_c} \right) \rightarrow \frac{(R_c - \Delta R_a) - R_c}{R_c} = -\frac{\Delta R_a}{R_c} = -\delta a \quad (\text{この } \delta a \text{ は } 2 \text{ 次の微小値}),$$

とおきこれより φ_A と φ_B を 5 次の微小項まで求め、(12)式から φ_c を 5 次の微小項まで求めると

$$\varphi_c = \varphi_c \left(k, s_c, t, \frac{m_n}{R_c}, \delta_a, B \right). \quad (23)$$

つぎに (22) 式中の φ に (23) 式の φ_c を代入して

$$z/R_c \varphi = \varphi_c = f \left(\Delta, k, s_c, t, \frac{m_n}{R_c}, \delta_a, B \right). \quad (24)$$

(24) 式中の Δ を $\Delta \rightarrow -\delta_a$ とすれば

$$z/R_c \varphi = \varphi_c \Big|_{R=R_c-\Delta R_a} = g \left(\delta_a, k, s_c, t, \frac{m_n}{R_c}, \delta_a, B \right). \quad (25)$$

(9) 式に (24) 式と (25) 式を代入して次式を得る.

$$\left. \begin{aligned} \xi/R_c &= \Delta + \delta_a, \\ \eta/R_c &= \mp (c_1 \Delta + c_2 \Delta^2 + c_3 \Delta^3 + c_4 \Delta^4 + \dots). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

ただし $c_1 = \left(\frac{1}{2} \text{次の微小項} \right) + (1 \text{次の微小項}) + \dots + \left(4\frac{1}{2} \text{次の微小項} \right)$,

$c_2 = \left(1\frac{1}{2} \text{次の微小項} \right) + (2 \text{次の微小項}) + \dots + \left(3\frac{1}{2} \text{次の微小項} \right)$,

$c_3 = \left(1\frac{1}{2} \text{次の微小項} \right) + (2 \text{次の微小項}) + \left(2\frac{1}{2} \text{次の微小項} \right)$,

$c_4 = 1\frac{1}{2} \text{次の微小項}$.

これより Δ を消去すると

$$\begin{aligned} \eta/R_c &= \mp \left[\sqrt{t} \left\{ 1 + \frac{1}{2} t \pm \left(1 - \frac{1}{B} \right) \frac{k s_c}{\sqrt{t}} + \frac{3}{8} t^2 + \frac{1}{2} s_c^2 - \frac{1}{2} k^2 - \frac{\pi}{4B} \frac{m_n}{R_c} \frac{s_c^2}{\sqrt{t}} \right. \right. \\ &\quad \mp \frac{1}{B} \sqrt{t} k s_c - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{B} \right)^3 \frac{k^2 s_c^2}{t} - \frac{1}{4} t k^2 + \frac{5}{16} t^3 + \frac{1}{4} t s_c^2 - \left(1 - \frac{1}{B} \right) \frac{s_c^2}{t} \delta_a \\ &\quad \pm \left(2 - \frac{1}{B^2} \right) \frac{k s_c \delta_a}{\sqrt{t}} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2B} \right) s_c^2 \delta_a - k^2 \delta_a \left. \right\} \left(\frac{\xi}{R_c} \right) \\ &\quad + \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2B} \right) \frac{s_c^2}{\sqrt{t}} \mp k s_c + \frac{1}{2} \sqrt{t} k^2 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4B} \right) \sqrt{t} s_c^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2B^2} \right) \frac{s_c^2 \delta_a}{\sqrt{t}} \mp 2 k s_c \delta_a + \sqrt{t} k^2 \delta_a + \sqrt{t} k^2 \delta_a \right\} \left(\frac{\xi}{R_c} \right)^2 \\ &\quad \left. + \left(-\frac{1}{2} \frac{s_c^2}{\sqrt{t}} \pm k s_c - \frac{1}{2} \sqrt{t} k^2 \right) \left(\frac{\xi}{R_c} \right)^3 \right]. \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{しかるに } \sqrt{t} &= \sin \alpha_G = \tan \alpha_G \cos \alpha_G = \tan \alpha_G (1 - \sin^2 \alpha_G)^{\frac{1}{2}} \\ &\doteq \tan \alpha_G \left(1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{16}t^3 - \frac{5}{128}t^4 \dots \right). \end{aligned}$$

この関係を(27)式に代入すると

$$\begin{aligned} \eta/Rc &= \mp \left[\tan \alpha_G \left\{ 1 \pm \left(1 - \frac{1}{B} \right) \frac{kSc}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2}Sc^2 - \frac{1}{2}k^2 \mp \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{B} \right) \sqrt{t} kSc \right. \right. \\ &\quad - \frac{\pi}{4B} \frac{m_n}{Rc} \frac{Sc^2}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{B} \right)^3 \frac{k^2 Sc^2}{t} - \left(1 - \frac{1}{B} \right) \frac{Sc^2}{t} \delta a \pm \left(2 - \frac{1}{B^2} \right) \frac{kSc \delta a}{\sqrt{t}} \\ &\quad + Sc^2 \delta a - k^2 \delta a \left\} \left(\frac{\xi}{Rc} \right) + \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{B} \right) \frac{Sc^2}{\sqrt{t}} \mp kSc + \frac{1}{2} \sqrt{t} k^2 \right. \\ &\quad - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{3}{B} \right) \sqrt{t} Sc^2 + \frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{B^2} \right) \frac{Sc^2 \delta a}{\sqrt{t}} \mp 2kSc \delta a + \sqrt{t} kSc \delta a \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{t} k^2 \delta a \right\} \left(\frac{\xi}{Rc} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \frac{Sc^2}{\sqrt{t}} \pm kSc - \frac{1}{2} \sqrt{t} k^2 \right) \left(\frac{\xi}{Rc} \right)^3 \right]. \quad (28) \end{aligned}$$

故に図3に示す新しいピッチ点における軸断面圧力角 $\alpha(\alpha')$ は次式から計算される。

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \tan \alpha_G \left[1 \pm \left(1 - \frac{Rc}{b} \right) \frac{k}{Rc} \frac{\sin \beta_c}{\sin \alpha_G} + \frac{1}{2} \sin^2 \beta_c - \frac{1}{2} \left(\frac{k}{Rc} \right)^2 \right. \\ (\tan \alpha') &\quad \mp \frac{1}{2} \left(1 + \frac{Rc}{b} \right) \frac{k}{Rc} \sin \alpha_G \sin \beta_c - \frac{\pi}{4b} m_n \frac{\sin^2 \beta_c}{\sin \alpha_G} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{Rc}{b} \right)^3 \left(\frac{k}{Rc} \right)^2 \frac{\sin^2 \beta_c}{\sin^2 \alpha_G} - \left\{ \left(1 - \frac{Rc}{b} \right) \frac{\sin^2 \beta_c}{\sin^2 \alpha_G} \right. \\ &\quad \left. \mp \left(2 - \frac{Rc^2}{b^2} \right) \frac{k}{Rc} \frac{\sin \beta_c}{\sin \alpha_G} - \sin^2 \beta_c + \left(\frac{k}{Rc} \right)^2 \right\} \frac{\Delta Ra}{Rc} \left. \right]. \quad (29) \end{aligned}$$

そして新しいピッチ点における接線からの軸方向輪郭偏倚 $\delta_t(\delta_t')$ は

$$\begin{aligned} \text{中凸 } \frac{\delta_t(\mu)}{(\delta_t')} &= 1000 \left[\left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{Rc}{b} \right) \frac{\sin^2 \beta_c}{\sin \alpha_G} \mp \frac{k}{Rc} \sin \beta_c + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{Rc} \right)^2 \sin \alpha_G \right. \right. \\ &\quad - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{3Rc}{b} \right) \sin \alpha_G \sin^2 \beta_c + \left\{ \frac{1}{2} \left(3 - \frac{Rc^2}{b^2} \right) \frac{\sin^2 \beta_c}{\sin \alpha_G} \mp 2 \frac{k}{Rc} \sin \beta_c \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{k}{Rc} \sin \alpha_G \sin \gamma_{ic} + \left(\frac{k}{Rc} \right)^2 \sin \alpha_G \right\} \frac{\Delta Ra}{Rc} \right] \frac{\xi^2}{Rc} - \left\{ \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \beta_c}{\sin \alpha_G} \right. \\ &\quad \left. \mp \frac{k}{Rc} \sin \beta_c + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{Rc} \right)^2 \sin \alpha_G \right\} \frac{\xi^3}{Rc^2} \left. \right]. \quad (30) \end{aligned}$$

しかるに歯直角圧力角が α_n になるための二番研削といしの角度 α_G (α_G') は次式から求められる²⁾。

$$\begin{aligned} \tan \alpha_G = \tan \alpha_G' &= \tan \alpha_n \left\{ 1 \mp \left(1 - \frac{R_c}{b} \right) \frac{k}{R_c} \frac{\sin \beta_c}{\sin \alpha_n} + \frac{k}{R_c} \sin \gamma_{ic} + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{R_c} \right)^2 \right. \\ &\quad \mp \frac{k}{R_c} \sin \alpha_n \cos \beta_c'' \pm \frac{1}{2} \left(1 + \frac{R_c}{b} \right) \frac{k}{R_c} \sin \alpha_n \sin \beta_c \\ &\quad \left. + \frac{\pi m_n \sin^2 \beta_c}{4b \sin \alpha_n} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R_c}{b} \right)^3 \left(\frac{k}{R_c} \right)^2 \frac{\sin^2 \beta_c}{\sin^2 \alpha_n} \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

そして(27)式中の t は $t = \sin^2 \alpha_G$ であり, $t_n = \sin^2 \alpha_n$ とすると,

$$\begin{aligned} \sqrt{t} &= \sqrt{t_n} \left\{ 1 \mp \left(1 - \frac{1}{B} \right) \frac{k s_c}{\sqrt{t_n}} + \frac{1}{2} k^2 + k g + \dots \right\}, \\ t &= t_n \left\{ 1 \mp \left(2 - \frac{2}{B} \right) \frac{k s_c}{\sqrt{t_n}} + k^2 + 2k g + \dots \right\}, \\ \frac{1}{\sqrt{t}} &= \frac{1}{\sqrt{t_n}} \left\{ 1 \pm \left(1 - \frac{1}{B} \right) \frac{k s_c}{\sqrt{t_n}} - \frac{1}{2} k^2 - k g + \dots \right\}. \end{aligned}$$

これらの関係を(27)式に代入して次式を得る。

$$\begin{aligned} \eta/R_c &= \mp \left[\tan \alpha_n \left\{ 1 + \frac{1}{2} s_c^2 + k g \mp \sqrt{t_n} k g_c - \left(1 - \frac{1}{B} \right) \frac{s_c^2}{t_n} \delta a \right. \right. \\ &\quad \left. \pm \left(2 - \frac{1}{B^2} \right) \frac{k s_c \delta a}{\sqrt{t_n}} + s_c^2 \delta a - k^2 \delta a \right\} \left(\frac{\xi}{R_c} \right) \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{B} \right) \frac{s_c^2}{\sqrt{t_n}} \mp k s_c + \frac{1}{2} \sqrt{t_n} k^2 - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{3}{B} \right) \sqrt{t_n} s_c^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{B^2} \right) \frac{s_c^2 \delta a}{\sqrt{t_n}} \mp 2k s_c \delta a + \sqrt{t_n} k g \delta a + \sqrt{t_n} k^2 \delta a \right\} \left(\frac{\xi}{R_c} \right)^2 \\ &\quad \left. + \left(-\frac{1}{2} \frac{s_c^2}{\sqrt{t_n}} \pm k s_c - \frac{1}{2} \sqrt{t_n} k^2 \right) \left(\frac{\xi}{R_c} \right)^3 \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

この式から, 図3に示す新しいピッチ点における軸断面圧力角 α (α') は次式から計算される。

$$\begin{aligned} \tan \alpha = \tan \alpha' &= \tan \alpha_n \left[1 + \frac{1}{2} \sin^2 \beta_c + \frac{k}{R_c} \sin \gamma_{ic} \mp \frac{k}{R_c} \sin \alpha_n \cos \beta_c'' \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \left(1 - \frac{R_c}{b} \right) \frac{\sin^2 \beta_c}{\sin^2 \alpha_n} \mp \left(2 - \frac{R_c^2}{b^2} \right) \frac{k}{R_c} \frac{\sin \beta_c}{\sin \alpha_n} \right. \right. \end{aligned}$$

$$- \sin^2 \beta_c + \left(\frac{k}{R_c} \right)^2 \left. \frac{\Delta R_a}{R_c} \right]. \quad (33)$$

また新しいピッチ点における接線からの軸方向偏倚 $\delta_t(\delta_t')$ は

$$\begin{aligned} \text{中凸 } \frac{\delta_t(\mu)}{(\delta_t')} = 1000 & \left[\left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{R_c}{b} \right) \frac{\sin^2 \beta_c}{\sin \alpha_n} \mp \frac{k}{R_c} \sin \beta_c + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{R_c} \right)^2 \sin \alpha_n \right. \right. \\ & - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{3R_c}{b} \right) \sin \alpha_n \sin^2 \beta_c + \left. \left. \left\{ \frac{1}{2} \left(3 - \frac{R_c^2}{b^2} \right) \frac{\sin^2 \beta_c}{\sin \alpha_n} \mp 2 \frac{k}{R_c} \sin \beta_c \right. \right. \right. \\ & + \left. \left. \frac{k}{R_c} \sin \alpha_n \sin \gamma_{ic} + \left(\frac{k}{R_c} \right)^2 \sin \alpha_n \right\} \frac{\Delta R_a}{R_c} \right] \frac{\xi^2}{R_c} \\ & \left. - \left[\frac{1}{2} \frac{\sin^2 \beta_c}{\sin \alpha_n} \mp \left(\frac{k}{R_c} \right) \sin \beta_c + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{R_c} \right)^2 \sin \alpha_n \right] \frac{\xi^3}{R_c^2} \right]. \quad (34) \end{aligned}$$

Table 3 Specification for designing the gear hob

	Single thread hob (A)				Triple thread hod (B)			
α_n	20°							
m_n	4							
N	1				3			
N''	10				9			
R_a	40							
R_c	35							
γ_{ia}	0°		10°		0°		10°	
γ_{ja}	11°17'16"				10°27'07"			
β_c	3°16'33"				9°52'15"			
β_c''	86°43'27"				80°07'45"			
b	65							
S	5							
k	7.98381676				7.378819375			
τ	0°	15°	0°	15°	0°	15°	0°	15°
ΔR_a	0	2,090	0	2,090	0	1,932	0	1,932
α_G	20°08'48"		21°02'54"		19°33' 0"		20°20'06"	
α_G'	20°50'48"		21°46'36"		21°27'36"		22°18'42"	
	$\rho_a = 35$				$\rho_c = 30$			

Table 4 Axial pressure angle at pitch point of axial profile of relieved tooth flank

		N = 1 Hob (A)				N = 3 Hob (B)			
		$\gamma_{ia} = 0^\circ$		$\gamma_{ia} = 10^\circ$		$\gamma_{ia} = 0^\circ$		$\gamma_{ia} = 10^\circ$	
		$\tau = 0^\circ$	$\tau = 15^\circ$	$\tau = 0^\circ$	$\tau = 15^\circ$	$\tau = 0^\circ$	$\tau = 15^\circ$	$\tau = 0^\circ$	$\tau = 15^\circ$
α	Calculated value by theoretical formula	19° 56'47"	19° 56'37"	20° 49'25"	20° 49'07"	20° 03'28"	20° 05'05"	20° 49'15"	20° 51'03"
	Calculated value by approximate formula	19° 56'53"	19° 57'07"	20° 46'40"	20° 46'53"	20° 02'35"	20° 05'36"	20° 48'33"	20° 51'33"
α'	Calculated value by theoretical formula	20° 06'47"	19° 57'32"	21° 02'04"	20° 52'47"	20° 31'50"	20° 10'56"	21° 23'59"	21° 03'35"
	Calculated value by approximate formula	20° 06'43"	19° 58'22"	20° 56'24"	20° 48'08"	20° 29'48"	20° 10'52"	21° 15'30"	20° 56'46"

3 数 値 例

表3に1条ホブ(A)と3条ホブ(B)の諸元を示す. 表4はこれらホブの二番ねじ面の軸断面圧力角 α (α')を理論式と近似式で計算した値を示す. この表から, すくい角がつかないホブの場合は, 1条ホブ, 3条ホブのいずれの場合も近似式の計算精度は高いことがわかる. なおすくい角がつく場合でも, 二番ねじ面①に対する α の計算精度は高いが, 二番

$$m_n = 4, \alpha_n = 20^\circ, N = 1, 2R_n = 80, \beta_n = 3^\circ 16' 33''$$

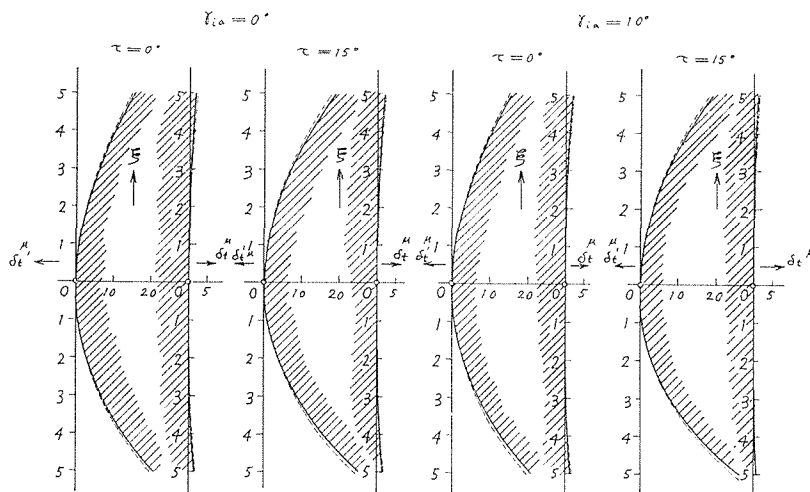


Fig. 4 (a)

Fig. 4 (b)

Deviations from a tangent at pitch point of the profile on axial section of relieved tooth flank of hob

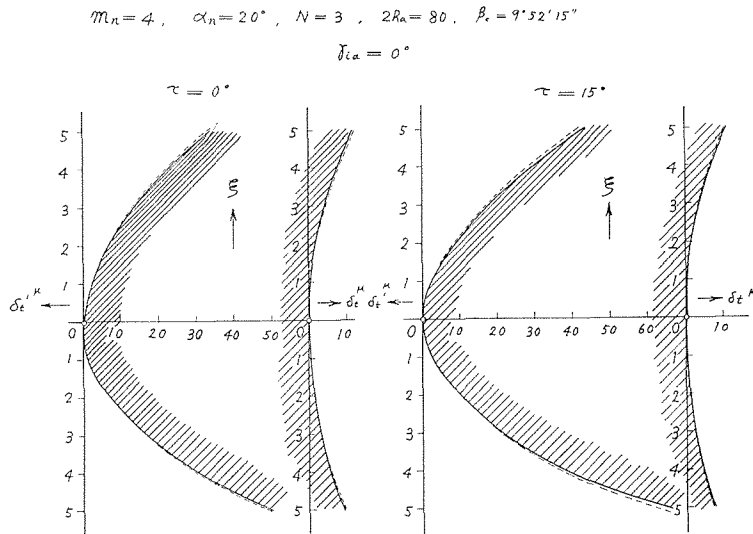


Fig. 5 (a) Deviations from a tangent at pitch point of the profile on axial section of relieved tooth flank of hob

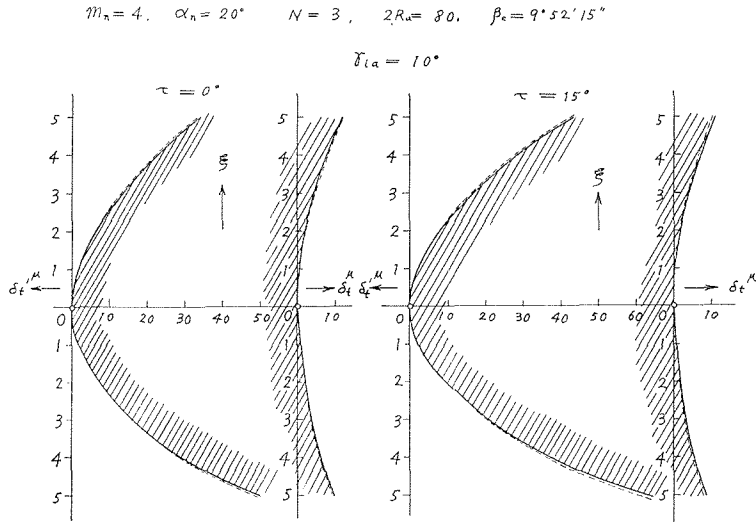


Fig. 5 (b) Deviations from a tangent at pitch point of the profile on axial section of relieved tooth flank of hob

ねじ面②に対する α' の計算精度は少し劣ることがわかる。つぎに二番ねじ面の軸断面輪郭の直線からの偏倚 δt ($\delta t'$) について計算すると、1条ホブ (A) に対しては図4 (a), (b) 3条ホブ (B) に対しては図5 (a), (b) のようになる。図中実線は理論式を電子計算機により計算した値であり、点線は近似式から計算した値を示す。この近似式の計算精度はかな

Table 5 Specification for designing the gear hob

	Single thread hob (C)		Triple thread hob (D)	
α_n	20°			
m_n	3,5		4	
N	1		3	
N''	10		9	
R_a	37,500		41,810	
R_c	33,125		36,810	
γ_{ia}	0°		15°	
γ_{ja}	9°39'41"		9°58'49"	
β_c	3°01'42"		9°22'52"	
β_c''	86°58'18"		80°37'08"	
b	63		67	
S	4		5	
k	6.384015693		7.357450586	
τ	0°	5°	0°	5°
ΔR_a	0	0,557	0	0,642
α_G	20°04'27"		20°41'06"	
α_G'	20°37'19"		22°19'30"	
	$\rho_a = 35$		$\rho_c = 30$	

Table 6 Axial pressure angle at pitch point of axial profile of relieved tooth flank

		$N = 1$ Hob (C)		$N = 3$ Hob (D)	
		$\gamma_{ia} = 0^\circ$		$\gamma_{ia} = 15^\circ$	
		$\tau = 0^\circ$	$\tau = 5^\circ$	$\tau = 0^\circ$	$\tau = 5^\circ$
α	Calculated value by approximate formula	19°57'42"	19°57'48"	21°06'48"	21°07'41"
	Measured value	19°57'	19°54'	21°10'	21°10'
α'	Calculated value by approximate formula	20°05'23"	20°03'35"	21°31' 0"	21°25'45"
	Measured value	20° 0'	19°53'	21°26'	21°25'

$$m_n=3.5, \alpha_n=20^\circ, N=1$$

$$2R_a=75, \beta_c=3^\circ 1' 42''$$

$$\gamma_{i\alpha}=0^\circ$$

$$m_n=4, \alpha_n=20^\circ, N=3$$

$$2R_a=83.62, \beta_c=9^\circ 58' 49''$$

$$\gamma_{i\alpha}=15^\circ$$

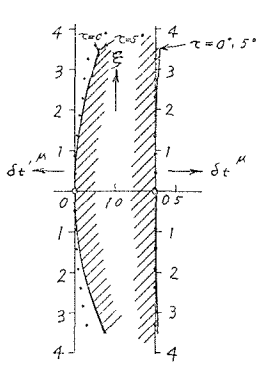


Fig. 6 (a)

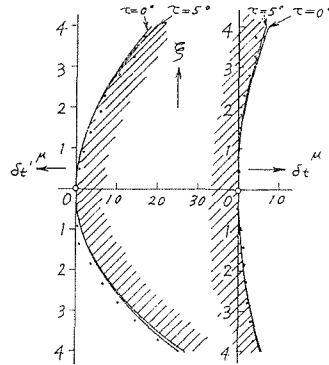


Fig. 6 (b)

Deviations from a tangent at pitch point of the profile on axial section of relieved tooth flank of hob

り高いことがわかる。そして二番ねじ面①は中凹形、二番ねじ面②は中凸形であることがわかる。そしてとき直し角度 $\tau=0^\circ$ に対して $\tau=15^\circ$ のときは二番ねじ面①、②はいずれも中凸化するように変化することがわかる。表5は手持の1条ホブ(C)と、3条ホブ(D)の諸元を示す。表6はこれらギヤホブの軸断面圧力角の近似式による計算値と測定値を示す。両者はかなり近い値を示している。この場合 $\tau=0^\circ$ と $\tau=5^\circ$ について計算と測定を行なっているが、これは紡錘形といしで二番研削されたホブの側面二番面は、 $\tau=6\sim 7^\circ$ 以上の部分は、といしの戻り運動のため完全に二番がとり切れていないので、その最大値として $\tau=5^\circ$ を採用した。なおホブ二番面の軸断面輪郭の測定には、旋盤を用い、モールテストの測定子先端をホブの軸心の高さにセットし、その測定子先端をホブ二番面に接触させ、工具台をねじ面の軸断面圧力角に等しい角度旋回させて測定子先端を二番面の軸断面輪郭のピッチ点における切線方向に送り、直線からの偏倚を測定した。なお角度ゲージをホブ支持のマンドレルの側面におしつけ、測定子先端をゲージ面に沿って走らせ、これより軸断面圧力角 $\alpha(\alpha')$ を測定した。なお二番ねじ面の軸断面輪郭の測定に際し、測定子の先端が鋼球であると、この鋼球の中心がねじの軸平面上にあっても、鋼球とねじ側面との接触点は軸平面上になく、しかもねじの歯先と歯元では、螺線の進み角が異なるので、歯先のとくと、歯元のとくとでは接触点の高さが異なり、そのため鋼球の中心点の移動軌跡を二番ねじ面の軸断面輪郭とした場合、真の軸断面輪郭とは異なるから、測定子の先端を尖がらせて、二番ねじ面とポイントで接触するようにして測定を行なった。図6(a)、(b)はそれぞれ表5の1条ホブ(C)と3条ホブ(D)の軸断面輪郭の直線からの偏倚 $\delta t(\delta t')$ を示す。図中実線は近似式を用いて計算した値であり、黒丸点は測定値を示す。これら測定値はかなり計算値に近い値を示している。

4 結 言

直線輪郭紡錘形といしで半径方向に二番研削されたホブ二番面の軸断面輪郭について解析的考察を行ない、その軸断面圧力角と直線からの偏倚を計算し得る厳密理論式と実用計算式を求め、1条ホブと3条ホブについて厳密理論式を用いて電子計算機で計算した値と、実用計算式から得られた値を比較し、実用計算式はかなり高い精度の式であることを確かめた。さらに実際に測定を行なって理論の正しいことを確かめた。終りに数値計算に助力された八重島公郎、吉田隆、峯村勝の諸氏に感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) 両角宗晴, 岩手大学工学部研究報告. 特別号, (昭28-6), 40.
- 2) 同 上 p. 49.