

縁材のある円板の強度 (第2報)

—中心に支持荷重がある場合—

佐々木三郎

(昭和41年4月28日受理)

1. はしがき

本報告は、縁材のある円板（縁材の断面形は円板の中央面に対称であるとする）の周辺に任意の面内荷重が作用し、中心でこれを支えたときの円板の応力分布および縁材の断面力を計算したもので、第1報¹⁾周辺にのみ軸対称面内荷重が作用した場合の内容を包含し拡張したものである。

このような構造物は、周辺に枠のある回転円板やスポークのある車輪等の特別な場合とも考えられ、後者については J. S. Pippard²⁾らの一連の研究が発表されている。

一般に縁材のある円板を個々の断面形について、3次元弾性論によって解くのは非常な困難が予想され、普通縁材を円板と同じ厚さに圧縮した等価弾性率を導入し、2次元弾性論によって計算するのであるが³⁾、この場合でも縁材(円輪)の計算は薄肉になる程収束性が悪く、またその形状によっては無理なこともあると思われる。

縁材の半径方向の厚さが円板の半径に比べてそれほど大きくないときは、むしろ曲り梁と考へた方が計算も容易であろうと思われ、さきに筆者によって得られた曲り梁の比較的精度のよい結果⁴⁾を適用することにした。すなわち

縁材には曲り梁の解を、円板には複素応用関数を利用し、接合部の連続条件から接合部の応力を定める係数を求め、これより円板の応力、縁材の断面力を計算した。内容はつぎのとおりである。

第2節…縁材・円板の形状材質から定まる定数、荷重および計算式の記号を一括した。

第3節…軸対称荷重について、縁材の断面力・変位および円板の応力・変位を求め、接合部の連続条件から応力係数を定めるまでの計算を示した。

第4節…逆対称重について、第3節と同じ計算を示した。

第5節…任意荷重に対する解を見易い形で表示し、円板の応力、縁材の断面力の計算式をまとめた。なお円板の応力におよぼす縁材の剛性の影響を知るため、縁材が剛($\xi = \infty$)、円板のみ($\xi = 0$)の特別な場合について述べた。

第6節…計算例として、縁材が長方形断面をもつ円板に、3通りの集中荷重(法線、接線およびモーメント荷重)が作用した場合を計算し、併せて円板の応力におよぼす影響を知るため $\xi = \infty$ 、 0 の場合の解と比較した。応力分布のグラフは繁雑をさけるため、荷重方向軸および垂直軸上の応力分布のみを示した。

第7節には以上を要約し、本文で説明が不十分な個所を附録I、IIで与えた。

* 機械工学教室、講師

2. 主 な 記 号 (前報告の記号の一部を変更した)

- R_0, R, ρ 縁材の外周, 内周, 中心線半径 (mm)
 A, t 縁材の断面積 (mm^2), 円板の厚さ (mm)
 E_r, G_r, ν_r 縁材の縦・横弾性係数 (kg/mm^2), ポアソン比
 E, G, ν 円板の縦・横弾性係数 (kg/mm^2), ポアソン比
 $e_0 = \frac{R_0}{\rho}, e_i = \frac{R}{\rho}$ 縁材の半径方向厚さを表わす数
 $\kappa = -\frac{1}{A} \int_A \frac{\eta}{\rho + \eta} dA$ 縁材を曲り梁と考えたときの断面係数
 $\zeta = k \frac{E_r}{G_r}$ 縁材のせん断係数 (k は断面形による定数)
 $\xi = \frac{AE_r}{\rho t E}$ 縁材と円板の相当剛性比
 p_r, p_θ, m 外周に作用する面内荷重の法線・接線成分 (kg/rad) およびモーメント荷重 ($\text{kg}\cdot\text{mm}/\text{rad}$)
 $\alpha_0, \alpha_n, \dots, \nu_n$ 同上の フーリエ係数 ($\text{kg}/\text{rad}, \text{kg}\cdot\text{mm}/\text{rad}$)
 p'_r, p'_θ 円板が縁材に及ぼす法線・接線荷重 (kg/rad)
 $\alpha'_0, \alpha'_n, \dots, \delta'_n$ 同上の フーリエ係数 (kg/rad)
 a_0, a_n, \dots, d_n 縁材が円板に及ぼす接合部応力のフーリエ係数 ($\text{kg}/\text{mm}^2/\text{rad}$)
 X, Y, M_0 円板の中心に作用する集中荷重 (kg) およびモーメント荷重 ($\text{kg}\cdot\text{mm}$)
 N, V, M 縁材の断面力すなわち軸力・せん断力 (kg) 曲げモーメント ($\text{kg}\cdot\text{mm}$)
 $\delta_r, \delta_\theta, \delta'_r, \delta'_\theta$ 縁材の内周変位 (mm)
 $u_r, u_\theta, u'_r, u'_\theta$ 円板の外周変位 (mm)
 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ 円板の応力 (kg/mm^2)

$A = r/R$ 円板内の位置を表わす変数 (r は中心とその点の間の距離)

$$\left. \begin{aligned}
 \Gamma_1 &= (3 + \nu) \frac{1}{A} - (1 + \nu)A, & \Gamma_2 &= (1 - \nu) \frac{1}{A} + (1 + \nu)A, \\
 \Gamma_3 &= (1 - \nu) \frac{1}{A} + 3(1 + \nu)A, \\
 \psi_j^i &= \frac{1}{2}(iA^{n-2} - jA^n). \quad \text{ただし } i, j = (n-2), n, (n+2) \\
 D &= 1 - 2A \cos \theta + A^2.
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned}
 K_{si} &= \frac{\zeta(1-e_s)(1-e_i)}{1+\kappa\zeta} + e_s e_i, & K_i &= \frac{\zeta(1-e_i)}{1+\kappa\zeta} - e_i, \\
 K'_{1(n)} &= \frac{1}{\kappa(n^2-1)} + \frac{\zeta n^2}{n^2-1}, & K'_{2s(n)} &= \frac{1}{\kappa} \left(\frac{e_s}{n} - \frac{n}{n^2-1} \right) - \frac{\zeta n}{n^2-1}, \\
 K'_{3si(n)} &= \frac{n^2-1}{\kappa} \left(\frac{e_s}{n} - \frac{n}{n^2-1} \right) \left(\frac{e_i}{n} - \frac{n}{n^2-1} \right) + \frac{n^2-1}{n^2} e_s e_i + \frac{\zeta}{n^2-1}, \\
 K'_{4(n)} &= -\frac{1}{\kappa n}, & K'_{5(n)} &= -\frac{n^2-1}{\kappa n} \left(\frac{e_i}{n} - \frac{n}{n^2-1} \right) - \frac{n^2-1}{n^2} e_i, \\
 [K_1(n), K_{2s}(n), \dots, K_5(n)] &= \frac{1}{n^2-1} [K'_{1(n)}, K'_{2s(n)}, \dots, K'_{5(n)}], \\
 H_1(n) &= \xi(2n-1+\nu) + K'_1(n), & f &= 2\left\{ \xi(3-\nu) + K_{ii} \right\}, \\
 H_2(n) &= \xi(n-2-n\nu) + K'_{2i}(n), & F &= H_1(n)H_3(n) - H_2^2(n), \\
 H_3(n) &= \xi(2n-1+\nu) + K'_{3ii}(n),
 \end{aligned} \right\} (2)$$

ただし $K'_i(n), \dots, H_3(n)$ は $n \geq 2$ について計算し, s は $0, i$ のいずれかを表わす。
 A_0, A_1, \dots, A_5 および $\Pi_1(n), \Pi_2(n), \dots, \Pi_6(n)$ は(40)に示す。

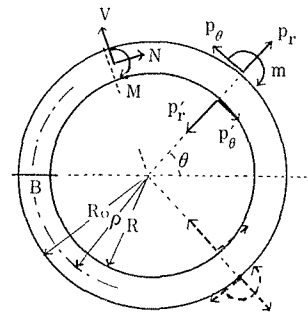
3. 軸対称荷重⁵⁾

3.1 縁材の断面力, 内周の変位⁴⁾

外周, 内周にそう軸対称荷重を次のフーリエ級数で与える

$$\left. \begin{aligned}
 p_r &= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\theta, \\
 p_\theta &= \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin n\theta, \\
 m &= \rho \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \sin n\theta.
 \end{aligned} \right\} (3)$$

$$\left. \begin{aligned}
 p'_r &= \alpha'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha'_n \cos n\theta, \\
 p'_\theta &= \sum_{n=1}^{\infty} \beta'_n \sin n\theta.
 \end{aligned} \right\} (4)$$



第1図 円環(軸対称荷重)

軸方向の力のつりあいより

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha'_1 - \beta'_1. \tag{5}$$

縁材に貯えられる ひずみエネルギー をつぎのようにとり

$$U = \frac{2}{AE} \left[\frac{1+\kappa}{2\kappa\rho} \int_0^\pi M^2 d\varphi + \frac{\rho}{2} \int_0^\pi N^2 d\varphi + \int_0^\pi MN d\varphi + \frac{\zeta\rho}{2} \int_0^\pi V^2 d\varphi \right]. \tag{6}$$

Castigliano の定理を用いて断面力・変位を計算すると (φ の代わりに θ を用いる)

$$\left. \begin{aligned} \text{軸力} : N &= \left[\alpha_0 + \frac{1}{1 + \kappa \zeta} \left\{ (e_s + \kappa \zeta) \beta_1 - \nu_1 \right\} \cos \theta - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} (\alpha_n - n \beta_n) \cos n\theta \right]_i^0, \\ \text{せん断力} : V &= \left[\frac{1}{1 + \kappa \zeta} \left\{ (e_s - 1) \beta_1 - \nu_1 \right\} \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} (n \alpha_n - \beta_n) \sin n\theta \right]_i^0, \\ \text{曲げモーメント} : M &= \rho \left[-\frac{\kappa}{1 + \kappa} \alpha_0 + \frac{\kappa \zeta}{1 + \kappa \zeta} \left\{ (e_s - 1) \beta_1 - \nu_1 \right\} \cos \theta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^2 - 1} \alpha_n + \left(\frac{e_s}{n} - \frac{n}{n^2 - 1} \right) \beta_n - \frac{1}{n} \nu_n \right\} \cos n\theta \right]_i^0. \end{aligned} \right\} (7)$$

B 断面を固定したときの内周の変位 (δ_r, δ_θ) は

$$\left. \begin{aligned} \delta_r &= \frac{\rho}{AE_r} \left[\frac{1}{1 + \kappa} \alpha_0 + \left\{ \frac{1}{1 + \kappa} \alpha_0 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n X_{ns}(n) \right\} \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} X_{ns}(n) \cos n\theta \right]_i^0, \\ \delta_\theta &= \frac{\rho}{AE_r} \left[-\left\{ \frac{1}{1 + \kappa} \alpha_0 - K_{si} \beta_1 - K_i \nu_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n X_{ns}(n) \right\} \sin \theta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} Y_{ns}(n) \sin n\theta \right]_i^0, \end{aligned} \right\} (8)$$

ただし $X_{ns}(n) = K_1(n) \alpha_n + K_2(n) \beta_n + K_4(n) \nu_n,$
 $Y_{ns}(n) = K_2(i) \alpha_n + K_3(i) \beta_n + K_5(n) \nu_n.$

(註) (7)(8)の $\left[\right]_i^0$ は $\left[\right]_i$ 内の $\left[\alpha_n, \beta_n, \nu_n, e_s, K_{2i}(n), \dots \right]$ の項に, 外周の値 $\left[\alpha_n, \beta_n, \nu_n, e_0, K_{20}(n), \dots \right]$ とおいた式から, 内周の値 $\left[\alpha'_n, \beta'_n, 0, e_i, K_{2i}(n), \dots \right]$ とおいた式を引くことを意味する。

3.2 円板の応力, 変位

一般に $\varphi(z), \psi(z)$ を複素応力函数とすると

$$\text{Airy の応力函数} : F(r, \theta) = \Re \left[\bar{z} \varphi(z) + \psi(z) \right].$$

極座標で表わした応力, 変位は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r - i\tau_{r\theta} &= 2\Re \left[\varphi'(z) \right] - \left\{ \bar{z} \varphi''(z) + \psi''(z) \right\} e^{i2\theta}, \\ \sigma_\theta &= 2\Re \left[\varphi'(z) \right] + \Re \left[\left\{ z \varphi''(z) + \psi''(z) \right\} e^{i2\theta} \right], \\ u_r - iu_\theta &= \frac{1}{E} \left\{ (3 - \nu) \overline{\varphi(z)} - (1 + \nu) \left[\bar{z} \varphi'(z) + \psi'(z) \right] \right\} e^{i\theta}. \end{aligned} \right\} (9)$$

円板の外周に軸対称応力

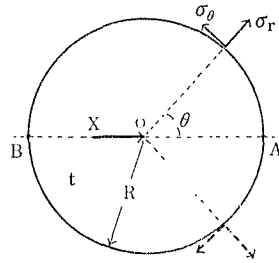
$$\sigma_r = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta, \quad \tau_{r\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta. \tag{10}$$

が作用し、中心集中力 X とつりあっていると

$$2 \int_0^{\pi} (\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) R t d\theta = X \quad \text{より}$$

$$a_1 - b_1 = -\frac{X}{\pi R t}. \tag{11}$$

$r=R$ で(10)を満足し、 $r \rightarrow 0$ で X を表わす $\varphi(z)$, $\psi(z)$ は



第2図 円板 (軸対称応力)

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{1+\nu}{8\pi t} X \left(\log z - \frac{z^2}{R^2} \right) + \frac{a_0}{2} z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + b_n}{2(n+1)} \frac{z^{n+1}}{R^n}, \\ \psi(z) &= \frac{3-\nu}{8\pi t} X z \log z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n a_n + (n-2) b_n}{2n(n-1)} \frac{z^n}{R^{n-2}}. \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

円板の応力は上式を(9)に代入して

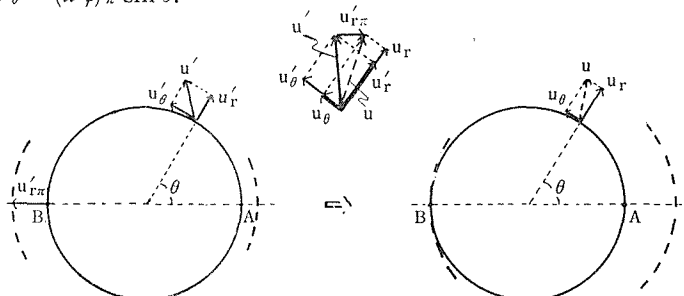
$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{\Gamma_1}{4\pi R t} X \cos \theta + a_0 + \frac{1}{2} \Delta (a_1 + b_1) \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} (\Phi_{n-2}^n a_n + \Phi_{n-2}^{n-2} b_n) \cos n\theta, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{\Gamma_2}{4\pi R t} X \sin \theta + \frac{1}{2} \Delta (a_1 + b_1) \sin \theta - \sum_{n=2}^{\infty} (\Phi_n^n a_n + \Phi_n^{n-2} b_n) \sin n\theta, \\ \sigma_\theta &= \frac{\Gamma_3}{4\pi R t} X \cos \theta + a_0 + \frac{3}{2} \Delta (a_1 + b_1) \cos \theta - \sum_{n=2}^{\infty} (\Phi_{n+2}^n a_n + \Phi_{n+2}^{n-2} b_n) \cos n\theta. \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

(12)を(9)に代入して求めた周上の変位 (u'_r , u'_θ) は

$$\left. \begin{aligned} u'_r &= \frac{R}{E} \left[-\frac{X}{8\pi R t} \left\{ 2(3-\nu)(1+\nu) \log R + (1+\nu)^2 \right\} + (1-\nu) a_0 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-3\nu}{4} (a_1 + b_1) \cos \theta + \sum_2^\infty A_n \cos n\theta \right], \\ u'_\theta &= \frac{R}{E} \left[\frac{X}{8\pi R t} \left\{ 2(3-\nu)(1+\nu) \log R + (1+\nu)(9+\nu) \right\} \sin \theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{5+\nu}{4} (a_1 + b_1) \sin \theta + \sum_2^\infty B_n \sin n\theta \right]. \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

B 点を固定した場合の原点に関する変位 (u_r, u_θ) は次の変換により

$$\left. \begin{aligned} u_r &= u'_r + (u'_r)_\pi \cos \theta, \\ u_\theta &= u'_\theta - (u'_r)_\pi \sin \theta. \end{aligned} \right\}$$



第3図 変位の変換(軸対称)

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{R}{E} \left[(1-\nu)a_0 + \left\{ (1-\nu)a_0 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n A_n \right\} \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \cos n\theta \right], \\ u_\theta &= \frac{R}{E} \left[- \left\{ (1-\nu)a_0 - \frac{1-3\nu}{2}a_1 - \frac{5+\nu}{2}b_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n A_n \right\} \sin \theta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \sin n\theta \right]. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\text{ただし } A_n = \frac{1}{n^2 - 1} \left\{ (2n - 1 + \nu) a_n + (n - n\nu - 2) b_n \right\},$$

$$B_n = \frac{1}{n^2 - 1} \left\{ (n - n\nu - 2) a_n + (2n - 1 + \nu) b_n \right\}.$$

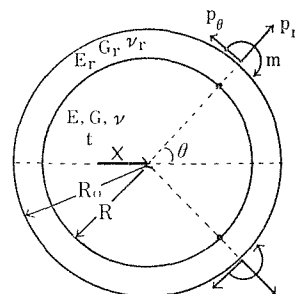
3.3 縁材のある円板 (連続の条件 $-a_0, a_n, b_n$ の決定)

縁材のある円板においては、外荷重 (3) および中心荷重 X によって接合部には、円板が縁材におよぼす力 (4)、縁材が円板におよぼす応力 (10) が生じ

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha'_n \cos n\theta &= Rt \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \theta \right), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \beta'_n \sin n\theta &= Rt \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{すなわち } \alpha'_0 &= Rta_0, \quad \alpha'_n = Rta_n, \\ \beta'_n &= Rtb_n. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\text{および } a_1 - b_1 = \frac{1}{Rt} (\alpha_1 - \beta_1) = -\frac{X}{\pi Rt}. \quad (17)$$



第4図 縁材のある円板(軸対称)

の関係が成立ち、さらに接合部の変位(縁材内周の変位, 円板外周の変位)はそれぞれ等しくなければならない

$$u_r = \delta_r, \quad u_\theta = \delta_\theta \tag{18}$$

(8), (15)の第1, 2式を等しくおき, これらがすべての θ の値に対して成立つためには

$$\left. \begin{aligned} \frac{R}{E}(1-\nu)a_0 &= \frac{\rho}{AE_r} \left[\frac{1}{1+\kappa} \alpha_0 \right]_i^0, & \frac{R}{E} \left(\frac{1-3\nu}{2} a_1 + \frac{5+\nu}{2} b_1 \right) &= \frac{\rho}{AE_r} \left[K_{si}\beta_1 + K_i\nu_1 \right]_i^0, \\ \frac{R}{E} A_n(n) &= \frac{\rho}{AE_r} \left[X_{ns}(n) \right]_i^0, & \frac{R}{E} B_n(n) &= \frac{\rho}{AE_r} \left[Y_{ns}(n) \right]_i^0. \end{aligned} \right\} \tag{19}$$

(16), (8)を代入し(17)とともに係数 a_0, a_n, b_n を定める次の連立方程式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \xi(1-\nu) + \frac{1}{1+\kappa} \right\} a_0 &= \frac{1}{Rt} \frac{1}{1+\kappa} \alpha_0, \\ a_1 - b_1 &= \frac{1}{Rt} (\alpha_1 - \beta_1), \\ \xi(1-3\nu)a_1 + \left\{ \xi(5+\nu) + 2K_{ii} \right\} b_1 &= \frac{2}{Rt} (K_{0i}\beta_1 + K_i\nu_1), \\ \left\{ \xi(2n-1+\nu) + K'_{1i}(n) \right\} a_n + \left\{ \xi(n-n\nu-2) + K'_{2i}(n) \right\} b_n \\ &= \frac{1}{Rt} \left\{ K'_{1i}(n)\alpha_n + K'_{20}(n)\beta_n + K'_4(n)\nu_n \right\}, \\ \left\{ \xi(n-n\nu-2) + K'_{2i}(n) \right\} a_n + \left\{ \xi(2n-1+\nu) + K'_{3i}(n) \right\} b_n \\ &= \frac{1}{Rt} \left\{ K'_{2i}(n)\alpha_n + K'_{30i}(n)\beta_n + K'_5(n)\nu_n \right\}. \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

a_0, a_n, b_n の値は第5節(39)式に一括したのでここでは省略する。

これらの値が定まると, 円板の応力は(13)により縁材の断面力は(7)―(16)を用いて一より計算することができる。

4. 逆対称荷重^{*)}

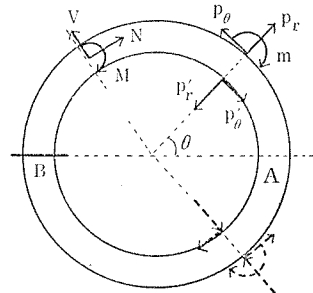
4.1 縁材の断面力, 内周の変位⁴⁾

外周, 内周にそう逆対称荷重を次のフーリエ級数で与える

$$\left. \begin{aligned} p_r &= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin n\theta, \\ p_\theta &= \gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \cos n\theta, \end{aligned} \right\} \tag{21}$$

* 計算の方法は第3節に準ずるので要点のみを記す。

$$\left. \begin{aligned} m &= \rho \left(\mu_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \cos n\theta \right), \\ p'_r &= \sum_{n=1}^{\infty} \delta'_n \sin n\theta, \\ p'_\theta &= \gamma'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma'_n \cos n\theta. \end{aligned} \right\} (22)$$



第5図 円環(逆対称荷重)

垂直軸方向の力およびモーメントのつりあいより

$$\delta_1 + \gamma_1 = \delta'_1 + \gamma'_1, \quad e_0 \gamma_0 - \mu_0 = e_i \gamma'_0. \quad (23)$$

ひずみエネルギーを(6)とし, Castigliano の定理より断面力は

$$\left. \begin{aligned} \text{軸力: } N &= \left[\frac{1}{1 + \kappa \zeta} \left\{ -(e_s + \kappa \zeta) \gamma_1 + \mu_1 \right\} \sin \theta - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} (\delta_n + n \gamma_n) \sin n\theta \right]_i^0, \\ \text{せん断力: } V &= \left[\gamma_0 + \frac{1}{1 + \kappa \zeta} \left\{ (1 - e_s) \gamma_1 + \mu_1 \right\} \cos \theta \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} (n \delta_n + \gamma_n) \cos n\theta \right]_i^0, \\ \text{曲げモーメント: } M &= \rho \left[\frac{\kappa \zeta}{1 + \kappa \zeta} \left\{ (1 - e_s) \gamma_1 + \mu_1 \right\} \sin \theta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^2 - 1} \delta_n - \left(\frac{e_s}{n} - \frac{n}{n^2 - 1} \right) \gamma_n + \frac{1}{n} \mu_n \right\} \sin n\theta \right]_i^0. \end{aligned} \right\} (24)$$

A, B 断面を固定したときの変位 (δ_r, δ_θ) は - B 断面を固定したとき A の変位は接線方向のみしか現われないことより-

$$\left. \begin{aligned} \delta_r &= \frac{\rho}{AE_r} \left[\left\{ -K_{si} \gamma_1 - K_i \mu_1 - \sum_{od}'' Z_{ns}(n) \right\} \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} W_{ns}(n) \sin n\theta \right]_i^0, \\ \delta_\theta &= \frac{\rho}{AE_r} \left[-\sum_{eo}' Z_{ns}(n) - \sum_{od}'' Z_{ns}(n) \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} Z_{ns}(n) \cos n\theta \right]_i^0, \end{aligned} \right\} (25)$$

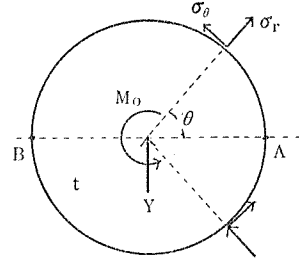
ただし $Z_{ns}(n) = -K_{2i}(n) \delta_n + K_{3si}(n) \gamma_n + K_5(n) \mu_n$
 $W_{ns}(n) = K_1(n) \delta_n - K_{2s}(n) \gamma_n - K_4(n) \mu_n.$

(註) $\left[\right]_i^0$ は前節第 3. 1 項(註)と同じ。 \sum_{eo}' は $n = 2, 4, 6, \dots$, \sum_{od}'' は $n = 3, 5, 7, \dots$ についての和を表わす。

4.2 円板の応力, 変位

円板の外周に逆対称応力

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin n\theta, \\ \tau_{r\theta} &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\theta. \end{aligned} \right\} (26)$$



第6図 円板(逆対称応力)

が作用し, 中心集中力 Y , モーメント M_0 とつりあっている

$$\begin{aligned} 2R \int_0^\pi \tau_{r\theta} R t d\theta &= M_0, \\ 2 \int_0^\pi (\sigma_r \sin \theta + \tau_{r\theta} \cos \theta) R t d\theta &= Y. \end{aligned}$$

$$\text{より } c_0 = -\frac{M_0}{2\pi R^2 t}, \quad c_1 + d_1 = -\frac{Y}{\pi R t}. \quad (27)$$

$r = R$ で(26)を満足し, $r \rightarrow 0$ で Y, M_0 を表わす $\varphi(z), \psi(z)$ は

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= i \left\{ -\frac{1+\nu}{8\pi t} Y \left(\log z + \frac{z^2}{R^2} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n - c_n}{2(n+1)} \frac{z^{n+1}}{R^n} \right\}, \\ \psi(z) &= i \left\{ \frac{1}{2\pi t} M_0 \log z - \frac{3-\nu}{8\pi t} Y z \log z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n d_n - (n-2)c_n}{2n(n-1)} \frac{z^n}{R^{n-2}} \right\}. \end{aligned} \right\} (28)$$

円板の応力は上式を(9)に代入して

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{\Gamma_1}{4\pi R t} Y \sin \theta + \frac{1}{2} A (d_1 - c_1) \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\Phi_{n-2}^n d_n - \Phi_{n-2}^{n-2} c_n \right) \sin n\theta, \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\Gamma_2}{4\pi R t} Y \cos \theta + \frac{1}{A^2} c_0 - \frac{1}{2} A (d_1 - c_1) \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\Phi_n^n d_n - \Phi_n^{n-2} c_n \right) \cos n\theta, \\ \sigma_\theta &= \frac{\Gamma_3}{4\pi R t} Y \sin \theta + \frac{3}{2} A (d_1 - c_1) \sin \theta - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\Phi_{n+2}^n d_n - \Phi_{n+2}^{n-2} c_n \right) \sin n\theta. \end{aligned} \right\} (29)$$

(28)を(9)に代入して求めた外周変位 (u'_r, u'_θ) は

$$\left. \begin{aligned} u'_r &= \frac{R}{E} \left[-\frac{Y}{8\pi R t} \left\{ 2(3-\nu)(1+\nu) \log R + (1+\nu)^2 \right\} \sin \theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-3\nu}{4} (d_1 - c_1) \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} C_n \sin n\theta \right], \end{aligned} \right\} (30)$$

$$u'_\theta = \frac{Rr}{E} \left[(1 + \nu) \frac{M_0}{2\pi R^2 t} - \frac{Y}{8\pi R t} \left\{ 2(3 - \nu)(1 + \nu) \log R + (1 + \nu)(9 + \nu) \right\} \cos \theta \right. \\ \left. - \frac{5 + \nu}{4} (d_1 - c_1) \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} D_n \cos n\theta \right].$$

上式より $(u'_r)_{\theta=0}, (u'_r)_{\theta=\pi} = 0$. したがって A, B 点を固定するために次の変換を行う

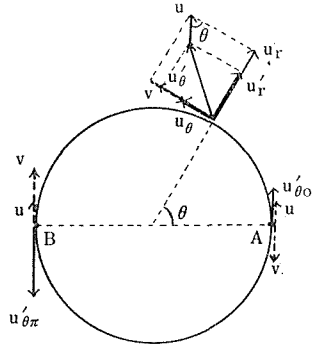
$$\left. \begin{aligned} u_r &= u'_r + u \sin \theta, \\ u_\theta &= u'_\theta + u \cos \theta - v. \end{aligned} \right\}$$

—上方に u 移動し, 右廻りに v 回転—

ただし u, v は次のように選ぶ

$$u + v = [u'_\theta]_\pi, \quad u - v = -[u'_\theta]_0$$

結局 A, B を固定したときの周上の変位 (u_r, u_θ) は



第7図 変位の変換(逆対称)

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{R}{E} \left\{ \left(\frac{1 - 3\nu}{2} d_1 - \frac{5 + \nu}{2} c_1 - \sum_{od} D_n \right) \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} C_n \sin n\theta \right\}, \\ u_\theta &= \frac{R}{E} \left\{ -\sum_{ev} D_n - \sum_{od} D_n \cos n\theta + \sum_{n=2}^{\infty} D_n \cos n\theta \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

ただし $C_n = \frac{1}{n^2 - 1} \left\{ (2n - 1 + \nu) d_n - (n - n\nu - 2) c_n \right\},$
 $D_n = \frac{1}{n^2 - 1} \left\{ -(n - n\nu - 2) d_n + (2n - 1 + \nu) c_n \right\}.$

4.3 縁材のある円板 (連続の条件— d_n, c_0, c_n の決定)

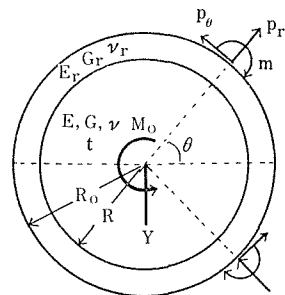
外荷重(21)および Y, M_0 によって接合部に力(22), 応力(26)が生じ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta'_n \sin n\theta = Rt \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin n\theta,$$

$$\gamma'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma'_n \cos n\theta = Rt \left(c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\theta \right).$$

すなわち $[\delta'_m, \gamma'_0, \gamma'_n] = Rt[d_n, c_0, c_n].$ (32)

および つりあいの条件



第8図 縁材のある円板(逆対称)

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{R^2 t} (R_0 \gamma_0 - \rho \mu_0) = -\frac{M_0}{2\pi R^2 t}, \\ d_1 + c_1 &= \frac{1}{Rt} (\delta_1 + \gamma_1) = -\frac{Y}{\pi R t}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

接合部の連続条件は $u_r = \delta_r, u_\theta = \delta_\theta$
 (25), (31) の第 1, 2 式をそれぞれ等しくおく, これがすべての θ の値に対して成立つ
 条件は

$$\left. \begin{aligned} \frac{R}{E} \left(\frac{1-3\nu}{2} d_1 - \frac{5+\nu}{2} c_1 \right) &= \frac{\rho}{AE_r} \left[-K_{si} \gamma_1 - K_i \mu_1 \right]_i^0, \\ \frac{R}{E} D_n(n) &= \frac{\rho}{AE_r} \left[Z_{ns}(n) \right]_i^0, \quad \frac{R}{E} C_n(n) = \frac{\rho}{AE_r} \left[W_{ns}(n) \right]_i^0. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

(25) (32) を代入し (23) と共に係数 d_n, c_0, c_n を定める次の連立方程式をうる。

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{Rt} \frac{1}{R} (R_0 \gamma_0 - \rho \mu_0), \\ d_1 + c_1 &= \frac{1}{Rt} (\delta_1 + \gamma_1), \\ \xi (1-3\nu) d_1 - \left\{ \xi (5+\nu) + 2K_{ii} \right\} c_1 &= -\frac{2}{Rt} (K_{0i} \gamma_1 + K_i \mu_1), \\ -\left\{ \xi (n-n\nu-2) + K'_{2i}(n) \right\} d_n + \left\{ \xi (2n-1+\nu) + K'_{3i}(n) \right\} c_n \\ &= \frac{1}{Rt} \left\{ -K'_{20}(n) \delta_n + K'_{30}(n) \gamma_n + K_5(n) \mu_n \right\}, \\ \left\{ \xi (2n-1+\nu) + K'_{1i}(n) \right\} d_n - \left\{ \xi (n-n\nu-2) + K'_{2i}(n) \right\} c_n \\ &= \frac{1}{Rt} \left\{ K'_{1i}(n) \delta_n - K'_{20}(n) \gamma_n - K'_{4i}(n) \mu_n \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

d_n, c_0, c_n の値は第 5 節 (39) 式に一括した。これらの値が定まると, 円板の応力は (29) より, 縁材の断面力は (24) —— (32) を用いて —— より計算することができる。

5. 任意荷重の解——総括

5.1 外荷重と接合部の応力係数

外周に作用する任意荷重を次のフーリエ級数で与え, これとつりあう中心集中力およびモーメントを X, Y, M_0 とする。

$$\left. \begin{aligned}
 \text{外力の法線成分: } p_r &= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin n\theta, \\
 \text{接線成分: } p_\theta &= \gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin n\theta, \\
 \text{モーメント荷重: } m &= \rho \left(\mu_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \sin n\theta \right).
 \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

接合部の応力を次のようにおけば,

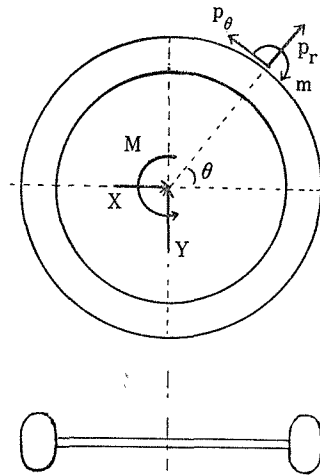
$$\left. \begin{aligned}
 \text{法線成分: } \sigma_r &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin n\theta, \\
 \text{接線成分: } \tau_{r\theta} &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta.
 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

(実線の項が軸対称, 点線の項が逆対称を表わす。)

つりあいの条件は

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha_1 - \beta_1 &= -\frac{X}{\pi} = Rt(a_1 - b_1), \\
 \delta_1 + \gamma_1 &= -\frac{Y}{\pi} = Rt(d_1 + c_1), \\
 R_0\gamma_0 - \rho\mu_0 &= -\frac{M_0}{2\pi} = R^2tc_0.
 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

(37)の係数は(20)(35)より



第9図 緑材のある円板

$$\left. \begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{Rt} A_0\alpha_0, & c_0 &= \frac{1}{Rt} \frac{1}{R} (R_0\gamma_0 - \rho\mu_0), \\
 a_1 &= \frac{1}{Rt} (A_1\alpha_1 + A_3\beta_1 + A_5\nu_1), & d_1 &= \frac{1}{Rt} (A_1\delta_1 - A_3\gamma_1 - A_5\mu_1), \\
 b_1 &= \frac{1}{Rt} (A_2\alpha_1 + A_4\beta_1 + A_5\nu_1), & c_1 &= \frac{1}{Rt} (-A_2\delta_1 + A_4\gamma_1 + A_5\mu_1),
 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{Rt} (II_1\alpha_n + II_3\beta_n + II_5\nu_n), & d_n &= \frac{1}{Rt} (II_1\delta_n - II_3\gamma_n - II_5t_n), \\ b_n &= \frac{1}{Rt} (II_2\alpha_n + II_4\beta_n + II_6\nu_n), & c_n &= \frac{1}{Rt} (-II_2\delta_n + II_4\gamma_n + II_6t_n). \end{aligned} \right\}$$

ただし

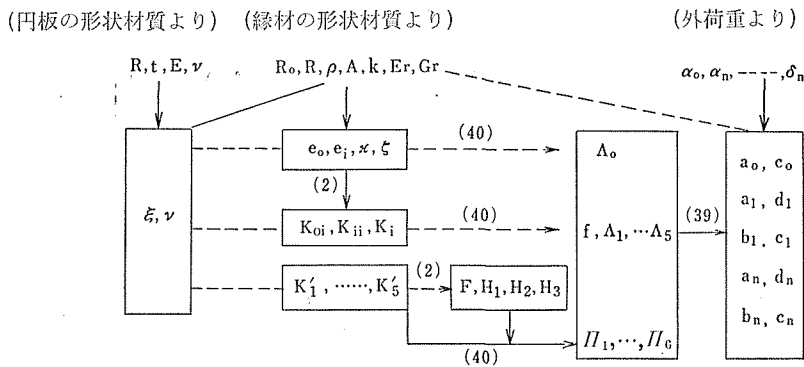
$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\xi(1-\nu)(1+\kappa) + 1}, & A_5 &= \frac{1}{f} 2K_i, \\ A_1 &= \frac{1}{f} \left\{ \xi(5+\nu) + 2K_{ii} \right\}, & A_3 &= -\frac{1}{f} \left\{ \xi(5+\nu) + 2(K_{ii} - K_{0i}) \right\}, \\ A_2 &= -\frac{1}{f} \xi(1-3\nu), & A_4 &= \frac{1}{f} \left\{ \xi(1-3\nu) + 2K_{0i} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

$n \geq 2$ に対して—(n)は省略する。たとえば $H_3(n)$ は H_3 で表はす—

$$\begin{aligned} II_1 &= \frac{1}{F} (K'_1 H_3 - K'_{2i} H_2), & II_2 &= \frac{1}{F} (K'_{2i} H_1 - K'_1 H_2), \\ II_3 &= \frac{1}{F} (K'_{20} H_3 - K'_{30i} H_2), & II_4 &= \frac{1}{F} (K'_{30i} H_1 - K'_{20} H_2), \\ II_5 &= \frac{1}{F} (K'_4 H_3 - K'_5 H_2), & II_6 &= \frac{1}{F} (K'_5 H_1 - K'_4 H_2). \end{aligned}$$

(上式の右辺の記号は第2節(2)式参照のこと)

結局 縁材・円板の形状材質および外荷重(36)が与えられれば(39)によって接合部の応力係数が計算され、以下円板の応力、縁材の断面力したがって縁材の応力が計算されるのである。これを図式的に表わせば、



(註) マトリックス記法を用いれば(39)は次のように簡潔に表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{Rt} A_0 \alpha_0, & c_0 &= \frac{1}{Rt} \left(\frac{e_0}{e_i} \gamma_0 - \frac{1}{e_i} \mu_0 \right), \\ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ d_1 & -c_1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{Rt} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \nu_1 \\ \delta_1 & -\gamma_1 & -\mu_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \\ A_5 & A_6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ d_n & -c_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{Rt} \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \nu_n \\ \delta_n & -\gamma_n & -\mu_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 \\ \Pi_3 & \Pi_4 \\ \Pi_5 & \Pi_6 \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

また(40)の係数の間には次の関係がある。

$$\begin{aligned} A_1 - A_2 &= 1, & \begin{pmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 \\ \Pi_3 & \Pi_4 \end{pmatrix} &= \frac{1}{F} \begin{pmatrix} K'_{11} & -K'_{2i} \\ K'_{20} & -K'_{30i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_3 & -H_2 \\ H_2 & -H_1 \end{pmatrix}, \\ A_3 - A_4 &= -1, & \begin{pmatrix} \Pi_5 & \Pi_6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} K'_{14} & -K'_{5} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (42)$$

このことは縁材が層をなしている場合の解がマトリックス表示によって求めうることを示唆しているがここでは省略する。

5.2 円板の応力，縁材の断面力

円板の応力—(13) (29)をまとめ(11) (27)により変形して

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= a_0 + \left\{ \left(\frac{\Gamma_1}{4} (a_1 - b_1) + \frac{1}{2} \Delta (a_1 + b_1) \right) \cos \theta + \left(\frac{\Gamma_1}{4} (d_1 + c_1) + \frac{1}{2} \Delta (d_1 - c_1) \right) \sin \theta \right\} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left(\phi_{n-2}^n a_n + \phi_{n-2}^{n-2} b_n \right) \cos n\theta + \left(\phi_{n-2}^n d_n - \phi_{n-2}^{n-2} c_n \right) \sin n\theta \right\}, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{2} c_0 + \left\{ \left(-\frac{\Gamma_2}{4} (a_1 - b_1) + \frac{1}{2} \Delta (a_1 + b_1) \right) \sin \theta + \left(\frac{\Gamma_2}{4} (d_1 + c_1) - \frac{1}{2} \Delta (d_1 - c_1) \right) \cos \theta \right\} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ -\left(\phi_n^n a_n + \phi_n^{n-2} b_n \right) \sin n\theta + \left(\phi_n^n d_n - \phi_n^{n-2} c_n \right) \cos n\theta \right\}, \\ \sigma_\theta &= a_0 + \left\{ \left(-\frac{\Gamma_3}{4} (a_1 - b_1) + \frac{3}{2} \Delta (a_1 + b_1) \right) \cos \theta + \left(-\frac{\Gamma_3}{4} (d_1 + c_1) + \frac{3}{2} \Delta (d_1 - c_1) \right) \sin \theta \right\} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ -\left(\phi_{n+2}^n a_n + \phi_{n+2}^{n-2} b_n \right) \cos n\theta + \left(\phi_{n+2}^n d_n - \phi_{n+2}^{n-2} c_n \right) \sin n\theta \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

ここに $\Delta = \frac{r}{R}$, $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \phi^i_j$ は(1)式より

縁材の断面力—(7) (24)より

$$\left. \begin{aligned} N &= \alpha_0 + \frac{1}{1 + \kappa \zeta} \left\{ \overline{(e_0 + \kappa \zeta \beta_1 - \nu_1)} \cos \theta - \overline{(e_0 + \kappa \zeta \gamma_1 - \mu_1)} \sin \theta \right\} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} \left\{ (\alpha_n - n \beta_n) \cos n\theta - (\delta_n + n \gamma_n) \sin n\theta \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& -Rt \left[a_0 + \frac{1}{1 + \kappa \zeta} \left\{ (e_i + \kappa \zeta) b_1 \cos \theta - (e_i + \kappa \zeta) c_1 \sin \theta \right\} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} \left\{ (a_n - nb_n) \cos n\theta - (d_n + nc_n) \sin n\theta \right\} \right], \\
V = & \gamma_0 + \frac{1}{1 + \kappa \zeta} \left\{ (\overline{e_0 - 1} \beta_1 - \nu_1) \sin \theta - (\overline{e_0 - 1} \gamma_1 - \mu_1) \cos \theta \right\} \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} \left\{ (n\alpha_n - \beta_n) \sin n - (n\delta_n + \gamma_n) \cos n\theta \right\}, \\
& -Rt \left[c_0 - \frac{1}{1 + \kappa \zeta} \left\{ (1 - e_i) b_1 \sin \theta - (1 - e_i) c_1 \cos \theta \right\} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} \left\{ (na_n - b_n) \sin n\theta - (nd_n + c_n) \cos n\theta \right\} \right], \\
M = & \rho \left[-\frac{\kappa}{1 + \kappa} \alpha_0 + \frac{\kappa \zeta}{1 + \kappa \zeta} \left\{ (\overline{e_0 - 1} \beta_1 - \nu_1) \cos \theta - (\overline{e_0 - 1} \gamma_1 - \mu_1) \sin \theta \right\} \right. \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{n^2 - 1} \alpha_n + \frac{e_0}{n} - \frac{n}{n^2 - 1} \beta_n - \frac{1}{n} \nu_n \right) \cos n\theta \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{n^2 - 1} \delta_n - \frac{e_0}{n} - \frac{n}{n^2 - 1} \gamma_n + \frac{1}{n} \mu_n \right) \sin n\theta \right\} \\
& -Rt \left[-\frac{\kappa}{1 + \kappa} a_0 - \frac{\kappa \zeta}{1 + \kappa \zeta} \left\{ (1 - e_i) b_1 \cos \theta - (1 - e_i) c_1 \sin \theta \right\} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{n^2 - 1} a_n + \frac{e_i}{n} - \frac{n}{n^2 - 1} b_n \right) \cos n\theta + \left(\frac{1}{n^2 - 1} d_n - \frac{e_i}{n} - \frac{n}{n^2 - 1} c_n \right) \sin n\theta \right\} \right] \Bigg\} \quad (44)
\end{aligned}$$

5.3 特別な場合 (縁材の剛性 ∞ , 0)

(A) 縁材が剛体とみなされる場合 ($\xi = \infty$)

縁材と円板の相当剛性比 $\xi = \frac{A}{\rho t} \frac{E_r}{E}$ は無限大となり, (40) (2) 式より

$$A_1, -A_3 \rightarrow \frac{5 + \nu}{2(3 - \nu)}, \quad -A_2, A_4 \rightarrow \frac{1 - 3\nu}{2(3 - \nu)}$$

$$A_0, A_5 \rightarrow 0, \quad \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_6 \rightarrow 0$$

したがって接合部の応力係数は—(39)より—

$$\left. \begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{Rt} \frac{1}{R} (R_0 \gamma_0 - \rho \mu_0), \\
a_1 &= \frac{1}{Rt} \frac{5 + \nu}{2(3 - \nu)} (\alpha_1 - \beta_1), \quad d_1 = \frac{1}{Rt} \frac{5 + \nu}{2(3 - \nu)} (\delta_1 + \gamma_1),
\end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} b_1 = -\frac{1}{Rt} \frac{1-3\nu}{2(3-\nu)} (\alpha_1 - \beta_1), \quad c_1 = \frac{1}{Rt} \frac{1-3\nu}{2(3-\nu)} (\bar{d}_1 + \bar{r}_1), \\ a_0 = a_n = b_n = d_n = c_n = 0. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

接合部の応力は

$$\sigma_r = a_1 \cos \theta + d_1 \sin \theta, \quad \tau_{r\theta} = c_0 + c_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta.$$

円板の応力は(43)より,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r = \left\{ \frac{I_1}{4} (a_1 - b_1) + \frac{1}{2} \Delta (a_1 + b_1) \right\} \cos \theta + \left\{ \frac{I_1}{4} (d_1 + c_1) + \frac{1}{2} \Delta (d_1 - c_1) \right\} \sin \theta, \\ \tau_{r\theta} = \frac{1}{\Delta^2} c_0 + \left\{ -\frac{I_2}{4} (a_1 - b_1) + \frac{1}{2} \Delta (a_1 + b_1) \right\} \sin \theta \\ \quad + \left\{ \frac{I_2}{4} (d_1 + c_1) - \frac{1}{2} \Delta (d_1 - c_1) \right\} \cos \theta, \\ \sigma_\theta = \left\{ -\frac{I_3}{4} (a_1 - b_1) + \frac{3}{2} \Delta (a_1 + b_1) \right\} \cos \theta + \left\{ -\frac{I_3}{4} (d_1 + c_1) + \frac{3}{2} \Delta (d_1 - c_1) \right\} \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

(B) 円板のみの場合($\xi=0$)

第3.2項, 第4.2項の結果をそのまま適用する。ある特定の外応力が作用している場合, 円板の応力を計算するのに級数(13)(29)を直接使用するのは面倒なことが多い。外応力が例えば集中荷重の如く単純な場合はこのフーリエ係数を(13)(29)または $\varphi(z)$, $\psi(z)$ に代入し数学公式を利用して, ある函数の形に変形することができる。その一例を附録Ⅱに示した。

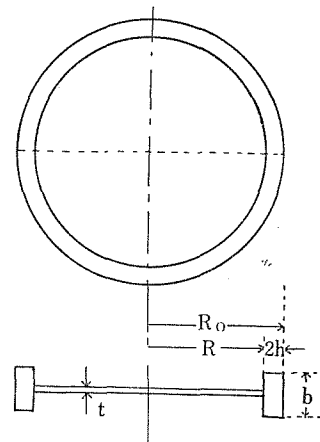
6. 数値計算例—集中荷重について

縁材が長方形断面を有する次図の鋼製試験片
に対して, 集中荷重の場合を計算した

$$\begin{aligned} R_0 &= 80.0(\text{mm}) & b &= 24.7(\text{mm}) \\ R &= 70.0(\text{mm}) & 2h &= 10.0(\text{mm}) \\ t &= 2.42(\text{mm}) \\ E_r, E &= 2.1 \times 10^4(\text{kg/mm}^2) & \nu_r, \nu &= 0.3 \end{aligned}$$

誘導される数値

$$\begin{aligned} \rho &= 75.0(\text{mm}) & e_0 &= R_0/\rho = 1.06 \\ A &= 247.0(\text{mm}^2) & e_i &= R/\rho = 0.93 \end{aligned}$$



第10図 試験片

$$\kappa = \frac{1}{3}\left(\frac{h}{\rho}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{\rho}\right)^4 + \frac{1}{7}\left(\frac{h}{\rho}\right)^6 + \dots = 0.0014855$$

$$\xi = \frac{A}{\rho t} \frac{E_r}{E} = 1.3608816, \quad \zeta = k \frac{E_r}{G_r} = 2k(1 + \nu_r) = 2 \times \frac{3}{2} \times 1.3 = 3.9$$

$$K_{0i} = 0.9783221 \quad K_{1i} = 0.8883446 \quad K_i = -0.6748310$$

$$A_0 = 0.5117623 \quad A_2 = -0.0149130 \quad A_4 = 0.2293292$$

$$A_1 = 0.9850870 \quad A_3 = -0.7706708 \quad A_5 = -0.1479009$$

($n \geq 2$ に対する $K'_1(n), \dots, H_6(n)$ の値は省略する)

3種類の集中荷重(法線, 接線, モーメント)に対し, つぎの項目について計算した。

(1) 円板の応力

3通りの集中荷重について求めた接合部の応力のフーリエ係数を(43)式に代入して応力を計算した。計算は半径の6等分点すなわち

$$A\left(\frac{r}{R}\right) : \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}$$

について行い, 水平, 垂直軸上の応力を無次元の形で図示した(第12, 15, 18図)

縁材の影響を知るために, 縁材剛および円板のみの場合の応力分布も同時に示した。(43)式からも分るように, 接合部に近づくと ($A \rightarrow 1$), 級数の収束性が悪くなり, とくに荷重点附近では $n = 40$ 項程度でもなお不十分である。これはフーリエ級数で扱ったための一つの欠点と考えられよう。

(2) 縁材の断面力と接線応力 (hoopstress)

(44)式に外荷重および接合部のフーリエ係数を代入して求めることができる。具体的を表わすために集中荷重 (P, Q) を 1000kg , 集中モーメント (m) を $10000\text{kg}\cdot\text{mm}$ としたときの断面力を図に示した。(第13, 16, 19図)

縁材の外・内周での hoopstress σ_0, σ_i を軸力 (N), 曲げモーメント (M) から求め同図に示した。

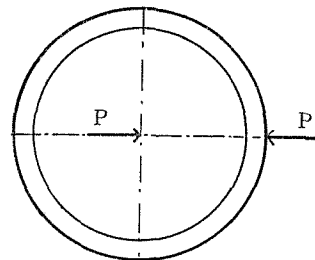
6.1 法線集中荷重 (第11図)

外力のフーリエ係数附I)

$$\alpha_0 = -\frac{P}{2\pi}, \quad \alpha_n = -\frac{P}{\pi} \tag{47}$$

接合部応力のフーリエ係数——(39)より——

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{P}{Rt} \left(-\frac{1}{2\pi} A_0\right), \\ a_1 &= \frac{P}{Rt} \left(-\frac{1}{\pi} A_1\right), \quad b_1 = \frac{P}{Rt} \left(-\frac{1}{\pi} A_2\right), \end{aligned} \right\} \tag{48}$$



第11図

$$a_n = \frac{P}{Rt} \left(-\frac{1}{\pi} H_1(n) \right), \quad b_n = \frac{P}{Rt} \left(-\frac{1}{\pi} H_2(n) \right).$$

円板の応力，縁材の断面力は(43) (44)より

● 縁材剛の場合——(45)(46)より——

$$a_1 = \frac{P}{Rt} \left\{ -\frac{5+\nu}{2\pi(3-\nu)} \right\}, \quad b_1 = \frac{P}{Rt} \left\{ \frac{1-3\nu}{2\pi(3-\nu)} \right\}.$$

$$\left. \begin{aligned} \text{円板の応力 } \sigma_r &= \frac{P}{Rt} \frac{1}{\pi} \left\{ -\frac{1}{4} \Gamma_1 - \frac{1+\nu}{3-\nu} D \right\} \cos \theta, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{P}{Rt} \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{4} \Gamma_2 - \frac{1+\nu}{3-\nu} D \right\} \sin \theta, \\ \sigma_\theta &= \frac{P}{Rt} \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{4} \Gamma_3 - \frac{3(1+\nu)}{3-\nu} D \right\} \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

● 円板のみの場合—応力分布の誘導は附録IIに示す

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{P}{at} \frac{1}{2\pi} \left\{ -\frac{1}{2} \Gamma_1 \cos \theta + 1 - \frac{4}{D^2} (1 - D \cos \theta)(D - \cos \theta)^2 \right\}, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{P}{at} \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \Gamma_2 \sin \theta - \frac{4}{D^2} \sin \theta (1 - D \cos \theta)(D - \cos \theta) \right\}, \\ \sigma_\theta &= \frac{P}{at} \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \Gamma_3 \cos \theta + 1 - \frac{4}{D^2} \sin^2 \theta (1 - D \cos \theta) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

$$\text{ただし } a \text{ は円板の半径, } \quad D = \frac{r}{a}, \quad D = 1 - 2D \cos \theta + D^2.$$

いま点 (r, ϕ) における応力を簡単に $\sigma_{r\phi}$, τ_{ϕ} , $\sigma_{\theta\phi}$ の形で表わせば，水平軸・垂直軸上の応力はそれぞれ次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r0} &= \frac{P}{at} \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{2} \left\{ (3+\nu) \frac{1}{D} - (1+\nu) D \right\} + 1 - \frac{4}{1-D} \right], \\ \sigma_{\theta 0} &= \frac{P}{at} \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \left\{ (1-\nu) \frac{1}{D} + 3(1+\nu) D \right\} + 1 \right], \quad \tau_0 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (50)_1$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r\pi/2} &= \frac{P}{at} \frac{1}{2\pi} \left[1 - \frac{4D^2}{(1+D)^2} \right], \quad \sigma_{\theta\pi/2} = \frac{P}{at} \frac{1}{2\pi} \left[1 - \frac{4}{(1+D^2)^2} \right], \\ \tau_{\pi/2} &= \frac{P}{at} \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \left\{ (1-\nu) \frac{1}{D} + (1+\nu) D \right\} - \frac{4D}{(1+D^2)^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (50)_2$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r\pi} &= \frac{P}{at} \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \left\{ (3 + \nu) \frac{1}{d} - (1 + \nu) d \right\} + 1 - \frac{4}{1 + d} \right], \\ \sigma_{\theta\pi} &= \frac{P}{at} \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{2} \left\{ (1 - \nu) \frac{1}{d} + 3(1 + \nu) d \right\} + 1 \right], \quad \tau_{\pi} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (50)_3$$

$$\sigma(-\pi/2) = \sigma_{\pi/2}, \quad \tau(-\pi/2) = -\tau_{\pi/2}.$$

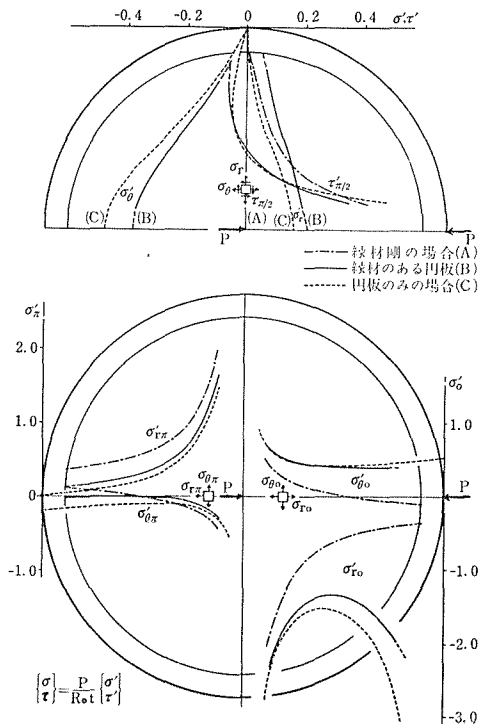
第12図—円板の応力

荷重方向（水平軸方向）の法線応力 (σ) は縁材のある円板 (B) の場合, 明らかに (A) (C) の中間の値になるが, これに垂直方向の法線応力は必ずしも中間にはなく, むしろ縁材があるために (A) (C) より大きな値をとること (たとえば $\sigma_{r\pi/2}$) は興味深いことである。これは荷重が一様分布から偏り, 縁材の各部分が円板を引張りもしくは圧縮していることに起因している。このことはせん断応力 ($\tau_{r\theta}$) についてもいえることである。なお図より分るように本試験片の縁材の程度では剛の場合 (A) よりむしろ (C) の方に近いことが知られる。

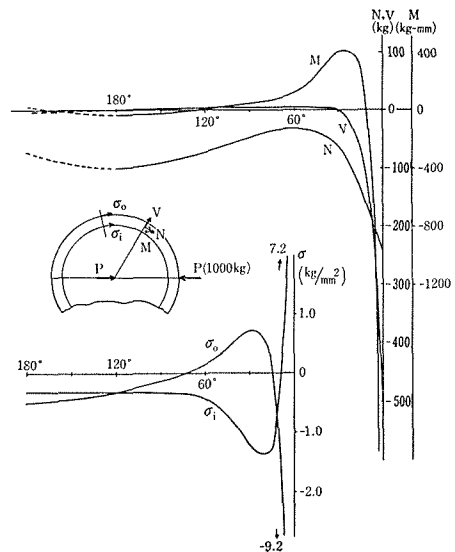
第13図—縁材の断面力, hoopstress

荷重点附近では何れも大きな値をもつのは当然であるが, $\theta = 28^\circ$ 附近で曲げモーメント (M) は極大を示し, それにつれて hoopstress (σ_0, σ_i) も極値をとる。 θ が大きくなるにしたがい軸力 (圧縮力) が顕著に残り, σ_0, σ_i もともに圧縮応力を示している。

第12図 円板の応力分布(法線集中荷重)



第13図 縁材の断面力と hoopstress.



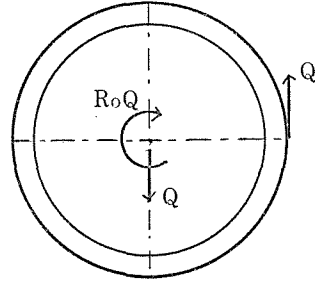
6.2 接線集中荷重 (第14図)

外力のフーリエ係数

$$\gamma_0 = \frac{Q}{2\pi}, \quad \gamma_n = \frac{Q}{\pi}. \quad (51)$$

接合部応力のフーリエ係数——(39)より——

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= \frac{Q}{Rt} \frac{R_0}{2\pi R}, \\ d_1 &= \frac{Q}{Rt} \left(-\frac{1}{\pi} A_3\right), \quad c_1 = \frac{Q}{Rt} \left(\frac{1}{\pi} A_4\right), \\ d_n &= \frac{Q}{Rt} \left(-\frac{1}{\pi} H_3(n)\right), \quad c_n = \frac{Q}{Rt} \left(\frac{1}{\pi} H_4(n)\right). \end{aligned} \right\} (52)$$



第14図

● 縁材剛の場合——(45)(46)より——

$$c_0 = \frac{Q}{Rt} \frac{R_0}{2\pi R}, \quad d_1 = \frac{Q}{Rt} \left\{ -\frac{5+\nu}{2\pi(3-\nu)} \right\}, \quad c_1 = \frac{Q}{Rt} \left\{ -\frac{1-3\nu}{2\pi(3-\nu)} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{円板の応力} \quad \sigma_r &= \frac{Q}{Rt} \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{4} \Gamma_1 + \frac{1+\nu}{3-\nu} D \right\} \sin \theta, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{Q}{Rt} \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{D^2} \frac{R_0}{2R} + \left(\frac{1}{4} \Gamma_2 - \frac{1+\nu}{3-\nu} D \right) \cos \theta \right\}, \\ \sigma_\theta &= \frac{Q}{Rt} \frac{1}{\pi} \left\{ -\frac{1}{4} \Gamma_3 + \frac{3(1+\nu)}{3-\nu} D \right\} \sin \theta. \end{aligned} \right\} (53)$$

● 円板のみの場合—応力分布の誘導は附録IIに準ずる

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{Q}{at} \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \Gamma_1 \sin \theta - \frac{4D}{D^2} \sin \theta (D - \cos \theta)^2 \right\}, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{Q}{at} \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \Gamma_2 \cos \theta + \frac{1}{D^2} - \frac{4D}{D^2} \sin^2 \theta (D - \cos \theta) \right\}, \\ \sigma_\theta &= \frac{Q}{at} \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \Gamma_3 \sin \theta + \frac{4D}{D^2} \sin^3 \theta \right\}. \end{aligned} \right\} (54)$$

$$\sigma_{r0} = \sigma_{\theta 0} = 0, \quad \tau_0 = \frac{Q}{at} \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \left\{ (1-\nu) \frac{1}{D} + (1+\nu) D \right\} + \frac{1}{D^2} \right]. \quad (54)_1$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r\pi/2} &= \frac{Q}{at} \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \left\{ (3+\nu) \frac{1}{D} - (1+\nu) D \right\} - \frac{4D^3}{(1+D^2)^2} \right], \\ \sigma_{\theta\pi/2} &= \frac{Q}{at} \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{2} \left\{ (1-\nu) \frac{1}{D} + 3(1+\nu) D \right\} - \frac{4D}{(1+D^2)^2} \right], \end{aligned} \right\} (54)_2$$

$$\tau_{\pi/2} = \frac{Q}{at} \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{d^2} - \frac{4d^2}{(1+d^2)^2} \right]$$

$$\sigma_{r\pi} = \sigma_{\theta\pi} = 0, \quad \tau_{\pi} = \frac{Q}{at} \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{2} \left\{ (1-\nu) \frac{1}{d} + (1+\nu)d \right\} + \frac{1}{d^2} \right], \quad (54)_3$$

$$\sigma(-\pi/2) = -\sigma_{\pi/2}, \quad \tau(-\pi/2) = \tau_{\pi/2}.$$

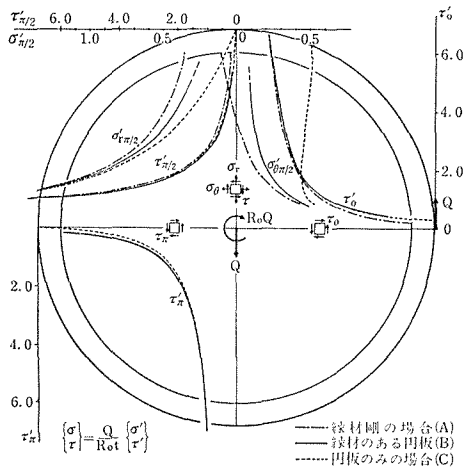
第15図—円板の応力

せん断応力 ($\tau_{r,\theta}$) は、縁材の影響ほとんどなく (A) (B) (C) とも同一の値を示している。法線応力については接合部に近づくにしたがい縁材の影響が現われ、何れも (B) は (A) (C) の中間の値を示している。

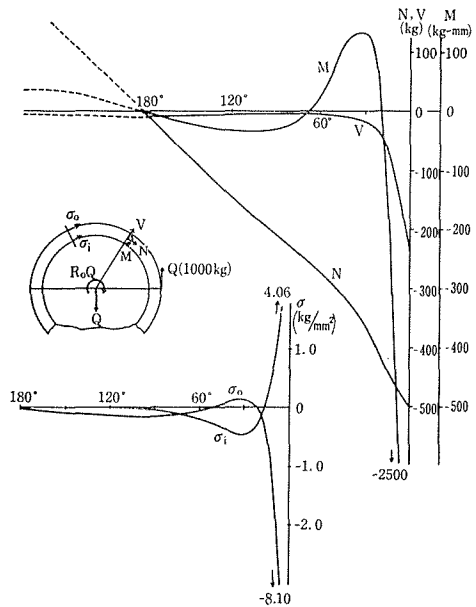
第16図—縁材の断面力, hoopstress

荷重点附近で断面力, hoopstress は極めて大きくなるのは当然であるが、曲げモーメント (M) の極大値および σ_0 , σ_i の極値は法線荷重の場合に比較してずれているのが目立ち、軸力 (圧縮力) が θ とともに漸減しているのも特長といえよう。

第15図 円板の応力分布(接線集中荷重)



第16図 縁材の断面力と hoopstress.



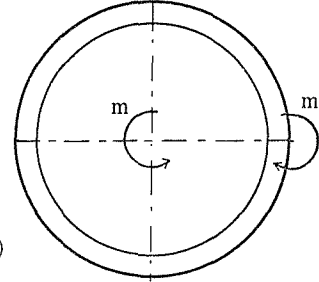
6.3 モーメント荷重 (第17図)

モーメントのフーリエ係数

$$\mu_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{m}{\rho}, \quad \mu_n = \frac{1}{\pi} \frac{m}{\rho}, \quad \nu_n = 0 \quad (55)$$

接合部応力のフーリエ係数—(39)より—

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{Rt} \frac{m}{\rho} \left(-\frac{1}{2\pi} \frac{\rho}{R} \right), \\ d_1 &= \frac{1}{Rt} \frac{m}{\rho} \left(-\frac{1}{\pi} A_5 \right), \quad c_1 = \frac{1}{Rt} \frac{m}{\rho} \left(\frac{1}{\pi} A_5 \right), \\ d_n &= \frac{1}{Rt} \frac{m}{\rho} \left(-\frac{1}{\pi} II_5(n) \right), \quad c_n = \frac{1}{Rt} \frac{m}{\rho} \left(\frac{1}{\pi} II_6(n) \right). \end{aligned} \right\} (56)$$



第17図

● 縁材剛の場合—(45) (46)より—

$$c_0 = \frac{m}{R^2 t} \left(-\frac{1}{2\pi} \right), \quad d_1 = c_1 = 0. \quad \text{円材の応力: } \sigma_r = \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = \frac{1}{A^2} c_0.$$

● 円板のみの場合—応力分布の誘導の方針は附録IIに示す

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{m}{a^2 t} \frac{1}{2\pi} \frac{4}{D^3} (1 - D^2) (1 - D \cos \theta) (D - \cos \theta) \sin \theta, \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{m}{a^2 t} \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{D^2} + \frac{4}{D^3} \left\{ (1 - 3D^2) + 2D(1 + 2D^2) \cos \theta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (2 + 3D^2 + D^4) \cos^2 \theta + 2D \cos^3 \theta \right\} \right], \\ \sigma_\theta &= \frac{m}{a^2 t} \frac{1}{2\pi} \frac{4}{D^3} \sin \theta \left\{ D(4 - D + D^2) - 2(1 + 3D^2) \cos \theta + 2D(1 + D^2) \cos^2 \theta \right\}. \end{aligned} \right\} (57)$$

$$\sigma_{r0} = \sigma_{\theta 0} = 0, \quad \tau_0 = -\frac{m}{a^2 t} \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{D^2} - \frac{4}{(1 - D)^2} \right], \quad (57)_1$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r\pi/2} &= -\frac{m}{a^2 t} \frac{1}{2\pi} \frac{4}{(1 + D^2)^3} D(1 - D^2), \\ \sigma_{\theta\pi/2} &= \frac{m}{a^2 t} \frac{1}{2\pi} \frac{4}{(1 + D^2)^3} D(4 - D + D^2), \end{aligned} \right\} (57)_2$$

$$\tau_{\pi/2} = -\frac{m}{a^2 t} \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{D^2} + \frac{4}{(1 + D^2)^3} D(1 - 3D^2) \right\}.$$

$$\sigma_{r\pi} = \sigma_{\theta\pi} = 0, \quad \tau_\pi = -\frac{m}{a^2 t} \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{D^2} - \frac{4}{(1 + D^2)^2} \right]. \quad (57)_3$$

$$\sigma_r(-\pi/2) = -\sigma_{r\pi/2}, \quad \sigma_\theta(-\pi/2) = \sigma_{\theta\pi/2}, \quad \tau(-\pi/2) = \tau_{\pi/2}.$$

第18図—円板の応力

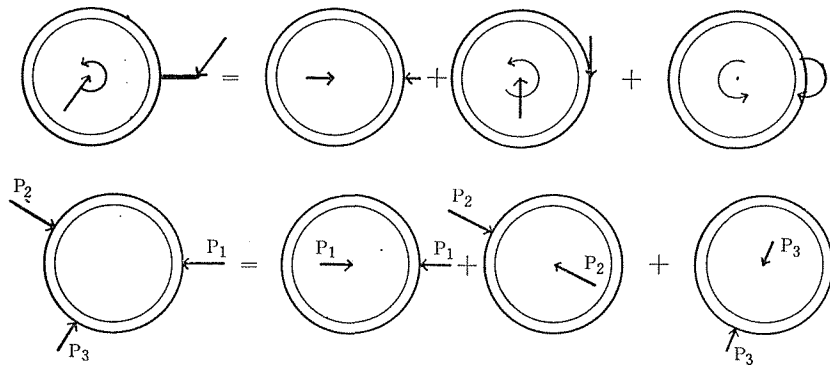
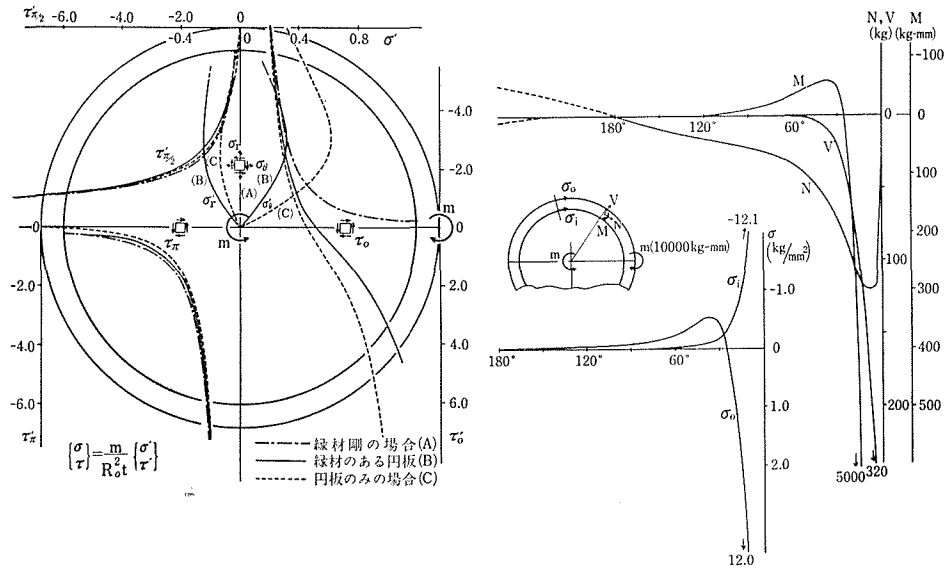
荷重軸（水平軸）上の τ_0 が接合部に近づくにつれて緑材の影響が著しく、 θ が大きくなるにしたがってせん断応力 τ は (A) (B) (C) とともにほとんど一致するようである。垂直軸 ($\theta = \pi/2$) 上の法線応力 σ は法線集中荷重の場合と同じ傾向を示している。

第19図—緑材の断面力, hoopstress.

断面力, hoopstress とともに前の場合と同じ傾向を示しているが, 軸力 N および σ_i は若干異なることが知られる。

第18図 円板の応力分布(モーメント荷重)

第19図 緑材の断面力と hoopstress.



第20図 任意荷重の上記集中荷重への分解例

以上3通りの集中荷重に対する解が得られれば、任意の荷重の解はこれらを重ね合せ、もしくは積分することによって得られるわけである。一例を示せば、第20図のとおりである。

7. む す び

- (1) 縁材のある円板の周辺に荷重(36)式が作用し、中心で支持した場合、接合部の応力を定めるフーリエ係数 a_0, \dots, d_n を(39)式により求めることができた。これをもとにして円板の応力は(43)式、縁材の断面力は(44)式より計算することができる。
- (2) (39)式から分るように外荷重の第 m 項が与えられれば、接合部の応力係数も第 m 項が対応し、したがって外荷重が有限項で与えられれば、これらも有限項となり、円板の応力、縁材の断面力も有限項となる。
- (3) 係数 a_0, a_n, \dots, d_n は縁材と円板の形状材質と外荷重によって定まり、(37)(43)(44)式の収束性はこれらの値に依存する。すなわち(36)式の収束度がよく縁材の剛性が大きくなるほど a_0 および a_2, b_2, \dots, d_2 以降は0に近づき、剛体 ($\xi \rightarrow \infty$) になると(45)式のように、 a_1, b_1, c_0, d_1, c_1 のみが残るのも興味深いことである。
- (4) 計算例として法線、接線、モーメント集中荷重の3種類について行い、縁材の影響を知るために縁材剛体、円板のみの特別な場合と比較した。荷重点と中心を結ぶ水平軸上の法線応力は、たしかに縁材剛性に応じてその影響をうけるが、他の応力は必ずしもそうとは限らない。これは縁材の役割が単純でないを示している。
- (5) 上の3例について、縁材の断面力からその外周・内周の hoopstress を計算し図示した。いずれも荷重点附近で大きく、 θ が大きくなるにしたがい急減し 30° 附近で殆んどの場合極値をとることが分った。

はしがきにも述べたように縁材のある円板を弾性学的に解くのは相当煩わしいが、本論文の方法は少々近似的ではあっても容易に計算し得る特長をもち、特に縁材の剛性が大なる程収束性が良くなることも上の解析が示す通りである。縁材の剛性が小さいとき(特に集中荷重の場合)、接合部附近の応力を求めるには相当多くの項数を必要とするのも止むを得ない。これを救済するには、集中に近い分布荷重を有限項のフーリエ係数で表現する問題となろう。また本論文は中心にかかる支持力を理想的な集中荷重とし、計算例も外荷重を集中点荷重として扱ったが(最も収束性の悪い例)、実際は中心にはある径をもつハブ(hub)があり、周辺にはある面積当りの分布荷重が作用している筈である。また縁材の大きさ、剛性を変えた場合の計算も必要であるが、これらについては実験と共に後日を期したいと考えている。

終りに本計算に当って終始有益な討論をいただいた本学工学部宮入武夫教授に深く謝意を表する次第である。

文 献

- 1) 佐々木三郎：縁材のある円板の強度(第1報) 信大工学部紀要 No. 18. 1964.
- 2) たとえば
 J. Pippard : Studies in Elastic Structure, 1st ed. 1952.
 L. Chitty. & : The Stresses in a Disk Wheel and Loads applied to the Rim.
 J. Pippard. Phil. Mag. vol. 21. pp. 106-127, 1936.
- 3) T. Matsumoto : The Stress Distribution in a Ring Press-Fitted Outside of a Disk.
 (4th report) Proc. 3rd. Jap. Nat. Cong. Appl. Mech. 1954.
- 4) 佐々木三郎：円環の強度, 信大工学部紀要No. 18. 1964.
 " : 円環の強度(続報) " No. 19. 1965.
- 5) " : 機械・精機学会諏訪地方講演会前刷(1965.10)
- 6) " : 機械学会通常総会講演会前刷(1966.4)

上記のほかに

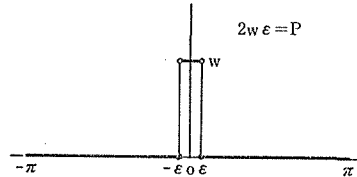
- 森口 繁一 : 2次元弾性論, 岩波現代応用数学, 1957
 I. S. Sokolnikoff : Mathematical Theory of Elasticity. 2nd ed. 1956.
 森口・宇田川・一松 : 数学公式II. 岩波全書. 1962.

附録 I. 集中荷重のフーリエ係数

一般に $f(\theta)$ が $[-\pi, \pi]$ で積分可能な偶函数

—— 1 軸対称荷重 —— のとき

$$f(\theta) \sim A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta$$



附図—1

ここに

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) d\theta, \quad A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta.$$

附図—1 の場合

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\epsilon} w d\theta = \frac{\epsilon w}{\pi} = \frac{P}{2\pi}, \quad A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\epsilon} w \cos n\theta d\theta = \frac{2w \sin n\epsilon}{\pi n} = \frac{P \sin n\epsilon}{\pi n\epsilon}.$$

したがって集中荷重の場合

$$\alpha_0 = -\frac{P}{2\pi}, \quad \alpha_n = -\frac{P \sin n\epsilon}{\pi n\epsilon}. \tag{A-1}$$

を用いて, (39) より a_n, b_n を求め円板の応力(43), 縁材の断面力(44)を計算するのであるが, 幸い $\epsilon \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ とした値が収束し, 初めより

$$\alpha_0 = -\frac{P}{2\pi}, \quad \alpha_n = -\frac{P}{\pi}. \tag{47}$$

とおいた値と同じになるのである。(以下(51)(55)についても同じである)

附録Ⅱ. 円板のみの場合の応力式 (50) (57) の誘導

(50) 式の誘導—第11図

A 点に集中荷重 P が作用した場合, 応力で表わしたフーリエ係数は

$$a_0 = -\frac{P}{2\pi at}, \quad a_n = -\frac{P}{\pi at}, \quad b_n = 0. \quad (\text{A-2})$$

(12) に代入し, 公式 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \log \frac{1}{1-x}$ [$|x| \leq 1, x \neq 1$] を用いれば

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{P}{2\pi at} \left[-\frac{1+\nu}{4} a \log \left(z - \frac{z^2}{a^2} \right) + \frac{1}{2} z + a \log(a-z) - a \log a \right], \\ \psi(z) &= \frac{P}{2\pi at} \left[\frac{3-\nu}{4} az \log z - az \log(a-z) + az \log a \right]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-3})$$

 $\varphi'(z), \varphi''(z), \psi'(z), \psi''(z)$ を求め, 次式を利用し

$$\frac{a}{a-z} = \frac{1}{D} \left\{ (1 - D \cos \theta) + i D \sin \theta \right\},$$

$$\frac{a^2}{(a-z)^2} = \frac{1}{D^2} \left\{ (1 - 2D \cos \theta + D^2 \cos 2\theta) + i 2D \sin \theta (1 - D \cos \theta) \right\}.$$

$$\text{ここに } D = \frac{r}{a}, \quad D = 1 - 2D \cos \theta + D^2.$$

$$(\bar{z}\varphi'' + \psi'') e^{i2\theta} = \frac{P}{2\pi at} \left[\frac{1+\nu}{4} \left(\frac{1}{D} e^{-i\theta} + 2D e^{i\theta} \right) + \frac{3-\nu}{4} \frac{1}{D} e^{i\theta} + \frac{2(1-D \cos \theta)}{(1-D)^2} e^{i2\theta} \right].$$

実数部, 虚数部に分けると

$$\Re e(\bar{z}\varphi'' + \psi'') e^{i2\theta} = \frac{P}{2\pi at} \left[\left(\frac{1}{D} + \frac{1+\nu}{2} D \right) \cos \theta + \frac{2}{D^2} (1 - D \cos \theta) \right. \\ \left. \times (D^2 - 2D \cos \theta + \cos 2\theta) \right],$$

$$\Im m(\bar{z}\varphi'' + \psi'') e^{i2\theta} = \frac{P}{2\pi at} \left[\left(\frac{1-\nu}{2} \frac{1}{D} + \frac{1+\nu}{2} D \right) \sin \theta \right. \\ \left. + \frac{4}{D^2} \sin \theta (1 - D \cos \theta) (\cos \theta - D) \right].$$

また

$$2\Re e[\varphi'(z)] = \frac{P}{2\pi at} \left[-\frac{1+\nu}{2} \left(\frac{1}{D} - 2D \right) \cos \theta + 1 - \frac{2}{D} (1 - D \cos \theta) \right].$$

これらの式を (9) に代入して円板内の応力式 (50) を求めることができる。

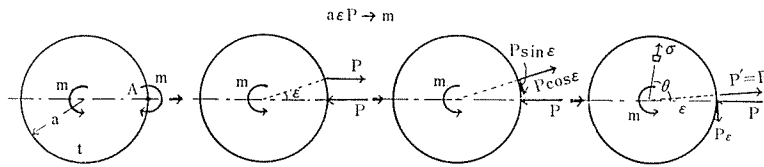
(註) 別法—(47)を(43)に代入し、公式

$$\sum_{n=2}^{\infty} D^n \sin n\theta = \left(\frac{1}{D} - 1\right) \Delta \sin \theta, \quad \sum_{n=2}^{\infty} D^n \cos n\theta = \frac{D}{D} (\cos \theta - \Delta) - \Delta \cos \theta,$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n D^n \sin n\theta = \frac{2}{D^2} \Delta \sin \theta (\cos \theta - \Delta) + \frac{1}{D} \sin \theta - \sin \theta. \quad (|D| < 1)$$

等を利用しても(50)を導くことができる。

(57)式の誘導の方針(計算は略す)



附図—2

附図—2より考えられるようにA点に作用するモーメントmによる円板の応力σは

法線荷重 $P' (=P)$, P による $\sigma = \sigma_P - \sigma_{P'} = \sigma(\theta) - \sigma(\theta - \epsilon) \approx \epsilon \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}$ と

接線荷重 P_ϵ すなわち $Q = \frac{m}{a}$ によるものの和と考えられる。したがってσは

(50)式をθについて微分した式にεをかけ $P_\epsilon \rightarrow m/a$ とおいた値と

(54)式のQの代わりに $-P_\epsilon$ すなわち $-m/a$ とおきかえた値

を加えることにより(57)式を求めることができる。

(終)

“緑材のある円板の強度”(第1報)誤植訂正		
頁行	誤	正
77↑3		右辺の第1・2項の間に-を入れる
87↓3	$\frac{P}{R_0 t} \frac{1}{\pi} (\dots\dots)$,	$-\frac{P}{R_0 t} \frac{1}{\pi} (\dots\dots)$
”↓4	$\frac{P}{R_0 t} \frac{1}{\pi} \left(\frac{4}{1+D^2} - 1\right)$,	$-\frac{1}{R_0 t} \frac{1}{\pi} \left(\frac{4}{(1+D^2)^2} - 1\right)$
88↓5	$-\frac{\kappa}{2(1+\kappa)}$,	$-\frac{\kappa}{2(1+\kappa)}$

Summary**Strength Calculation of a Circular Disk with a Frame. (II)**

Saburo SASAKI

(Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering)

This paper deals with the stress distribution of a circular disk with a frame produced when any loads are applied to the outside of the frame and are held to be equilibrated by the central loads of the disk.

The author treated the frame as a curved beam and used the continuous conditions of the displacements at the junction between the disk and the frame, then determined the coefficients of the disk and the frame.

When the concentrated loads are applied to the frame, for example, the stresses were calculated and compared with the stress in the cases of the rigid frame and the disk without frame to see the effect of the rigidity of the frame on the stress distribution.