

斜橋における横げたの配置について

(その1)

山 崎 英 樹*

(昭和43年1月30日受理)

1. ま え が き

斜げた橋においては、その骨組即ち主げたと横げたの組立方法として、

- (1) 主げたに対して横げたを直角に配置する直交構造
- (2) 主げたに対して横げたを斜めに配置する斜交構造（横げたを支承線に平行に配置する）

の二通りの方法があり、従来一般的に直交構造が多く採用されている（註 ほかにも横げたを増して平面的に三角形に組む方法もある。参考文献 4）参照）。このことは次の理由により適当と思われる。(1)弾性的理論研究および実験により直交構造は斜交構造より荷重の横分配効果が大であることが認められている、(2)部材の端部接合が製作上および組立上簡便であるなど。

上記のように弾性的には直交構造が優れているが、構造物のもつ極限の耐力即ち極限荷重を考えた場合どちらの構造がまさっているか明白でないので以下に簡単に計算（二主げた、二横げた格子について）を行い極限荷重の比較をしてみたので報告する次第である。

2. 極 限 荷 重

2.1 ねじりを無視したとき

2.1.1 横げた長さを一定として斜角を変化する場合

a) 斜交構造

図1(a)に示す構造で横げた長さ il とすると主げた間隔は $il \cos r$ であるから斜角 r ($0 \leq r < 90^\circ$) の増大にともない $il \cos r$ は小となる。部材断面の全塑性曲げモーメントを主げたに対して M_0 、横げたに対して jM_0 とし、崩壊機構を図1(b)のように仮定する。図中の○印は塑性ヒンジである。

塑性ヒンジの回転角を θ 、垂直変位を δ とすると、次の関係がある。

$$\theta_a = \delta_c / \frac{3l}{2} = \frac{2}{3l} \delta_c,$$

$$\theta_G = \theta_H = \delta_B / il = \frac{2}{3il} \delta_c.$$

* 土木工学教室、助手

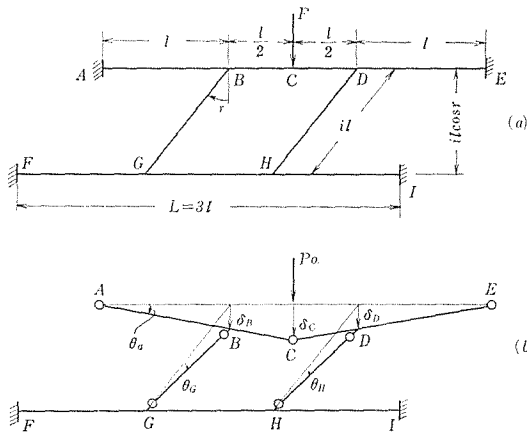


図-1

斜交構造との比較であるから、上界値によって比較することにする。

故に

$$P_0 = \frac{8}{3l} \left(1 + \frac{j}{i}\right) M_0 = 8 \left(1 + \frac{j}{i}\right) \frac{M_0}{L_0} \tag{1}$$

荷重による外力仕事は P_0 を上界値として

$$W_e = P_0 \times \delta_c,$$

内力仕事は

$$W_i = M_0 \times 4\theta_a + jM_0 \times 4\theta_G$$

$$= \frac{8}{3l} \left(1 + \frac{j}{i}\right) \cdot \delta_c \cdot M_0$$

であるから $W_e = W_i$ により極限荷重の上界値が求まる。本来ならば上の機構条件の他に塑性条件、つりあい条件によって真の極限荷重を求めべきであるが、今回は直交構造と

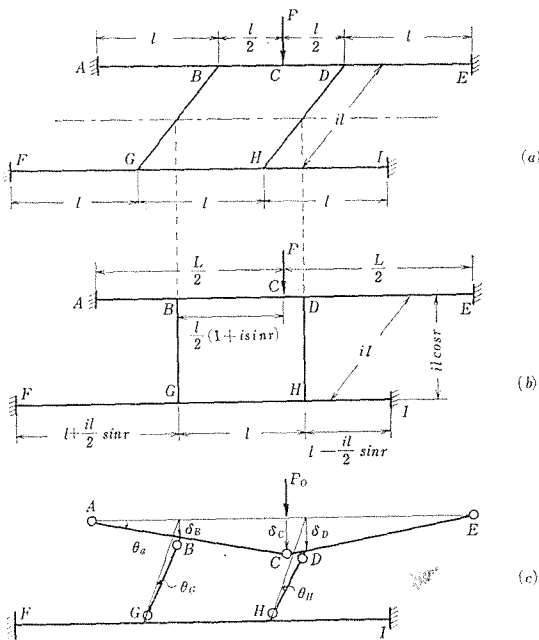


図-2

(1)式よりねじりを無視すれば、横げた長さ一定の場合に極限荷重は斜角に無関係に与えられることがわかる。

b) 直交構造

図-2(a)(b)に斜角 r の時の斜交構造と直交構造を示す。斜角の増大によって、節点 B, D は左方へ移動するが、節点 C, D が一致する限界は $\frac{l}{2}(1 + i \sin r) = l$ 故 $i \sin r = 1$ となり、この式を満足する i の範囲は $i \leq 1$ のときである。したがって $i < 1.0$ のとき節点 C は、節点 B, D の間にあるので、ここでは $i \leq 1.0$ として崩壊機構を図-2(c)とする。

図-2(c)より、塑性ヒンジの回転角と垂直変位の関係は次式のようになる。

$$\theta_a = \frac{2}{3l} \delta_C, \quad \theta_G = \frac{1}{il \cos r} \delta_B = \frac{2 - i \sin r}{3il \cos r} \delta_C,$$

$$\theta_H = \frac{1}{il \cos r} \delta_D = \frac{2 + i \sin r}{3il \cos r} \delta_C.$$

外部仕事は

$$W_e = P_0 \delta_C,$$

内部仕事は

$$W_i = 4\theta_a \cdot M_0 + 2(\theta_G + \theta_H) \cdot jM_0$$

$$= \frac{8}{3l} \left(1 + \frac{j}{i \cos r} \right) M_0 \delta_C,$$

したがって $W_e = W_i$ より

$$P_0 = 8 \left(1 + \frac{j}{i \cos r} \right) \cdot \frac{M_0}{L}. \tag{2}$$

2.1.2 主げた間隔を一定として斜角を変化する場合

a) 斜交構造 (図3-(a))

主げた間隔 il を一定として斜角を変化させる。崩壊機構は図-1 (b) と同様である。横げたの長さは $il/\cos r$ 故

$$\theta_a = \frac{2}{3l} \delta_C, \quad \theta_G = \delta_B/il/\cos r = \frac{2 \cos r}{3il} \delta_C,$$

また $W_e = P_0 \delta_C$,

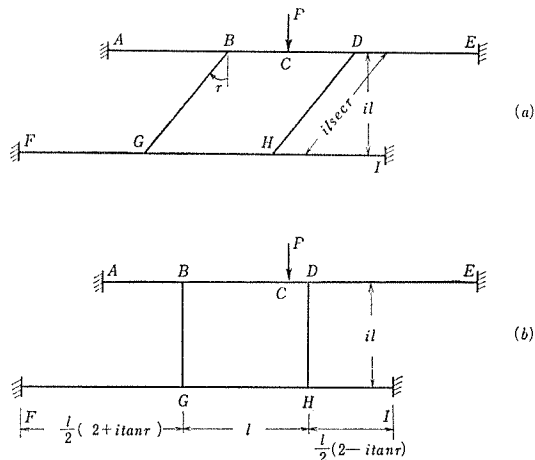


図-3

$$W_i = 4\theta_a \cdot M_0 + 4\theta_G \cdot jM_0$$

$$= \frac{8}{3l} \left(1 + \frac{j}{i} \cos r \right) \cdot M_0 \cdot \delta_C$$

であるから

$W_e = W_i$ より次式が得られる.

$$P_0 = \frac{8}{3l} \left(1 + \frac{j}{i} \cos r \right) M_0 = 8 \left(1 + \frac{j}{i} \cos r \right) \frac{M_0}{L}. \quad (3)$$

b) 直交構造 (図-3(b))

崩壊機構は, 図-2(c)と同様である. 図を参照して,

表-1

j	i	r 度	P ₀ 係数 M ₀ /L		
			(1)(4)式	(2)式	(3)式
0.2	0.5	0	11.2	11.2	11.2
		20	11.2	11.4	11.0
		40	11.2	12.2	10.5
		60	11.2	14.4	9.6
		80	11.2	26.4	8.6
	1.0	0	9.6	9.6	9.6
		20	9.6	9.7	9.5
		40	9.6	10.1	9.2
		60	9.6	11.2	8.8
		80	9.6	17.2	8.3
0.5	0.5	0	16.0	16.0	16.0
		20	16.0	16.5	15.5
		40	16.0	18.4	14.1
		60	16.0	24.0	12.0
		80	16.0	54.0	9.4
	1.0	0	12.0	12.0	12.0
		20	12.0	12.3	11.8
		40	12.0	13.2	11.1
		60	12.0	16.0	10.0
		80	12.0	35.6	8.7

$$\theta_a = \frac{2}{3l} \cdot \delta_C,$$

$$\theta_G = \frac{\delta_D}{il} = \frac{1}{3il} (2 - i \tan r) \delta_C,$$

$$\theta_H = \frac{\delta_D}{il} = \frac{1}{3il} (2 + i \tan r) \delta_C,$$

$$W_e = P_0 \cdot \delta_C,$$

$$W_i = 4\theta_a \cdot M_0 + 2(\theta_G + \theta_H) \cdot jM_0$$

$$= \frac{8}{3l} \left(1 + \frac{j}{i} \right) M_0 \cdot \delta_C,$$

$$\therefore P_0 = 8 \left(1 + \frac{j}{i} \right) \cdot \frac{M_0}{L}. \quad (4)$$

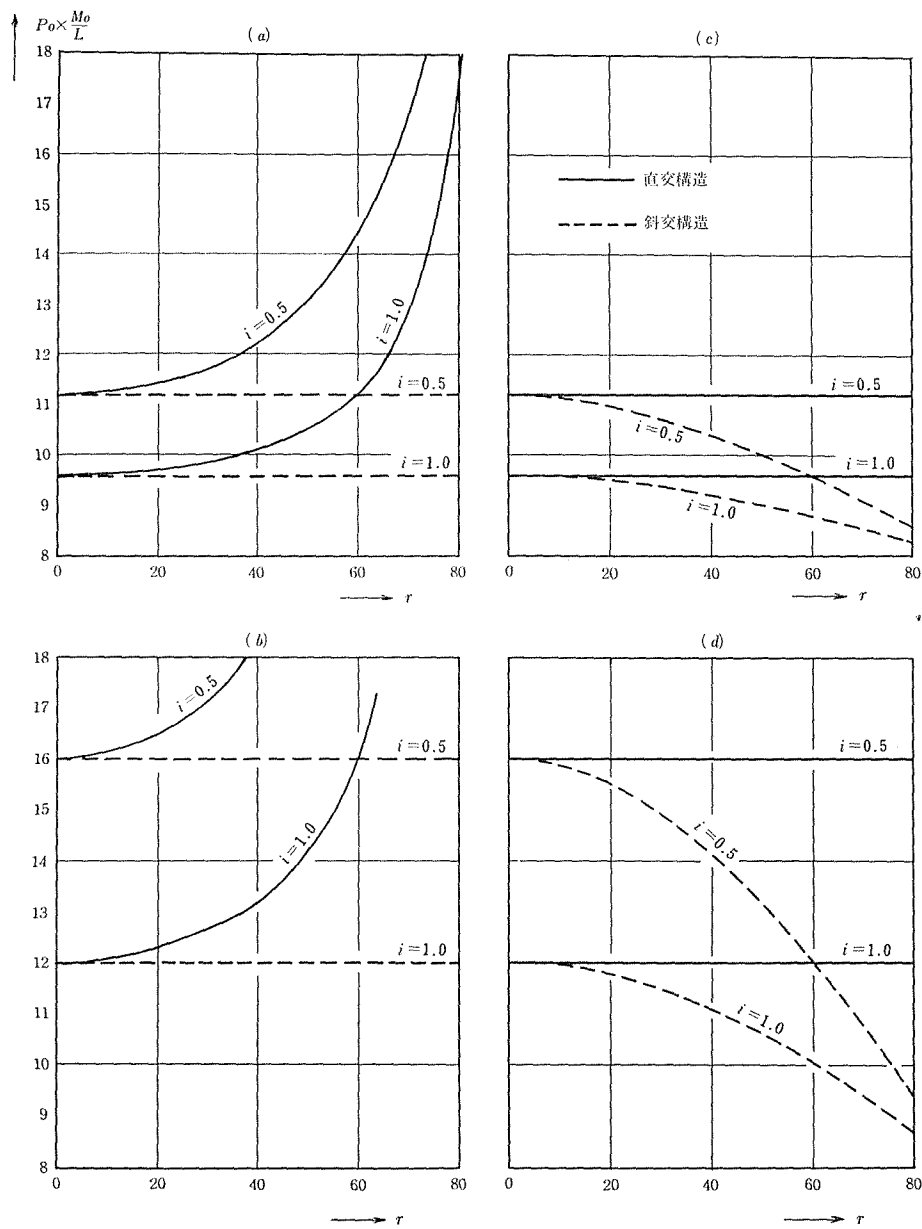
(1)~(4)式の計算値を表-1, 図-4に示す.

図-4(a), (b)は横げたの長さ一定の場合, (c), (d)は主げたの間隔を一定とした場合である. いずれの場合も斜交構造に比較して, 直交構造の方が終局耐力が大となっている.

2.2 ねじりを考慮した場合の極限荷重

2.2.1 曲げとねじりが作用するときの降伏条件式の誘導

任意断面に曲げとねじりが同時に作用するとき, 曲げのみ作用するときにくらべて, 低い応力状態で塑性流れを生ずる. 断面が塑性流れを生ずる為の条件すなわち降伏条件は, 降伏関数を ϕ とするとき $\phi = 0$ である. Von Mises の降伏関数を使うものとするとき次式であらわせる.



図一 4

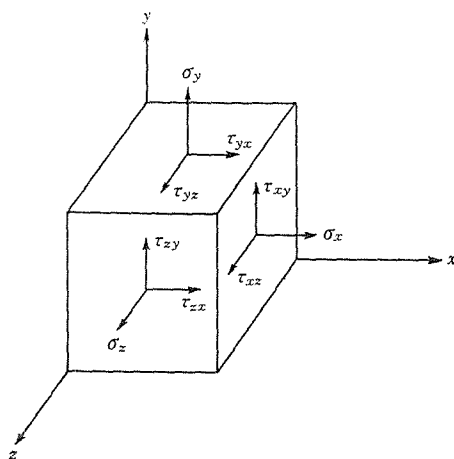


図-5

$$\phi = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) - 2(\sigma_0)^2. \quad (5)$$

一般にはりは、一軸方向に長いから、例えば x 軸まわりのねじりモーメントと z 軸まわりの曲げモーメントが作用する場合

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0 \quad \text{故(5)式より}$$

$$\phi = \sigma_x^2 + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2) - (\sigma_0)^2 \quad (6)$$

となり、さらに $\sigma_x = \sigma$, $\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 = \tau^2$ とおくと

$$\phi = \sigma^2 + 3\tau^2 - (\sigma_0)^2 \quad (7)$$

となる。今全塑性ねじりモーメント T_0 によって、断面上に降伏せん断応力 τ_0 が生ずるとき、ねじりモーメント T によって断面上に生ずるせん断応力 τ の分布は、 τ_0 の分布と相似とする。すなわち

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{T}{T_0}. \quad (8)$$

ここで、 $\tau_0 = \sigma_0 / \sqrt{3}$ であるから

$$\tau = \tau_0 \cdot \frac{T}{T_0} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \cdot \frac{T}{T_0}. \quad (9)$$

同じく全塑性曲げモーメント M_0 により生ずる垂直応力 σ_0 と曲げモーメント M により生ずる垂直応力 σ と相似であるとすれば

$$\sigma = \sigma_0 \cdot \frac{M}{M_0} \tag{10}$$

これらの σ , τ の分布が静的許容状態にあるための限界は、降伏関数 $\phi = 0$ なるときであるから、(7)式より次のようになる。

$$\left(\sigma_0 \cdot \frac{M}{M_0}\right)^2 + 3\left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \cdot \frac{T}{T_0}\right)^2 - (\sigma_0)^2 = 0,$$

故に

$$M^2 + \left(\frac{M_0}{T_0}\right)^2 \cdot T^2 = M_0^2, \tag{11}$$

ここで,
$$\alpha = \left(\frac{M_0}{T_0}\right)^2, \tag{12}$$

とおくと

$$M^2 + \alpha T^2 = M_0^2 \tag{13}$$

となり、これが全塑性曲げモーメント M_0 を持つ断面が塑性流れを生ずるための条件式である。

2.2.2 横げたの長さを一定として斜角を変化する場合

a) 斜交構造

図-1(a)と同じ格子について考える。図-6(a)は崩壊機構であり、(b)は切断つりあい図である。

部材断面は、計算の簡便上主げた、横げた共中実正方形とし、全塑性曲げモーメントを主げた、横げたに対して M_0, jM_0 とする。

崩壊条件式は

主げた $M^2 + \alpha T^2 = M_0^2, \tag{14-a}$

横げた $M^2 + \alpha T^2 = (jM_0)^2. \tag{14-b}$

ここで、 α の値を求めておく。

正方形断面の場合は、

$$M_0 = \frac{1}{4} b^3 \sigma_0, \quad T_0 = \frac{1}{3\sqrt{3}} b^3 \sigma_0 \tag{15}$$

であるから
$$\alpha = \left(\frac{M_0}{T_0}\right)^2 = \frac{27}{16} = 1.6875 \tag{16}$$

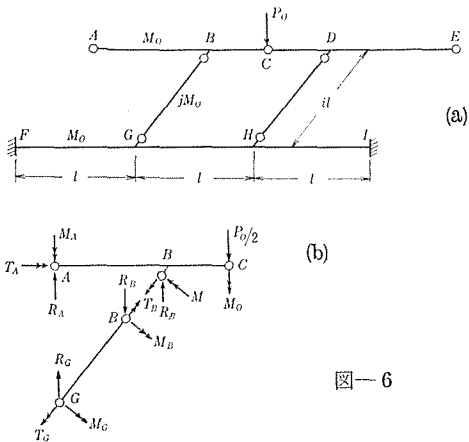


図-6

となる。ただし、 b : 正方形の辺長である。

次に崩壊時に諸力はつりあいを保っているから図-6 (b) を見て、次のつりあい式をたてる。

$$\left. \begin{aligned} T_B &= T_G, & M_B &= M_G, \\ T_A &= T_B \sin r + M_B \cos r, \\ R_B &= R_G = 2M_B/il, \\ P_0 &= 2(R_B + R_A). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(1)式からわかるように、極限荷重を求めるためには、崩壊時の塑性ヒンジにおける曲げモーメント M 、ねじりモーメント T を決定しなければならない。そのために次のように行う。

任意の塑性ヒンジにおけるねじれ角速度を θ 、曲げ角速度を β とする。今一つの崩壊機構が与えられたとすると、任意の塑性ヒンジにおける θ と β の比すなわち θ/β は、一意に定まるから M 、 T を未知量とする代わりに、 θ/β を未知量として計算することができる。

いま、節点 B の垂直変位速度を δ_B とし、未知量に塑性ヒンジ A 、 G における θ/β をとることにする。すなわち

$$\theta_A/\beta_A = x, \quad \theta_G/\beta_G = y \quad (18)$$

とおく。これより

$$\theta_A = x\beta_A = x \cdot \delta_B/l, \quad (19-a)$$

$$\theta_G = y\beta_G = y \cdot \delta_B/il \quad (19-b)$$

となる。

また、

$$\begin{aligned} \beta_A = \delta_B/l &= \theta_B \cos r + \theta_G \cos r + \beta_B \sin r + \beta_G \sin r \\ &= (\theta_B + \theta_G) \cos r + (\beta_B + \beta_G) \sin r, \end{aligned} \quad (20-a)$$

$$\beta_G = \delta_B/il = \beta_B + \beta_A \sin r + \theta_A \cos r \quad (20-b)$$

なる関係が成立している。

一方、流れ法則 $\theta/\beta = \alpha \cdot T/M^*$ により

* $\theta/\beta = \alpha \cdot T/M$ は次のように求まる。

塑性ヒンジにおける M 、 T による仕事は

$$T \cdot \theta + M \cdot \beta$$

であり、崩壊時には、この仕事量が極大になるから $\theta \cdot dT + \beta \cdot dM = 0$, $\therefore \theta/\beta = -dM/dT$. (a)

次に塑性条件式 $M^2 + \alpha T^2 = M_0^2$ を微分すると

$$2M \cdot dM + 2\alpha T \cdot dT = 0,$$

$$\therefore \alpha \cdot T/M = -dM/dT \quad (b)$$

(a), (b)式より

$$\frac{\theta}{\beta} = \alpha \frac{T}{M}$$

となる。

$$\frac{T_G}{M_G} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\theta_G}{\beta_G} = \frac{1}{\alpha} \cdot y, \quad (21-a)$$

$$\frac{T_B}{M_B} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\theta_B}{\beta_B} \quad (21-b)$$

であるから

$$\frac{T_G}{M_G} = \frac{T_B}{M_B} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\theta_G}{\beta_G} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\theta_B}{\beta_B} = \frac{1}{\alpha} \cdot y \quad (21-c)$$

となり、これより

$$\theta_B/\beta_B = y, \quad \therefore \theta_B = y \cdot \beta_B \quad (21-d)$$

となる。

式(20-a), 式(19-a, b), 式(21-d) から次式が得られる。

$$(y \cos r + \sin r)\beta_B + (y \cos r + \sin r)\delta_B/il = \delta_B/l. \quad (22-a)$$

また式(20-b), 式(19-a) から

$$\beta_A = (1/i - \sin r - x \cos r)\delta_B/l \quad (22-b)$$

となり、式(22-a), (22-b) より

$$(y \cos r + \sin r)(2/i - x \cos r - \sin r) = 1 \quad (23)$$

が得られる。

塑性ヒンジAにおいて塑性条件を満たすためには、 $M_A^2 + \alpha T_A^2 = M_0^2$ を満足しなければならず、またつりあい式から $T_A = T_B \sin r + M_B \cos r$ の関係があるから

$$M_A^2 + \alpha(T_B \sin r + M_B \cos r)^2 = M_0^2 \quad (24)$$

が成立する。

一方流れ法則により

$$\frac{T_A}{M_A} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\theta_A}{\beta_A} = \frac{1}{\alpha} x$$

$$\text{より} \quad M_A = \frac{\alpha}{x} T_A = \frac{\alpha}{x} (T_B \sin r + M_B \cos r) \quad (25)$$

となる。

塑性ヒンジBにおいては、塑性条件は

$$M_B^2 + \alpha T_B^2 = (jM_0)^2 \quad (26)$$

であり

$$\frac{T_B}{M_B} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\theta_B}{\beta_B} = \frac{1}{\alpha} y$$

$$\text{より} \quad T_B = \frac{M_B}{\alpha} y \quad (27)$$

となる.

式(24), 式(25), 式(27)より

$$\left\{ \left(\frac{\alpha}{x} \right)^2 + \alpha \right\} \left(\frac{y}{\alpha} \sin r + \cos r \right)^2 M_B^2 = M_0^2, \quad (28-a)$$

式(26), 式(27)より

$$(1 + y^2/\alpha) M_B^2 = (jM_0)^2 \quad (28-b)$$

となるから式(28-a, b)から M_0 を消去して次式を得る.

$$j^2(\alpha + x^2)(y \sin r + \alpha \cos r)^2 = x^2(\alpha + y^2). \quad (29)$$

未知量 x , y に対して式(29), 式(29)が得られたので, これを解いて x , y が定まる. したがって, これと流れ法則, つりあい式により極限荷重が決定される.

すなわち

$$T_B/M_B = y/\alpha \quad \text{より} \quad T_B = M_B y/\alpha,$$

$$T_A/M_A = x/\alpha \quad \text{より} \quad T_A = M_A x/\alpha$$

であるから, これらを

$$M_A^2 + \alpha T_A^2 = M_0^2,$$

$$M_B^2 + \alpha T_B^2 = (jM_0)^2$$

に代入して次式を得る.

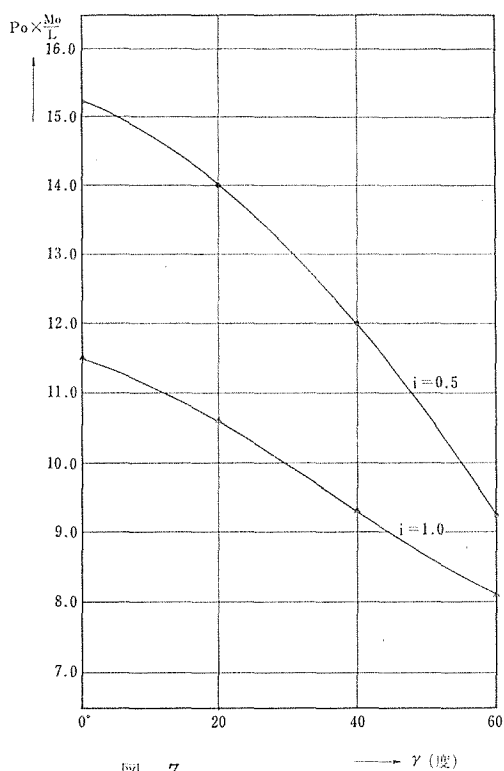
$$\left. \begin{aligned} M_A &= \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha + x^2}} \cdot M_0, \\ M_B &= \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha + y^2}} \cdot jM_0. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

式(30)を式(17)に代入することにより任意の塑性ヒンジにおけるねじりモーメントが求まりこれより P_0 が定められる.

$i=0.5, 1.0, j=0.5$ の場合の計算結果を図-7 に示す.

b) 直交構造 (図-2)

図-2(a), (b)における横げたの長さを比較してみると, 斜交構造の場合 iL , 直交構造の場合



図一七

→ γ (度)

より明らかなように直交構造の極限荷量が大きくなっているが、これは直交構造の横方向剛度が大きなるためである。

以上により一般的に斜橋においては

- (1) 荷重分配効果
- (2) 製作および施工上の簡便さ
- (3) 極限荷重

の三点の比較検討の結果斜交構造より直交構造とすることが望ましいと思われる。

終りにのぞみ日頃いろいろと御指導下さる本学部吉田俊弥教授、ならびに草間孝志講師に厚く御礼申し上げます。

文 献

- 1) 高島春生；道路橋の横分配実用計算法（後編），現代社，昭和42
- 2) 田中 尚；構造物の極限解析，彰国社，昭和41
- 3) 大村 裕；斜ヶタ橋における横ヶタの配置について，20回 土木学会年次学術講演会概要集
- 4) 吉田俊弥；三角格子について，20回 土木学会年次学術講演会概要集

* 斜角のとり方は図一1の通りとする。

合 $il \cos r$ であり直交構造の方が小さい。したがって横方向剛度は直交構造の方が大となるから、極限荷重もまた直交の場合が大となることが予想されるので計算は省略する。

2.2.3 主げた間隔を一定として斜角を変化する場合

省略

2.3 むすび

斜橋の特性の一つとして、斜角が増大する* ともなうて、橋軸方向の曲げモーメントが減少し、軸と垂直方向（横方向）の曲げモーメントが増大することが挙げられる。このことから斜橋が直橋と同じ耐力を持つためには、斜角が増加するにしたがい横方向剛度を高めなくてはならない。

直交構造と斜交構造とで同断面の横げたを使用した場合 図-4 より

Summary

Studies on the Arrangement of Cross Beams in Skew Girder Bridges

Hideki YAMAZAKI

(Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering)

Skew girder bridges are structurally classified into two types according to the arrangement of their members. In one type the main girders and the intermediate cross beams meet at right angles at each joints, and in the other type the whole cross beams make skew angles with the main girders. In general, the former type is recognized to be superior to the latter in the elastic criterion, but their ultimate strength has not been clarified yet.

In this paper, the author has investigated the collapse loads of the two types of grid above mentioned and perceived that the superiority of the former type is preserved in the plastic criterion.