

任意の方位で切り出された単結晶板の 弾性定数と弾性係数の変換公式

中 沢 光 男*

(昭和41年10月31日受理)

1. 緒 言

弾性限界内での拡張された Hooke の法則によれば、一般に弾性体の任意の点における応力成分は、その点に生じた歪み成分と一次形で結ばれる。このときの比例定数を弾性定数 (Elastic stiffness constants) c_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, 6$) と定義し、これをマトリクス $[c_{ij}]$ で表わすと、その逆マトリクス $[c_{ij}]^{-1}$ はまた弾性係数 (Elastic compliance constants) のマトリクス $[s_{ij}]$ ($i, j=1, 2, \dots, 6$) としても定義される。

本論文は、このような弾性定数あるいは弾性係数が座標軸の回転によってどのように変換されるか検討したもので、すなわち弾性体として特に単結晶を考え、それが任意の方位で切り出された場合、そのときの $[c_{ij}]$ あるいは $[s_{ij}]$ の一般的な変換公式を求めたものである。

2. 応力成分の変換

周知のように、応力は二次のテンソルで表わされ、 $X_x, X_y, X_z; Y_x, Y_y, Y_z; Z_x, Z_y, Z_z$ なる九つのテンソル成分をもっている。ここに頭文字 X, Y, Z は力の作用成分を示し、また添字 x, y, z は力の作用面の法線方向を表わす。たとえば、応力成分 X_x とは x 軸に垂直な単位断面積に x 方向から作用している力の x 成分を意味する。従って、応力 X_x は伸縮力を表わす。また Y_z なる応力成分は、 z 軸に垂直な単位断面積に z 方向から作用している力の y 成分を意味する。すなわち応力 Y_z は 剪断力を表わす。なお、その他の応力成分についても全く同様に説明される。

いま結晶体に外力が加わっている場合を考えれば、その結晶体内部には応力が発生し歪みができる。しかし、結晶体には回転力が作用しないとすれば、応力のテンソル成分間には次のような関係式が成立する。すなわち

$$\left. \begin{aligned} X_y &= Y_x, \\ Y_z &= Z_y, \\ Z_x &= X_z. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

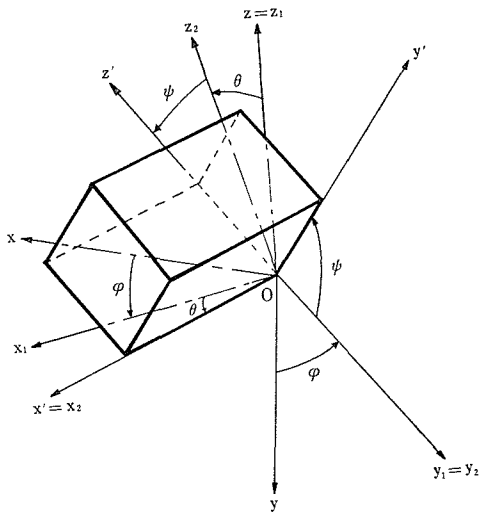
従って、独立な応力のテンソル成分は $X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y$ の六つになる。

ここで主結晶軸に対し、任意の方位で切り出された単結晶板の方向余弦について考察

* 電気工学教室 講師

してみよう。いま O 点を原点とする右手直交座標系 $(O-x, y, z)$ に一つの単結晶体を考え、その主結晶軸が z 軸と一致しているものとする。さて、 z 軸の回りに φ だけ直交座標系 $(O-x, y, z)$ を反時計回りに回転し、そのとき得られた直交座標系を $(O-x_1, y_1, z_1=z)$ とする。次に、 $(O-x_1, y_1, z_1)$ 直交座標系を y_1 軸の回りに θ だけ反時計回りに回転した場合を考え、このときの直交座標系を $(O-x_2, y_2=y_1, z_2)$ とする。最後に、 $(O-x_2, y_2=y_1, z_2)$ 直交座標系を x_2 軸の回りに ψ だけ反時計回りに回転して $(O-x'=x_2, y', z')$ なる新直交座標系が得られる。このようにして得られた新直交座標系 $(O-x', y', z')$ の各座標軸に平行に、すなわち第 1 図のように、いま単結晶体から矩形単結晶板を切り出すものとしよう。

ここで x' の x, y, z 各軸に対する方向余弦を l_1, m_1, n_1 とし、同様に y' および z' のそれを夫々 l_2, m_2, n_2 および l_3, m_3, n_3 とする。すなわち第 1 表のように新旧両座標間の方向余弦 $l_i, m_i, n_i (i=1, 2, 3)$ を定めれば、それ等は φ, θ, ψ と (2) 式のような関係で結ばれる。



第 1 図

第 1 表

	x'	y'	z'
x	l_1	l_2	l_3
y	m_1	m_2	m_3
z	n_1	n_2	n_3

すなわち

$$\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \quad (2)$$

このようにして(2)式で与えられた方向余弦を用いれば、新しい直交座標系に関する応力成分 $X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y$ ともとの直交座標系に関する応力成分 $X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y$ との関係、次のようにして極めて容易に求めることができる。

すなわち、(O-x, y, z)直交座標系においてベクトル $\mathbf{F}(X, Y, Z)$ を考える。次に (O-x', y', z')直交座標系へのその変換ベクトル $\mathbf{F}'(X', Y', Z')$ を考えると、

定理：「二つのベクトル各成分の積の変換は、二次のテンソルと同じ変換の法則に従う。」

から、応力テンソル成分と二つのベクトル成分の積の間には次の関係が成立する。

すなわち

$$\left. \begin{aligned} X_x &= X \cdot X, & X_{x'} &= X' \cdot X', \\ Y_y &= Y \cdot Y, & Y_{y'} &= Y' \cdot Y', \\ Z_z &= Z \cdot Z, & Z_{z'} &= Z' \cdot Z', \\ Y_z &= Y \cdot Z, & Y_{z'} &= Y' \cdot Z', \\ Z_x &= Z \cdot X, & Z_{x'} &= Z' \cdot X', \\ X_y &= X \cdot Y, & X_{y'} &= X' \cdot Y'. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

しかるに、ベクトル成分 (X, Y, Z) と (X', Y', Z') との間には、第1表から次のような関係があるので、すなわち

$$\left. \begin{aligned} X &= l_1 X' + l_2 Y' + l_3 Z', \\ Y &= m_1 X' + m_2 Y' + m_3 Z', \\ Z &= n_1 X' + n_2 Y' + n_3 Z', \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

あるいは

$$\left. \begin{aligned} X' &= l_1 X + m_1 Y + n_1 Z, \\ Y' &= l_2 X + m_2 Y + n_2 Z, \\ Z' &= l_3 X + m_3 Y + n_3 Z, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

従って、(3)、(4)の両式から

$$\left. \begin{aligned} X_x &= (l_1 X' + l_2 Y' + l_3 Z')^2, \\ Y_y &= (m_1 X' + m_2 Y' + m_3 Z')^2, \\ Z_z &= (n_1 X' + n_2 Y' + n_3 Z')^2, \\ Y_z &= (m_1 X' + m_2 Y' + m_3 Z')(n_1 X' + n_2 Y' + n_3 Z'), \\ Z_x &= (n_1 X' + n_2 Y' + n_3 Z')(l_1 X' + l_2 Y' + l_3 Z'), \\ X_y &= (l_1 X' + l_2 Y' + l_3 Z')(m_1 X' + m_2 Y' + m_3 Z') \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

を得る。(3)式を考慮して(6)式を整理すれば、結局次の(7)式を得る。これが応力テンソル成分の (O-x', y', z')直交座標系から (O-x, y, z)直交座標系への変換式である。

$$\begin{bmatrix} X_x \\ Y_y \\ Z_z \\ Y_z \\ Z_x \\ X_y \end{bmatrix} = \mathbf{M}_1 \begin{bmatrix} X_{x'} \\ Y_{y'} \\ Z_{z'} \\ Y_{z'} \\ Z_{x'} \\ X_{y'} \end{bmatrix} \quad (7)$$

ただし

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_2^2 & l_3^2 & 2l_2l_3 & 2l_3l_1 & 2l_1l_2 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 & 2m_2m_3 & 2m_3m_1 & 2m_1m_2 \\ n_1^2 & n_2^2 & n_3^2 & 2n_2n_3 & 2n_3n_1 & 2n_1n_2 \\ m_1n_1 & m_2n_2 & m_3n_3 & m_2n_3 + m_3n_2 & m_3n_1 + m_1n_3 & m_1n_2 + m_2n_1 \\ n_1l_1 & n_2l_2 & n_3l_3 & n_2l_3 + n_3l_2 & n_3l_1 + n_1l_3 & n_1l_2 + n_2l_1 \\ l_1m_1 & l_2m_2 & l_3m_3 & l_2m_3 + l_3m_2 & l_3m_1 + l_1m_3 & l_1m_2 + l_2m_1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

一方, (3), (5)の両式から

$$\left. \begin{aligned} X_{x'} &= (l_1X + m_1Y + n_1Z)^2, \\ Y_{y'} &= (l_2X + m_2Y + n_2Z)^2, \\ Z_{z'} &= (l_3X + m_3Y + n_3Z)^2, \\ Y_{z'} &= (l_2X + m_2Y + n_2Z)(l_3X + m_3Y + n_3Z), \\ Z_{x'} &= (l_3X + m_3Y + n_3Z)(l_1X + m_1Y + n_1Z), \\ X_{y'} &= (l_1X + m_1Y + n_1Z)(l_2X + m_2Y + n_2Z). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここで(3)式を考慮して(9)式を整理すると次の(10)式を得る。すなわち(10)式は応力テンソル成分の(O-x, y, z)直交座標系から(O-x', y', z')直交座標系への変換式である。

$$\begin{bmatrix} X_{x'} \\ Y_{y'} \\ Z_{z'} \\ Y_{z'} \\ Z_{x'} \\ X_{y'} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_2 \begin{bmatrix} X_x \\ Y_y \\ Z_z \\ Y_z \\ Z_x \\ X_y \end{bmatrix} \quad (10)$$

ただし, \mathbf{M}_2 は \mathbf{M}_1 の逆マトリクスであり, それは

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & 2m_1n_1 & 2n_1l_1 & 2l_1m_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & 2m_2n_2 & 2n_2l_2 & 2l_2m_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & 2m_3n_3 & 2n_3l_3 & 2l_3m_3 \\ l_2l_3 & m_2m_3 & n_2n_3 & m_2n_3+m_3n_2 & n_2l_3+n_3l_2 & l_2m_3+l_3m_2 \\ l_3l_1 & m_3m_1 & n_3n_1 & m_3n_1+m_1n_3 & n_3l_1+n_1l_3 & l_3m_1+l_1m_3 \\ l_1l_2 & m_1m_2 & n_1n_2 & m_1n_2+m_2n_1 & n_1l_2+n_2l_1 & l_1m_2+l_2m_1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

で与えられる。

次に、テンソルの直交変換の定理を利用した応力テンソルの変換方法を考えてみよう。

いま T_{jk} を直交座標 x_j における対称な応力テンソルの成分とすれば、

$$\sum_{j,k=1}^3 T_{jk} x_j x_k = \text{Const.} \quad (12)$$

すなわち

$$T_{11}x_1^2 + T_{22}x_2^2 + T_{33}x_3^2 + 2T_{23}x_2x_3 + 2T_{31}x_3x_1 + 2T_{12}x_1x_2 = \text{Const.} \quad (12)'$$

は応力テンソルの二次曲面を表わす。

そこで(12)式の二次曲面方程式に直交座標の変換を施せば、

$$\sum_{j,k=1}^3 T_{jk}' x_j' x_k' = \text{Const}' \quad (13)$$

を得る。

ただし、 T_{jk}' は x_j' 直交座標系における応力テンソルの成分である。しかるに、 T_{jk} はテンソルであるので(12)式の左辺の値は直交座標の変換によつては不変である。

従つて、

$$\sum_{j,k=1}^3 T_{jk} x_j x_k = \sum_{j,k=1}^3 T_{jk}' x_j' x_k' \quad (14)$$

となる。

故に

$$\text{Const.} = \text{Const}' \quad (15)$$

が得られる。

さて、 x_j, x_j' ; T_{jk}, T_{jk}' 等を次のようにおきかえる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x, & x_2 &= y, & x_3 &= z, \\ x_1' &= x', & x_2' &= y', & x_3' &= z', \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

および

$$\left. \begin{aligned} T_{11} &= X_x, & T_{22} &= Y_y, & T_{33} &= Z_z, \\ T_{23} &= T_{32} = Y_z, & T_{31} &= T_{13} = Z_x, & T_{12} &= T_{21} = X_y, \\ T_{11}' &= X_x', & T_{22}' &= Y_y', & T_{33}' &= Z_z', \\ T_{23}' &= T_{32}' = Y_z', & T_{31}' &= T_{13}' = Z_x', & T_{12}' &= T_{21}' = X_y'. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

ここで(16), (17)両式の関係(12), (13)の両式に代入し更に(15)式を考慮すれば,

$$X_x x^2 + Y_y y^2 + Z_z z^2 + 2Y_z yz + 2Z_x zx + 2X_y xy = \text{Const.}, \quad (18)$$

$$X_x' x'^2 + Y_y' y'^2 + Z_z' z'^2 + 2Y_z' y'z' + 2Z_x' z'x' + 2X_y' x'y' = \text{Const.} \quad (19)$$

が得られる。

第1表によれば,

$$\left. \begin{aligned} x &= l_1 x' + l_2 y' + l_3 z', \\ y &= m_1 x' + m_2 y' + m_3 z', \\ z &= n_1 x' + n_2 y' + n_3 z' \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

の関係式が成立するので, これを(18)式に代入して(19)式と比較すれば, すなわち(10)式が得られる。

3. 歪み成分の変換

結晶体中に発生する歪みは応力と同様二次の対称テンソル S_{jk} で表わされ u を変位ベクトルとすれば,

$$S_{jk} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (j, k = 1, 2, 3) \quad (21)$$

で定義される。

従って, 応力の場合と同様に考えて, 歪みの二次曲面方程式は

$$\sum_{j,k=1}^3 S_{jk} x_j x_k = \text{Const.} \quad (22)$$

で表わされる。

いま x_j, u_j, S_{jk} 等を

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x, & x_2 &= y, & x_3 &= z; \\ u_1 &= u, & u_2 &= v, & u_3 &= w; \\ S_{11} &= e_{xx}, & S_{22} &= e_{yy}, & S_{33} &= e_{zz}, \\ S_{23} &= \frac{1}{2} e_{yz}, & S_{31} &= \frac{1}{2} e_{zx}, & S_{12} &= \frac{1}{2} e_{xy}; \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

でおきかえれば, (22)式は

$$e_{xx}x^2 + e_{yy}y^2 + e_{zz}z^2 + e_{yz}yz + e_{zx}zx + e_{xy}xy = \text{Const.} \quad (24)$$

となる。

ここで(24)式を直交座標系 $(O-x', y', z')$ へ変換すれば、

$$e_{xx'}x'^2 + e_{yy'}y'^2 + e_{zz'}z'^2 + e_{yz'}yz' + e_{zx'}z'x' + e_{xy'}x'y' = \text{Const.} \quad (25)$$

となる。

ただし、 $e_{xx'}$, $e_{yy'}$, $e_{zz'}$, ……は直交座標系 $(O-x', y', z')$ における歪みテンソル成分である。

よって、(20)式を(24)式に代入して(25)式と比較すれば、結局次の歪みテンソル成分の変換式が得られる。すなわち

$$\begin{bmatrix} e_{xx'} \\ e_{yy'} \\ e_{zz'} \\ e_{yz'} \\ e_{zx'} \\ e_{xy'} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_3 \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \\ e_{xy} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

ただし

$$\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & m_1n_1 & n_1l_1 & l_1m_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & m_2n_2 & n_2l_2 & l_2m_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & m_3n_3 & n_3l_3 & l_3m_3 \\ 2l_2l_3 & 2m_2m_3 & 2n_2n_3 & m_2n_3 + m_3n_2 & n_2l_3 + n_3l_2 & l_2m_3 + l_3m_2 \\ 2l_3l_1 & 2m_3m_1 & 2n_3n_1 & m_3n_1 + m_1n_3 & n_3l_1 + n_1l_3 & l_3m_1 + l_1m_3 \\ 2l_1l_2 & 2m_1m_2 & 2n_1n_2 & m_1n_2 + m_2n_1 & n_1l_2 + n_2l_1 & l_1m_2 + l_2m_1 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

あるいは

$$\begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \\ e_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_4 \begin{bmatrix} e_{xx'} \\ e_{yy'} \\ e_{zz'} \\ e_{yz'} \\ e_{zx'} \\ e_{xy'} \end{bmatrix}. \quad (28)$$

ただし、 \mathbf{M}_4 は \mathbf{M}_3 の逆マトリクスであり、それは

$$\mathbf{M}_4 = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_2^2 & l_3^2 & l_2 l_3 & l_3 l_1 & l_1 l_2 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 & m_2 m_3 & m_3 m_1 & m_1 m_2 \\ n_1^2 & n_2^2 & n_3^2 & n_2 n_3 & n_3 n_1 & n_1 n_2 \\ 2m_1 n_1 & 2m_2 n_2 & 2m_3 n_3 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & m_3 n_1 + m_1 n_3 & m_1 n_2 + m_2 n_1 \\ 2n_1 l_1 & 2n_2 l_2 & 2n_3 l_3 & n_2 l_3 + n_3 l_2 & n_3 l_1 + n_1 l_3 & n_1 l_2 + n_2 l_1 \\ 2l_1 m_1 & 2l_2 m_2 & 2l_3 m_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & l_3 m_1 + l_1 m_3 & l_1 m_2 + l_2 m_1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

で与えられる。

4. 弾性定数の変換

一般に応力と歪みの関係は、拡張された Hooke の法則により次の(30)式あるいは(31)式で与えられる。

すなわち

$$\begin{bmatrix} X_x \\ Y_y \\ Z_x \\ Y_z \\ Z_x \\ X_y \end{bmatrix} = [c_{ij}] \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \\ e_{xy} \end{bmatrix} \quad (30)$$

あるいは

$$\begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \\ e_{xy} \end{bmatrix} = [s_{ij}] \begin{bmatrix} X_x \\ Y_y \\ Z_x \\ Y_z \\ Z_x \\ X_y \end{bmatrix} \quad (31)$$

ただし、 c_{ij} および s_{ij} は二次の応力テンソルと歪みテンソルを結びつけている四次のテンソル量であり、それ等は(32)式および(33)式のように表わされ、夫々弾性定数および弾性係数と呼ばれていることは前に述べた通りである。

$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$[s_{ij}] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} & s_{56} \\ s_{61} & s_{62} & s_{63} & s_{64} & s_{65} & s_{66} \end{bmatrix} \quad (33)$$

一般に c_{ij} および s_{ij} は

$$\left. \begin{aligned} c_{ij} &= c_{ji}, \\ s_{ij} &= s_{ji} \end{aligned} \right\} \text{ただし } i \neq j, \quad (34)$$

$$\sum_{j=1}^6 c_{ji} s_{ij} = 1$$

かつ

なる対称テンソルで表わされる。

さて、単結晶板を第1図のように、すなわち直交座標系 ($O-x', y', z'$) に沿って切り出した場合、その単結晶の弾性定数は新直交座標系ではどのように変換されるだろうか。

そこで、座標軸変換前の単結晶体の弾性定数 c_{ij} に対し、変換後のそれを c_{ij}' とすれば新直交座標系 ($O-x', y', z'$) における Hooke の法則は

$$\begin{bmatrix} X_x' \\ Y_y' \\ Z_z' \\ Y_z' \\ Z_x' \\ X_y' \end{bmatrix} = [c_{ij}'] \begin{bmatrix} e_{xx}' \\ e_{yy}' \\ e_{zz}' \\ e_{yz}' \\ e_{zx}' \\ e_{xy}' \end{bmatrix} \quad (35)$$

となる。

(35)式の左辺に(10)→(30)→(28)の各式を順次代入し、更に(34)式の関係を用いて、結局次のような $[c_{ij}']$ と $[c_{ij}]$ との関係式を求めることができる。

すなわち

$$[c_{ij}'] = M_2 [c_{ij}] M_4 \quad (36)$$

を得る。

故に(36)式から次のような弾性定数の変換公式が容易に求まる。すなわち

(37)式：

$$\begin{aligned} c_{11}' &= A_1 l_1^2 + B_1 m_1^2 + C_1 n_1^2 + D_1 m_1 n_1 + E_1 n_1 l_1 + F_1 l_1 m_1, \\ c_{12}' &= A_1 l_2^2 + B_1 m_2^2 + C_1 n_2^2 + D_1 m_2 n_2 + E_1 n_2 l_2 + F_1 l_2 m_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{13}' &= A_1 l_3^2 + B_1 m_3^2 + C_1 n_3^2 + D_1 m_3 n_3 + E_1 n_3 l_3 + F_1 l_3 m_3, \\
c_{14}' &= A_1 l_2 l_3 + B_1 m_2 m_3 + C_1 n_2 n_3 + D_1 (m_2 n_3 + m_3 n_2) + E_1 (n_2 l_3 + n_3 l_2) \\
&\quad + F_1 (l_2 m_3 + l_3 m_2), \\
c_{15}' &= A_1 l_3 l_1 + B_1 m_3 m_1 + C_1 n_3 n_1 + D_1 (m_3 n_1 + m_1 n_3) + E_1 (n_3 l_1 + n_1 l_3) + F_1 (l_3 m_1 + l_1 m_3), \\
c_{16}' &= A_1 l_1 l_2 + B_1 m_1 m_2 + C_1 n_1 n_2 + D_1 (m_1 n_2 + m_2 n_1) + E_1 (n_1 l_2 + n_2 l_1) \\
&\quad + F_1 (l_1 m_2 + l_2 m_1).
\end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}
A_1 &= l_1^2 c_{11} + m_1^2 c_{12} + n_1^2 c_{13} + 2m_1 n_1 c_{14} + 2n_1 l_1 c_{15} + 2l_1 m_1 c_{16}, \\
B_1 &= l_1^2 c_{12} + m_1^2 c_{22} + n_1^2 c_{23} + 2m_1 n_1 c_{24} + 2n_1 l_1 c_{25} + 2l_1 m_1 c_{26}, \\
C_1 &= l_1^2 c_{13} + m_1^2 c_{23} + n_1^2 c_{33} + 2m_1 n_1 c_{34} + 2n_1 l_1 c_{35} + 2l_1 m_1 c_{36}, \\
D_1 &= 2(l_1^2 c_{14} + m_1^2 c_{24} + n_1^2 c_{34} + 2m_1 n_1 c_{44} + 2n_1 l_1 c_{45} + 2l_1 m_1 c_{46}), \\
E_1 &= 2(l_1^2 c_{15} + m_1^2 c_{25} + n_1^2 c_{35} + 2m_1 n_1 c_{45} + 2n_1 l_1 c_{55} + 2l_1 m_1 c_{56}), \\
F_1 &= 2(l_1^2 c_{16} + m_1^2 c_{26} + n_1^2 c_{36} + 2m_1 n_1 c_{46} + 2n_1 l_1 c_{56} + 2l_1 m_1 c_{66}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{21}' &= c_{12}', \\
c_{22}' &= A_2 l_2^2 + B_2 m_2^2 + C_2 n_2^2 + D_2 m_2 n_2 + E_2 n_2 l_2 + F_2 l_2 m_2, \\
c_{23}' &= A_2 l_3^2 + B_2 m_3^2 + C_2 n_3^2 + D_2 m_3 n_3 + E_2 n_3 l_3 + F_2 l_3 m_3, \\
c_{24}' &= A_2 l_2 l_3 + B_2 m_2 m_3 + C_2 n_2 n_3 + D_2 (m_2 n_3 + m_3 n_2) + E_2 (n_2 l_3 + n_3 l_2) \\
&\quad + F_2 (l_2 m_3 + l_3 m_2), \\
c_{25}' &= A_2 l_3 l_1 + B_2 m_3 m_1 + C_2 n_3 n_1 + D_2 (m_3 n_1 + m_1 n_3) + E_2 (n_3 l_1 + n_1 l_3) \\
&\quad + F_2 (l_3 m_1 + l_1 m_3), \\
c_{26}' &= A_2 l_1 l_2 + B_2 m_1 m_2 + C_2 n_1 n_2 + D_2 (m_1 n_2 + m_2 n_1) + E_2 (n_1 l_2 + n_2 l_1) \\
&\quad + F_2 (l_1 m_2 + l_2 m_1).
\end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}
A_2 &= l_2^2 c_{11} + m_2^2 c_{12} + n_2^2 c_{13} + 2m_2 n_2 c_{14} + 2n_2 l_2 c_{15} + 2l_2 m_2 c_{16}, \\
B_2 &= l_2^2 c_{12} + m_2^2 c_{22} + n_2^2 c_{23} + 2m_2 n_2 c_{24} + 2n_2 l_2 c_{25} + 2l_2 m_2 c_{26}, \\
C_2 &= l_2^2 c_{13} + m_2^2 c_{23} + n_2^2 c_{33} + 2m_2 n_2 c_{34} + 2n_2 l_2 c_{35} + 2l_2 m_2 c_{36}, \\
D_2 &= 2(l_2^2 c_{14} + m_2^2 c_{24} + n_2^2 c_{34} + 2m_2 n_2 c_{44} + 2n_2 l_2 c_{45} + 2l_2 m_2 c_{46}), \\
E_2 &= 2(l_2^2 c_{15} + m_2^2 c_{25} + n_2^2 c_{35} + 2m_2 n_2 c_{45} + 2n_2 l_2 c_{55} + 2l_2 m_2 c_{56}), \\
F_2 &= 2(l_2^2 c_{16} + m_2^2 c_{26} + n_2^2 c_{36} + 2m_2 n_2 c_{46} + 2n_2 l_2 c_{56} + 2l_2 m_2 c_{66}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{31}' &= c_{13}', \\
c_{32}' &= c_{23}', \\
c_{33}' &= A_3 l_3^2 + B_3 m_3^2 + C_3 n_3^2 + D_3 m_3 n_3 + E_3 n_3 l_3 + F_3 l_3 m_3, \\
c_{34}' &= A_3 l_2 l_3 + B_3 m_2 m_3 + C_3 n_2 n_3 + D_3 (m_2 n_3 + m_3 n_2) \\
&\quad + E_3 (n_2 l_3 + n_3 l_2) + F_3 (l_2 m_3 + l_3 m_2), \\
c_{35}' &= A_3 l_3 l_1 + B_3 m_3 m_1 + C_3 n_3 n_1 + D_3 (m_3 n_1 + m_1 n_3) \\
&\quad + E_3 (n_3 l_1 + n_1 l_3) + F_3 (l_3 m_1 + l_1 m_3), \\
c_{36}' &= A_3 l_1 l_2 + B_3 m_1 m_2 + C_3 n_1 n_2 + D_3 (m_1 n_2 + m_2 n_1)
\end{aligned}$$

$$+ E_3(n_1 l_2 + n_2 l_1) + F_3(l_1 m_2 + l_2 m_1).$$

ただし

$$\begin{aligned} A_3 &= l_3^2 c_{11} + m_3^2 c_{12} + n_3^2 c_{13} + 2m_3 n_3 c_{14} + 2n_3 l_3 c_{15} + 2l_3 m_3 c_{16}, \\ B_3 &= l_3^2 c_{12} + m_3^2 c_{22} + n_3^2 c_{23} + 2m_3 n_3 c_{24} + 2n_3 l_3 c_{25} + 2l_3 m_3 c_{26}, \\ C_3 &= l_3^2 c_{13} + m_3^2 c_{23} + n_3^2 c_{33} + 2m_3 n_3 c_{34} + 2n_3 l_3 c_{35} + 2l_3 m_3 c_{36}, \\ D_3 &= 2(l_3^2 c_{14} + m_3^2 c_{24} + n_3^2 c_{34} + 2m_3 n_3 c_{44} + 2n_3 l_3 c_{45} + 2l_3 m_3 c_{46}), \\ E_3 &= 2(l_3^2 c_{15} + m_3^2 c_{25} + n_3^2 c_{35} + 2m_3 n_3 c_{45} + 2n_3 l_3 c_{55} + 2l_3 m_3 c_{56}), \\ F_3 &= 2(l_3^2 c_{16} + m_3^2 c_{26} + n_3^2 c_{36} + 2m_3 n_3 c_{46} + 2n_3 l_3 c_{56} + 2l_3 m_3 c_{66}). \end{aligned}$$

$$c_{41}' = c_{14}',$$

$$c_{42}' = c_{24}',$$

$$c_{43}' = c_{34}',$$

$$c_{44}' = A_4 l_2 l_3 + B_4 m_2 m_3 + C_4 n_2 n_3 + D_4 (m_2 n_3 + m_3 n_2) + E_4 (n_2 l_3 + n_3 l_2) + F_4 (l_2 m_3 + l_3 m_2),$$

$$c_{45}' = A_4 l_3 l_1 + B_4 m_3 m_1 + C_4 n_3 n_1 + D_4 (m_3 n_1 + m_1 n_3) + E_4 (n_3 l_1 + n_1 l_3) + F_4 (l_3 m_1 + l_1 m_3),$$

$$c_{46}' = A_4 l_1 l_2 + B_4 m_1 m_2 + C_4 n_1 n_2 + D_4 (m_1 n_2 + m_2 n_1) + E_4 (n_1 l_2 + n_2 l_1) + F_4 (l_1 m_2 + l_2 m_1).$$

ただし

$$A_4 = l_2 l_3 c_{11} + m_2 m_3 c_{12} + n_2 n_3 c_{13} + (m_2 n_3 + m_3 n_2) c_{14} + (n_2 l_3 + n_3 l_2) c_{15} + (l_2 m_3 + l_3 m_2) c_{16},$$

$$B_4 = l_2 l_3 c_{12} + m_2 m_3 c_{22} + n_2 n_3 c_{23} + (m_2 n_3 + m_3 n_2) c_{24} + (n_2 l_3 + n_3 l_2) c_{25} + (l_2 m_3 + l_3 m_2) c_{26},$$

$$C_4 = l_2 l_3 c_{13} + m_2 m_3 c_{23} + n_2 n_3 c_{33} + (m_2 n_3 + m_3 n_2) c_{34} + (n_2 l_3 + n_3 l_2) c_{35} + (l_2 m_3 + l_3 m_2) c_{36},$$

$$D_4 = 2\{l_2 l_3 c_{14} + m_2 m_3 c_{24} + n_2 n_3 c_{34} + (m_2 n_3 + m_3 n_2) c_{44} + (n_2 l_3 + n_3 l_2) c_{45} + (l_2 m_3 + l_3 m_2) c_{46}\},$$

$$E_4 = 2\{l_2 l_3 c_{15} + m_2 m_3 c_{25} + n_2 n_3 c_{35} + (m_2 n_3 + m_3 n_2) c_{45} + (n_2 l_3 + n_3 l_2) c_{55} + (l_2 m_3 + l_3 m_2) c_{56}\},$$

$$F_4 = 2\{l_2 l_3 c_{16} + m_2 m_3 c_{26} + n_2 n_3 c_{36} + (m_2 n_3 + m_3 n_2) c_{46} + (n_2 l_3 + n_3 l_2) c_{56} + (l_2 m_3 + l_3 m_2) c_{66}\}.$$

$$c_{51}' = c_{15}',$$

$$c_{52}' = c_{25}',$$

$$c_{53}' = c_{35}',$$

$$c_{54}' = c_{45}',$$

$$c_{55}' = A_5 l_3 l_1 + B_5 m_3 m_1 + C_5 n_3 n_1 + D_5 (m_3 n_1 + m_1 n_3) + E_5 (n_3 l_1 + n_1 l_3) + F_5 (l_3 m_1 + l_1 m_3),$$

$$c_{56}' = A_5 l_1 l_2 + B_5 m_1 m_2 + C_5 n_1 n_2 + D_5 (m_1 n_2 + m_2 n_1) + E_5 (n_1 l_2 + n_2 l_1) + F_5 (l_1 m_2 + l_2 m_1).$$

ただし

$$\begin{aligned}
 A_5 &= l_3 l_1 c_{11} + m_3 m_1 c_{12} + n_3 n_1 c_{13} + (m_3 n_1 + m_1 n_3) c_{14} + (n_3 l_1 + n_1 l_3) c_{15} \\
 &\quad + (l_3 m_1 + l_1 m_3) c_{16}, \\
 B_5 &= l_3 l_1 c_{12} + m_3 m_1 c_{22} + n_3 n_1 c_{23} + (m_3 n_1 + m_1 n_3) c_{24} + (n_3 l_1 + n_1 l_3) c_{25} \\
 &\quad + (l_3 m_1 + l_1 m_3) c_{26}, \\
 C_5 &= l_3 l_1 c_{13} + m_3 m_1 c_{23} + n_3 n_1 c_{33} + (m_3 n_1 + m_1 n_3) c_{34} + (n_3 l_1 + n_1 l_3) c_{35} \\
 &\quad + (l_3 m_1 + l_1 m_3) c_{36}, \\
 D_5 &= 2\{l_3 l_1 c_{14} + m_3 m_1 c_{24} + n_3 n_1 c_{34} + (m_3 n_1 + m_1 n_3) c_{44} + (n_3 l_1 + n_1 l_3) c_{45} \\
 &\quad + (l_3 m_1 + l_1 m_3) c_{46}\}, \\
 E_5 &= 2\{l_3 l_1 c_{15} + m_3 m_1 c_{25} + n_3 n_1 c_{35} + (m_3 n_1 + m_1 n_3) c_{45} + (n_3 l_1 + n_1 l_3) c_{55} \\
 &\quad + (l_3 m_1 + l_1 m_3) c_{56}\}, \\
 F_5 &= 2\{l_3 l_1 c_{16} + m_3 m_1 c_{26} + n_3 n_1 c_{36} + (m_3 n_1 + m_1 n_3) c_{46} + (n_3 l_1 + n_1 l_3) c_{56} \\
 &\quad + (l_3 m_1 + l_1 m_3) c_{66}\}.
 \end{aligned}$$

$$c_{61}' = c_{16}',$$

$$c_{62}' = c_{26}',$$

$$c_{63}' = c_{36}',$$

$$c_{64}' = c_{46}',$$

$$c_{65}' = c_{56}',$$

$$\begin{aligned}
 c_{66}' &= A_6 l_1 l_2 + B_6 m_1 m_2 + C_6 n_1 n_2 + D_6 (m_1 n_2 + m_2 n_1) + E_6 (n_1 l_2 + n_2 l_1) \\
 &\quad + F_6 (l_1 m_2 + l_2 m_1).
 \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}
 A_6 &= l_1 l_2 c_{11} + m_1 m_2 c_{12} + n_1 n_2 c_{13} + (m_1 n_2 + m_2 n_1) c_{14} + (n_1 l_2 + n_2 l_1) c_{15} \\
 &\quad + (l_1 m_2 + l_2 m_1) c_{16}, \\
 B_6 &= l_1 l_2 c_{12} + m_1 m_2 c_{22} + n_1 n_2 c_{23} + (m_1 n_2 + m_2 n_1) c_{24} + (n_1 l_2 + n_2 l_1) c_{25} \\
 &\quad + (l_1 m_2 + l_2 m_1) c_{26}, \\
 C_6 &= l_1 l_2 c_{13} + m_1 m_2 c_{23} + n_1 n_2 c_{33} + (m_1 n_2 + m_2 n_1) c_{34} + (n_1 l_2 + n_2 l_1) c_{35} \\
 &\quad + (l_1 m_2 + l_2 m_1) c_{36}, \\
 D_6 &= 2\{l_1 l_2 c_{14} + m_1 m_2 c_{24} + n_1 n_2 c_{34} + (m_1 n_2 + m_2 n_1) c_{44} + (n_1 l_2 + n_2 l_1) c_{45} \\
 &\quad + (l_1 m_2 + l_2 m_1) c_{46}\}, \\
 E_6 &= 2\{l_1 l_2 c_{15} + m_1 m_2 c_{25} + n_1 n_2 c_{35} + (m_1 n_2 + m_2 n_1) c_{45} + (n_1 l_2 + n_2 l_1) c_{55} \\
 &\quad + (l_1 m_2 + l_2 m_1) c_{56}\}, \\
 F_6 &= 2\{l_1 l_2 c_{16} + m_1 m_2 c_{26} + n_1 n_2 c_{36} + (m_1 n_2 + m_2 n_1) c_{46} + (n_1 l_2 + n_2 l_1) c_{56} \\
 &\quad + (l_1 m_2 + l_2 m_1) c_{66}\}.
 \end{aligned}$$

5. 弾性係数の変換

弾性係数の変換公式は、弾性定数の場合と全く同様に考えて求めることができる。いま新直交座標系における弾性係数を s_{ij}' とすれば、その系で考えた歪みと応力の関

係は

$$\begin{bmatrix} e_{xx}' \\ e_{yy}' \\ e_{zz}' \\ e_{yz}' \\ e_{zx}' \\ e_{xy}' \end{bmatrix} = [s_{ij}'] \begin{bmatrix} X_x' \\ Y_y' \\ Z_z' \\ Y_z' \\ Z_x' \\ X_y' \end{bmatrix} \quad (38)$$

である。この(38)式の左辺に(20)→(31)→(7)の各式を順次代入して結局次の(39)式を得る。

すなわち

$$[s_{ij}'] = \mathbf{M}_3 [s_{ij}] \mathbf{M}_1 = [c_{ij}']^{-1}. \quad (39)$$

6. 各種結晶系の弾性定数の変換

総ての結晶は、その結晶軸の種類および空間格子の対称性によって七つの結晶系に分けられ、更に32の Crystal Class に分類される。

従って、弾性定数も各結晶系によって夫々固有な配置をとり、それ等は第1図のような直交座標軸の回転に伴って次のように変換される。

すなわち

I. 三斜晶系 (Triclinic System; Classes 1, 2)

三斜晶系に属する結晶の弾性定数は

$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \quad (40)$$

であるので、これが新直交座標系 (O-x', y', z') では

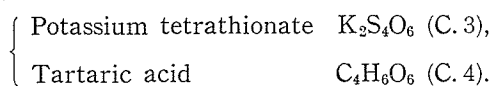
$$[c_{ij}'] = (37)式 \quad (41)$$

のように変換される。

これには、一例として Class 1 に分類される Calcium thiosulphate $\text{CaS}_2\text{O}_8 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ がある。

II. 単斜晶系 (Monoclinic System; Classes 3, 4, 5)

例



この単斜晶系に属する弾性定数は

$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{45} & c_{55} & 0 \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (42)$$

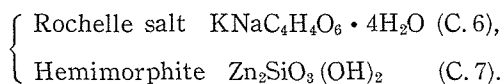
である。従って、(37)式において

$$c_{14} = c_{15} = c_{24} = c_{25} = c_{35} = c_{36} = c_{46} = c_{56} = 0 \quad (43)$$

とすれば、新直交座標系における $[c_{ij}']$ が求まる。

III. 菱面体晶系 (Rhombic System; Classes 6, 7, 8)

例



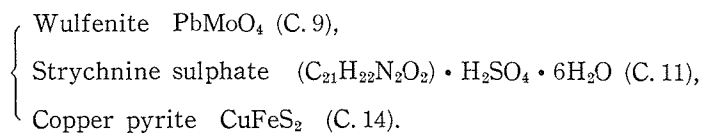
$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (44)$$

故に

$$[c_{ij}'] = \begin{bmatrix} \text{(37)式において} \\ c_{14} = c_{15} = c_{16} = c_{24} = c_{25} = c_{26} = 0, \\ c_{34} = c_{35} = c_{36} = c_{45} = c_{46} = c_{56} = 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

IV-(1). 正方晶系 (Tetragonal System; Classes 9, 11, 14, 15)

例



$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (46)$$

故に

$$[c_{ij}'] = \begin{bmatrix} \text{(37)式において} \\ c_{14} = c_{15} = c_{16} = c_{24} = c_{25} = c_{26} = 0, \\ c_{34} = c_{35} = c_{36} = c_{45} = c_{46} = c_{56} = 0, \\ c_{11} = c_{22}, \quad c_{23} = c_{13}, \quad c_{44} = c_{55} \end{bmatrix} \quad (47)$$

IV-(2). 正方晶系 (Tetragonal System ; Classes 10, 12, 13)

例

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Barium antimonyl tartrate } \text{Ba}(\text{SbO})_2(\text{C}_4\text{H}_4\text{O}_6)_2 \cdot \text{H}_2\text{O} \text{ (C. 10),} \\ \text{Nickel sulphate } \text{NiSO}_4 \cdot 6\text{H}_2\text{O} \text{ (C. 12),} \\ \text{Iodosuccinimide } \text{C}_4\text{H}_4\text{O}_2\text{NI} \text{ (C. 13).} \end{array} \right.$

$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & -c_{16} \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ c_{16} & -c_{16} & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (48)$$

故に

$$[c_{ij}'] = \begin{bmatrix} \text{(37)式において} \\ c_{14} = c_{15} = c_{24} = c_{25} = c_{34} = c_{35} = c_{36} = c_{45} = c_{46} = c_{56} = 0, \\ c_{11} = c_{22}, \quad c_{23} = c_{13}, \quad c_{44} = c_{55}, \quad c_{26} = -c_{16} \end{bmatrix} \quad (49)$$

V-(1). 三方晶系 (Trigonal System ; Classes 16, 17)

例

Sodium periodate $\text{NaIO}_4 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$ (C. 16).

$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & -c_{25} & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & -c_{14} & c_{25} & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ c_{14} & -c_{14} & 0 & c_{44} & 0 & c_{25} \\ -c_{25} & c_{25} & 0 & 0 & c_{44} & c_{14} \\ 0 & 0 & 0 & c_{25} & c_{14} & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} \end{bmatrix}. \quad (50)$$

故に

$$[c_{ij}'] = \begin{bmatrix} \text{(37)式において} \\ c_{16}=c_{26}=c_{34}=c_{35}=c_{36}=c_{45}=0, \\ c_{11}=c_{22}, \quad c_{15}=-c_{25}, \quad c_{14}=-c_{24}=c_{56}, \\ c_{23}=c_{13}, \quad c_{46}=c_{25}, \quad c_{66}=\frac{c_{11}-c_{12}}{2} \end{bmatrix}. \quad (51)$$

V-(2). 三方晶系 (Trigonal System; Classes 18, 20, 21)

例

$$\begin{cases} \text{Quartz } \text{SiO}_2 \text{ (C. 18),} \\ \text{Tourmaline } \text{Si}_4\text{O}_{19}(\text{B}\cdot\text{OH})_2\text{Al}_2\text{R}_9 (\text{R}=\frac{1}{3}\text{Al}, \frac{1}{2}\text{Mg}, \frac{1}{2}\text{Fe}, \\ \text{Li, Na, H) (C. 20).} \end{cases}$$

$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & -c_{14} & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ c_{14} & -c_{14} & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{14} & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} \end{bmatrix}. \quad (52)$$

故に

$$[c_{ij}'] = \begin{bmatrix} \text{(37)式において} \\ c_{15}=c_{16}=c_{25}=c_{26}=c_{34}=c_{35}=c_{36}=c_{45}=c_{46}=0, \\ c_{11}=c_{22}, \quad c_{13}=c_{23}, \quad c_{14}=-c_{24}=c_{56}, \\ c_{44}=c_{55}, \quad c_{66}=\frac{c_{11}-c_{12}}{2} \end{bmatrix}. \quad (53)$$

VI. 六方晶系 (Hexagonal System; Classes 19, 22, 23, 24, 25, 26, 27)

例

Silver hydrogen phosphate Ag_2HPO_4 (C. 22),
 Nephelite $\text{K}_2\text{Na}_6\text{Al}_5\text{Si}_9\text{O}_{34}$ (C. 23),
 Barium antimonyl tartrate with pot. nitrate
 $(\text{C}_4\text{H}_4\text{O}_6)_2(\text{SbO})_2\text{Ba}\cdot\text{KNO}_3$ (C. 24),
 Zincite ZnO (C. 26).

$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} \end{bmatrix}. \quad (54)$$

故に

$$[c_{ij}'] = \begin{bmatrix} \text{(37)式において} \\ c_{14}=c_{15}=c_{16}=c_{24}=c_{25}=c_{26}=c_{34}=c_{35}=c_{36}=0, \\ c_{45}=c_{46}=c_{56}=0, \\ c_{11}=c_{22}, \quad c_{13}=c_{23}, \quad c_{44}=c_{55}, \quad c_{66}=\frac{c_{11}-c_{12}}{2} \end{bmatrix}. \quad (55)$$

VII. 立方晶系 (Cubic System; Classes 28 to 32)

例

Sodium chlorate NaClO_3 (C. 28),
 Zinc blende ZnS (C. 31).

$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix}. \quad (56)$$

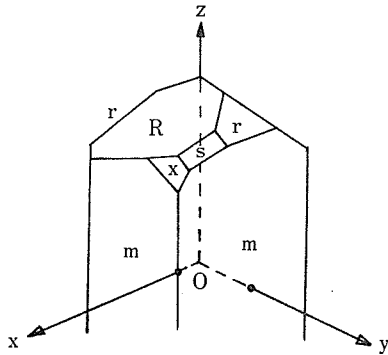
故に

$$[c_{ij}'] = \begin{bmatrix} \text{(37)式において} \\ c_{14}=c_{15}=c_{16}=c_{24}=c_{25}=c_{26}=c_{34}=c_{35}=c_{36}=0, \\ c_{45}=c_{46}=c_{56}=0, \\ c_{12}=c_{13}=c_{23}, \quad c_{11}=c_{22}=c_{33}, \quad c_{44}=c_{55}=c_{66} \end{bmatrix}. \quad (57)$$

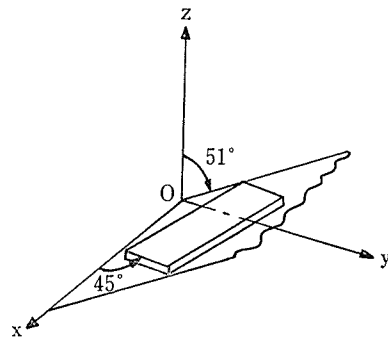
なお、各種結晶系の弾性係数 $[s_{ij}]$ の新直交座標系への変換 $[s'_{ij}]$ についても、弾性定数の場合と同様にして(39)式から求めることができるが、これについては割愛する。

7. GT板水晶振動子の弾性定数

一例として、主結晶軸に対しある角度で切り出された水晶振動子の弾性定数について考えてみよう。一般に水晶は第2図のような六角柱をしており、その端は六角錐をなしている。水晶の頂点を通る主結晶軸の z 軸(=光軸)と、その z 軸に垂直な平面内にある3本の x 軸(=電気軸)とが水晶の結晶軸である。なお、 x 軸と同一平面内にあり、かつ x 軸に対し直角な軸を y 軸(=機械軸)と呼ぶ。水晶は x 軸については二回対称で、また z 軸の回りでは三回対称であるので、 $(O-x, y, z)$ 直交座標系における弾性定数は(47)式ようになる。すなわち水晶(=α水晶)は三方晶系の Class 18 に属するのである。



第 2 図



第 3 図

いま第3図のように水晶の x 軸を含む平面を x 軸を中心として 51° 回転し、その平面内において長辺あるいは短辺が x 軸に対し 45° をなすように切り出された矩形薄板状水晶片をGT板水晶振動子という。このような角度で切り出された水晶片の長辺および短辺の寸法を適切に調整することによって、広範囲な温度領域に亘って零周波数温度係数を有する極めて優秀な水晶振動子を製作することができるのである。

さて、これよりGT板水晶振動子の弾性定数を(47)式の変換公式によって計算してみることにする。

まず第1図と第3図とを比較することによって、

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= 45^\circ, \\ \theta &= 0, \\ \psi &= 51^\circ \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

なることが判る。

従って、方向余弦は(2)式から

$$\left. \begin{aligned}
 l_1 &= \cos 45^\circ, \\
 l_2 &= -\sin 45^\circ \cos 51^\circ, \\
 l_3 &= \sin 45^\circ \sin 51^\circ, \\
 m_1 &= \sin 45^\circ, \\
 m_2 &= \cos 45^\circ \cos 51^\circ, \\
 m_3 &= -\cos 45^\circ \sin 51^\circ, \\
 n_1 &= 0, \\
 n_2 &= \sin 51^\circ, \\
 n_3 &= \cos 51^\circ
 \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

となる。

故に(59)式を(37)式に代入して整理すれば、次の(60)式が容易に求まる。すなわち

(60)式：

$$c_{11}' = c_{11},$$

$$c_{12}' = c_{12} \cos^2 \phi + c_{13} \sin^2 \phi - \sqrt{2} c_{14} \sin \phi \cos \phi,$$

$$c_{13}' = c_{12} \sin^2 \phi + c_{13} \cos^2 \phi + \sqrt{2} c_{14} \cos \phi \sin \phi,$$

$$c_{14}' = \left(\frac{c_{11} - 3c_{12} + 2c_{13}}{2} \right) \sin \phi \cos \phi + \sqrt{2} c_{14} (2\sin^2 \phi - 1),$$

$$c_{15}' = \sqrt{2} c_{14} \cos \phi,$$

$$c_{16}' = \sqrt{2} c_{14} \sin \phi,$$

$$c_{21}' = c_{12}',$$

$$c_{22}' = c_{11} \cos^4 \phi + 2\sqrt{2} c_{14} \sin \phi \cos^3 \phi + c_{33} \sin^4 \phi + 2(c_{13} + 2c_{44}) \sin^2 \phi \cos^2 \phi,$$

$$c_{23}' = (c_{11} + c_{33} - 4c_{44}) \sin^2 \phi \cos^2 \phi + c_{13} (\sin^4 \phi + \cos^4 \phi) + \sqrt{2} c_{14} (2 \sin^2 \phi - 1) \sin \phi \cos \phi,$$

$$c_{24}' = (c_{13} + 4c_{44} - c_{11}) \sin \phi \cos^3 \phi + (c_{33} - c_{13} - 4c_{44}) \sin^3 \phi \cos \phi + \sqrt{2} c_{14} (1 - 4 \sin^2 \phi) \cos^2 \phi,$$

$$c_{25}' = \sqrt{2} c_{14} (2 \sin^2 \phi - 1) \cos \phi,$$

$$c_{26}' = -2\sqrt{2} c_{14} \sin \phi \cos^2 \phi,$$

$$c_{31}' = c_{13}',$$

$$c_{32}' = c_{23}',$$

$$c_{33}' = c_{11} \sin^4 \phi + (2c_{13} + 4c_{44}) \sin^2 \phi \cos^2 \phi - 2\sqrt{2} c_{14} \sin^3 \phi \cos \phi + c_{33} \cos^4 \phi,$$

$$c_{34}' = \left(\frac{-3c_{11} + c_{12}}{2} \right) \sin^3 \phi \cos \phi + (c_{13} + 4c_{44})(2 \sin^2 \phi - 1) \sin \phi \cos \phi$$

$$+ \sqrt{2} c_{14} (4 \cos^2 \phi - 1) \sin^2 \phi + c_{33} \sin \phi \cos^3 \phi,$$

$$c_{35}' = -2\sqrt{2} c_{14} \sin^2 \phi \cos \phi,$$

$$c_{36}' = \sqrt{2} c_{14} (1 - 2 \sin^2 \phi) \sin \phi,$$

$$c_{41}' = c_{14}',$$

$$c_{42}' = c_{24}',$$

$$c_{43}' = c_{34}',$$

$$c_{44}' = \left(\frac{3c_{11} - c_{12}}{2} - 2c_{13} + c_{33} \right) \sin^2 \phi \cos^2 \phi + 2\sqrt{2} c_{14} (2 \sin^2 \phi - 1) \sin \phi \cos \phi$$

$$+ 2c_{44} (2 \sin^2 \phi - 1)^2,$$

$$c_{45}' = \frac{\sqrt{2}}{2} c_{14} (4 \cos^2 \phi - 1) \sin \phi,$$

$$c_{46}' = \frac{\sqrt{2}}{2} c_{14} (4 \sin^2 \phi - 1) \cos \phi,$$

$$c_{51}' = c_{15}',$$

$$c_{52}' = c_{25}',$$

$$c_{53}' = c_{35}',$$

$$c_{54}' = c_{45}',$$

$$c_{55}' = 3 \frac{\sqrt{2}}{2} c_{14} \sin \phi \cos \phi + 2c_{44} \cos^2 \phi + c_{66} \sin^2 \phi,$$

$$c_{56}' = \frac{\sqrt{2}}{2} c_{14} (3 \sin^2 \phi - 1) + (2c_{44} - c_{66}) \sin \phi \cos \phi,$$

$$c_{61}' = c_{16}',$$

$$c_{62}' = c_{26}',$$

$$c_{63}' = c_{36}',$$

$$c_{64}' = c_{46}',$$

$$c_{65}' = c_{56}',$$

$$c_{63}' = -3 \frac{\sqrt{2}}{2} c_{14} \sin \phi \cos \phi + 2c_{44} \sin^2 \phi + c_{66} \cos^2 \phi.$$

ただし、 ϕ は(58)式で与えられており、 $\phi = 51^\circ$ である。

8. 結 言

以上応力テンソルを直交座標系 $(O-x, y, z)$ からそれと原点を同じくした新しい直交座標系 $(O-x', y', z')$ へ変換する簡便な方法を提案し、つづいて拡張された Hooke の法則等を用いて、任意の方位で切り出された単結晶板の弾性定数および弾性係数の変換公式を求めた。これ等の変換公式は各種結晶系に適用でき、一例として G T 板水晶振動子の弾性定数について計算した。

終りにのぞみ終始御指導御鞭撻を賜わった東京工業大学教授福与人八先生に深く感謝致します。また、日頃いろいろと御指導を賜わる本学部教授森本弥三八先生ならびに本学部電気工学科、通信工学科の諸先生方に厚く御礼申し上げます。

文 献

- 1) 古賀; 圧電気と高周波, オーム社, (昭12)。
- 2) 福与; 探針法に基づく水晶振動子の振動状態に関する研究, 東京工業大学学報 No. 1, (昭30)。
- 3) W. G. Cady; "Piezoelectricity,, Dover, (1962).
- 4) A. E. H. Love; "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity,, Dover, (1944).
- 5) 安達; ベクトルとテンソル, 培風館, (昭36)。
- 6) 高安定発振器専門委員会; 高安定水晶発振器, 電気学会, (昭39)。

Summary

Transformation formulae for the elastic stiffness and compliance constants in any oblique cuts of single crystals

MITSUO NAKAZAWA

(Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering.)

The general transformation equations for the components of stress and strain from an axial system ($o-x', y', z'$) to the original system ($o-x, y, z$), are considered first. Especially the transformation method for the stress tensor is a new idea.

By using the results mentioned above and then applying them to the generalized Hooke's Law, the general transformation formulae of the elastic stiffness constants $[c_{ij}]$ and compliance constants $[s_{ij}]$ are answered with direction cosines l_i, m_i, n_i ($i=1, 2, 3$).

In conclusion, these formulae are applicable to the transformations of $[c_{ij}]$ or $[s_{ij}]$ for any oblique cuts of single crystals.