

# 円環の強度 (続報)

(逆対称面内荷重をうける曲りはりとしての計算)

佐々木三郎\*

(昭和40年10月29日受理)

## 1. はしがき

薄肉円環に特定の荷重が作用した場合の解法は多数発表されているが<sup>1)</sup>、厚肉円環については比較的少なく、特に荷重が一般的な形で与えられた場合の包括的な解析はほとんど見当たらないようである。筆者は円環のひずみエネルギーを曲げ・軸力のほかにせん断の項まで考慮し、より精度の高い一般解を導く方針で計算を行った。

周辺に作用する任意の荷重をつぎのフーリエ級数で与えた。

$$\left. \begin{aligned} \text{外力の法線成分: } p_r &= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin n\theta, \\ \text{外力の接線成分: } p_\theta &= \gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin n\theta, \\ \text{モーメント荷重: } m &= \rho (\mu_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \sin n\theta). \end{aligned} \right\}$$

前報告<sup>2)</sup>では、一軸対称荷重 (実線で表はした項) について断面力・変位を導き、特別な場合として薄肉円環および二軸対称荷重の解を求め数例に適用し、さらに、ひずみエネルギーの項に論及した。

本報告は、逆対称荷重 (点線で表はした項) について、前報告と同様な解析により断面力・変位を誘導し、簡単な計算例を示したものである。

両報告の結果を重ね合わせるにより、任意荷重に対する解が得られるわけで、一例として任意の集中荷重に対する断面力を計算した。

(註) 両報告の結果を統一した形にするため前報告のモーメント荷重を表わす記号を変更した。また便宜上一軸対称荷重における断面力・変位の解を附録に——記号と誤植の一部を訂正して——再録した。記号の説明は前報告に一括してあるので重複をさけるため省略する。

## 2. 外力の表示

外周にそうて作用する  $x$  軸に逆対称な外力の法線・接線成分およびモーメント荷重を

\* 機械工学教室、講師

次のフーリエ級数で表わす。

$$\left. \begin{aligned} p_r &= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin n\theta, & p_\theta &= \gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \cos n\theta, \\ m &= \rho \left( \mu_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \cos n\theta \right). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$y$  方向の外力および中心周りのモーメントのつりあいより

$$2 \int_0^\pi (p_r \sin \theta + p_\theta \cos \theta) d\theta = 0, \quad 2 \int_0^\pi (R_0 p_\theta - m) d\theta = 0.$$

(1)を代入して次の関係を得る。

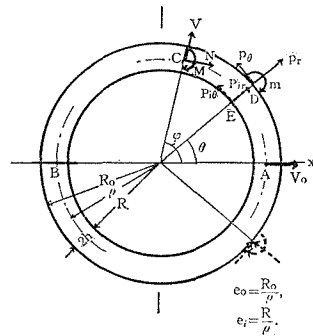
$$\delta_1 + \gamma_1 = 0, \quad e_0 \gamma_0 - \mu_0 = 0. \quad (2)$$

( $x$  方向の合力は当然 0 である)

### 3. 断 面 力

第 1 図において断面  $A$  におけるせん断力を  $V_0$  とすれば (逆対称性より軸力, 曲げモーメントは 0) 任意の断面  $C$  に生ずる 軸力( $N$ )・せん断力( $V$ )・曲げモーメント( $M$ )は

$$\left. \begin{aligned} N &= V_0 \sin \varphi + Q_1(\varphi), \\ V &= V_0 \cos \varphi + Q_2(\varphi), \\ M &= \rho \left\{ -V_0 \sin \varphi - Q_3(\varphi) + Q_4(\varphi) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$



第 1 図 円 環

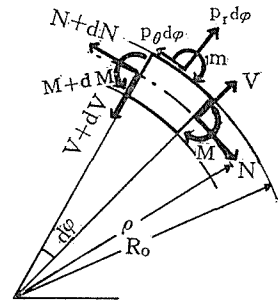
$$\left. \begin{aligned} \text{ここに } Q_1(\varphi) &= \int_0^\varphi \left\{ p_r \sin(\varphi - \theta) - p_\theta \cos(\varphi - \theta) \right\} d\theta, \\ Q_2(\varphi) &= \int_0^\varphi \left\{ p_r \cos(\varphi - \theta) + p_\theta \sin(\varphi - \theta) \right\} d\theta, \\ Q_3(\varphi) &= \int_0^\varphi \left\{ p_r \sin(\varphi - \theta) + p_\theta (e_0 - \cos(\varphi - \theta)) \right\} d\theta, \\ Q_4(\varphi) &= \int_0^\varphi \frac{m}{\rho} d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(1)を代入し上式を計算すれば ((2)により  $\delta_1$  の代わりに  $-\gamma_1$  を用いる)

$$\left. \begin{aligned}
 Q_1(\varphi) &= \left\{ -\gamma_0 - \gamma_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} (n\delta_n + \gamma_n) \right\} \sin \varphi - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} (\delta_n + n\gamma_n) \sin n\varphi, \\
 Q_2(\varphi) &= \gamma_0 + \left\{ -\gamma_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} (n\delta_n + \gamma_n) \right\} \cos \varphi - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} (n\delta_n + \gamma_n) \cos n\varphi, \\
 Q_3(\varphi) &= e_0 \gamma_0 \varphi + \left\{ -\gamma_0 + (e_0 - 1) \gamma_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} (n\delta_n + \gamma_n) \right\} \sin \varphi \\
 &\quad - \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^2 - 1} \delta_n - \left( \frac{e_0}{n} - \frac{n}{n^2 - 1} \right) \gamma_n \right\} \sin n\varphi, \\
 Q_4(\varphi) &= \mu_0 \varphi + \mu_1 \sin \varphi + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \mu_n \sin n\varphi.
 \end{aligned} \right\} (5)$$

なお (3) (5) 式が、円環要素のつりあい方程式

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dN}{d\varphi} &= V - p_\theta, \\
 \frac{dV}{d\varphi} &= -N + p_r, \\
 \frac{dM}{d\varphi} &= -\rho \left\{ V + (e_0 - 1) p_\theta \right\} + m.
 \end{aligned} \right\} (6)$$



第2図 要素のつりあい

を満足することは容易に証明される。

### 不静定量 $V_0$ および 断面力の計算

$V_0$  は断面  $A$  の  $V_0$  方向の変位が 0 であることから *Castigliano* の定理を用いて計算することができる。すなわち

$$\frac{\partial U}{\partial V_0} = 0 \tag{7}$$

円環に貯えられるひずみエネルギー  $U$  を次のようにとる<sup>3)</sup>

$$U = \frac{2}{AE} \left[ \frac{1 + \kappa}{2\kappa\rho} \int_0^\pi M^2 d\varphi + \frac{\rho}{2} \int_0^\pi N^2 d\varphi + \int_0^\pi MN d\varphi + \frac{\zeta\rho}{2} \int_0^\pi V^2 d\varphi \right]. \tag{8}$$

ここに  $\kappa = -\frac{1}{A} \int_A \frac{\eta}{\rho + \eta} dA$  …… 曲りはりの断面係数,

$\zeta = k \frac{E}{G}$  …… 断面のせん断係数 ( $k$  は断面形による定数).

(7)(8)より

$$\frac{1+\kappa\zeta}{\kappa\rho} \int_0^\pi M \frac{\partial M}{\partial V_0} d\varphi + \rho \int_0^\pi N \frac{\partial N}{\partial V_0} d\varphi + \int_0^\pi \left( M \frac{\partial N}{\partial V_0} + N \frac{\partial M}{\partial V_0} \right) d\varphi + \zeta \rho \int_0^\pi V \frac{\partial V}{\partial V_0} d\varphi = 0$$

(3) および  $\frac{\partial M}{\partial V_0} = -\rho \sin \varphi$ ,  $\frac{\partial N}{\partial V_0} = \sin \varphi$ ,  $\frac{\partial V}{\partial V_0} = \cos \varphi$  を代入し, せいとんすれば

$$V_0 = -\frac{2}{\pi(1+\kappa\zeta)} \int_0^\pi \left\{ (Q_3(\varphi) - Q_4(\varphi)) \sin \varphi + \kappa\zeta Q_2(\varphi) \cos \varphi \right\} d\varphi.$$

(5)を代入して

$$V_0 = \gamma_0 + \frac{1}{1+\kappa\zeta} \left\{ (1-e_0)\gamma_1 + \mu_1 \right\} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} (n\delta_n + \gamma_n). \quad (9)$$

(3)に(5)(9)を代入すれば, 断面力はつぎのフーリエ級数で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} N &= \frac{1}{1+\kappa\zeta} \left\{ -(e_0 + \kappa\zeta)\gamma_1 + \mu_1 \right\} \sin \varphi - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} (\delta_n + n\gamma_n) \sin n\varphi, \\ V &= \gamma_0 + \frac{1}{1+\kappa\zeta} \left\{ (1-e_0)\gamma_1 + \mu_1 \right\} \cos \varphi - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} (n\delta_n + \gamma_n) \cos n\varphi, \\ M &= \rho \left[ \frac{\kappa\zeta}{1+\kappa\zeta} \left\{ (1-e_0)\gamma_1 + \mu_1 \right\} \sin \varphi \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^2-1} \delta_n - \left( \frac{e_0}{n} - \frac{n}{n^2-1} \right) \gamma_n + \frac{1}{n} \mu_n \right\} \sin n\varphi \right]. \end{aligned} \right\} (10)$$

(註) 上式は荷重が外周にそうて作用した場合の断面力であるが, 荷重が中心線または内周にそうて作用するときは,  $e_0$  の代りに 1 または  $e_i$  とおけばよい。

## 5. 変 位

断面  $B$  を固定したときの, 内周上の点  $E$  における変位  $\delta'$  ( $\delta'_r, \delta'_\theta$ ) を求めるために (第 1 図)  $E$  に仮想荷重  $P_i$  ( $P_{ir}, P_{i\theta}$ ) を作用させ *Castigliano* の定理を用いる。すなわち

$$\delta' = \left( \frac{\partial U}{\partial P_i} \right)_{P_i \rightarrow 0} \quad (11)$$

断面  $\varphi$  における断面力は

$$\begin{aligned}
 & (3)\text{式} \dots\dots\dots (\varphi < \theta) \\
 & \left. \begin{aligned}
 NP_i &= V_0 \sin \varphi + Q_1(\varphi) + P_{ir} \sin(\varphi - \theta) - P_{i\theta} \cos(\varphi - \theta), \\
 VP_i &= V_0 \cos \varphi + Q_2(\varphi) + P_{ir} \cos(\varphi - \theta) + P_{i\theta} \sin(\varphi - \theta), \\
 MP_i &= \rho \left\{ -V_0 \sin \varphi - Q_3(\varphi) + Q_4(\varphi) \right. \\
 & \quad \left. - P_{ir} \sin(\varphi - \theta) - P_{i\theta} (e_i - \cos(\varphi - \theta)) \right\}.
 \end{aligned} \right\} (\varphi > \theta) \quad (12)
 \end{aligned}$$

(8) (11) (12) より

$$AE\delta' = \left[ \int_{\theta}^{\pi} \left\{ \left( \frac{1+\kappa}{\kappa} \frac{M}{\rho} + N \right) \frac{\partial MP_i}{\partial P_i} + \rho \left( \frac{M}{\rho} + N \right) \frac{\partial NP_i}{\partial P_i} + \zeta \rho V \frac{\partial VP_i}{\partial P_i} \right\} d\varphi \right]_{P_i \rightarrow 0} \quad (13)$$

(12) より

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial MP_i}{\partial P_{ir}} &= -\rho \sin(\varphi - \theta), & \frac{\partial NP_i}{\partial P_{ir}} &= \sin(\varphi - \theta), & \frac{\partial VP_i}{\partial P_{ir}} &= \cos(\varphi - \theta), \\
 \frac{\partial MP_i}{\partial P_{i\theta}} &= \rho \left\{ \cos(\varphi - \theta) - e_i \right\}, & \frac{\partial NP_i}{\partial P_{i\theta}} &= -\cos(\varphi - \theta), & \frac{\partial VP_i}{\partial P_{i\theta}} &= \sin(\varphi - \theta).
 \end{aligned}$$

(13) に代入して

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{l} \delta'_r \\ \delta'_\theta \end{array} \right\} &= \frac{\rho}{AE} \int_{\theta}^{\pi} \left\{ \frac{1}{\kappa} \frac{M}{\rho} \left\{ \begin{array}{l} -\sin(\varphi - \theta) \\ \cos(\varphi - \theta) \end{array} \right\} + \zeta V \left\{ \begin{array}{l} \cos(\varphi - \theta) \\ \sin(\varphi - \theta) \end{array} \right\} \right. \\
 & \quad \left. - \left( \frac{1+\kappa}{\kappa} \frac{M}{\rho} + N \right) \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ e_i \end{array} \right\} \right\} d\varphi. \quad (14)
 \end{aligned}$$

(10)–(12) を  $\varphi$  におきかえた式——および積分公式 (前報告 (16) (16)' 式) を利用して, 変位 ( $\delta'_r, \delta'_\theta$ ) は次のように求めることができる。

$$\left. \begin{aligned}
 \delta'_r &= \frac{\rho}{AE} \left\{ \left\{ \zeta \gamma_0 - \frac{\zeta(1-e_0)}{1+\kappa\zeta} \gamma_1 - \frac{\zeta}{1+\kappa\zeta} \mu_1 + \sum_2^{\infty} (-1)^n J_3(n) \right\} \sin \theta \right. \\
 & \quad \left. + \sum_2^{\infty} J_4(n) \sin n\theta \right\}, \\
 \delta'_\theta &= \frac{\rho}{AE} \left\{ \left\{ \zeta \gamma_0 - J_1 \gamma_1 - J_2 \mu_1 + e_i \sum_2^{\infty} (-1)^n J_5(n) \right\} \right. \\
 & \quad \left. + \left\{ \zeta \gamma_0 - J_1 \gamma_1 - J_2 \mu_1 + \sum_2^{\infty} (-1)^n J_3(n) \right\} \cos \theta + \sum_2^{\infty} \left\{ J_3(n) - e_i J_5(n) \right\} \cos n\theta \right\}. \quad (15)
 \end{aligned} \right\}$$

ここに

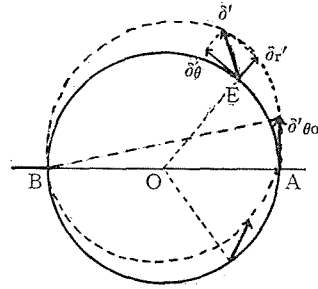
$$\begin{aligned}
 J_1 &= \frac{\zeta(1-e_0)e_i}{1+\kappa\zeta} - e_0 e_i, & J_2 &= -\left(\frac{\zeta e_i}{1+\kappa\zeta} + e_i\right), \\
 J_3(n) &= \frac{1}{n^2-1} \left[ \frac{1+\kappa\zeta}{\kappa} \frac{n}{n^2-1} \delta_n - \left\{ \frac{n}{\kappa} \left( \frac{e_0}{n} - \frac{n}{n^2-1} \right) - \frac{\zeta}{n^2-1} \right\} \gamma_n + \frac{1}{\kappa} \mu_n \right], \\
 J_4(n) &= \frac{1}{n^2-1} \left[ \left( \frac{1}{\kappa(n^2-1)} - \frac{\zeta n^2}{n^2-1} \right) \delta_n - \left\{ \frac{1}{\kappa} \left( \frac{e_0}{n} - \frac{n}{n^2-1} \right) - \frac{\zeta n}{n^2-1} \right\} \gamma_n + \frac{1}{\kappa n} \mu_n \right], \\
 J_5(n) &= \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{\kappa(n^2-1)} \delta_n - \left\{ \frac{1}{\kappa} \left( \frac{e_0}{n} - \frac{n}{n^2-1} \right) + \frac{e_0}{n^2} \right\} \gamma_n + \frac{1}{n} \left( \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{n} \right) \mu_n \right].
 \end{aligned} \tag{16}$$

逆対称荷重であるから変位も逆対称であろうことは容易に想像しうるところで、実際(15)式の  $\theta$  の代りに  $-\theta$  とおけば  $\delta_r'$  は符号を変え、 $\delta_\theta'$  はそのまま変わらないからである。

なお同式に  $\theta=\pi, 0$  とおけば

$$\delta'_{r\pi} = \delta'_{\theta\pi} = 0.$$

$$\delta'_{r0} = 0, \quad \delta'_{\theta0} = \frac{2\rho}{AE} \left\{ \zeta \gamma_0 - J_1 \gamma_1 - J_2 \mu_1 + \sum_{ev}' J_3(n) \right\}.$$



第3図 内周の変位( $\delta_r', \delta_\theta'$ )

この値は  $B$ 断面固定、 $A$ 断面の変位は接線方向のみであることを示している。 $x, y$ 軸方向の直径の変化か0であることも一つの特長であろう。

直径 $AB$ を固定した場合の変位  $\delta(\delta_r, \delta_\theta)$ .

変換式は

$$\delta_r = \delta_r' - \frac{1}{2} \delta_{\theta\theta}' \sin \theta, \quad \delta_\theta = \delta_\theta' - \frac{1}{2} \delta_{\theta\theta}' (1 + \cos \theta). \tag{17}$$

—下方に  $\frac{1}{2} \delta_{\theta\theta}'$  移動し、右廻りに  $\frac{1}{2} \delta_{\theta\theta}'$  回転—

(15) を代入し

$$\begin{aligned}
 \delta_r &= \frac{\rho}{AE} \left\{ -\left( K_{0i} \gamma_1 + K_i \mu_1 + \sum_{od}'' Z_1(n) \right) \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} Z_2(n) \sin n\theta \right\}, \\
 \delta_\theta &= \frac{\rho}{AE} \left\{ -\sum_{ev}' Z_1(n) - \sum_{od}'' Z_1(n) \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} Z_1(n) \cos n\theta \right\},
 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\left. \begin{aligned} Z_1(n) &= -K_{2i}(n)\delta_n + K_{3oi}(n)\gamma_n + K_5(n)\mu_n, \\ Z_2(n) &= K_1(n)\delta_n - K_{2o}(n)\gamma_n - K_4(n)\mu_n. \end{aligned} \right\}$$

ただし  $\sum'_{ev}$  は  $n = 2, 4, 6 \dots$  についての和を,  $\sum''_{od}$  は  $n = 3, 5, 7 \dots$  についての和を表わす。

$K_{0i}, K_i, K_1(n) \dots$  は附録(A-6)と同じである。

(註) (15) (18)式は内周の変位を表わすが, 中心線もしくは外周の変位は, 同式の  $e_i$  の代りに1あるいは  $e_o$  とおけばよい。

### 6. 薄肉円環の解と簡単な計算例

半径方向の厚さ ( $R_o - R_i$ ) が中心線半径 ( $\rho$ ) に比べて非常に小さい薄肉円環の場合には, 近似的につぎのようにおくことができる。

$$\kappa = \frac{I}{A\rho^2}, \quad \frac{1}{\kappa} \gg \frac{1}{1+\kappa}, \quad \frac{\kappa}{1+\kappa}, \quad \kappa, \quad 1, \quad \zeta, \quad e_o = e_i = 1. \tag{19}$$

断面力……(10)より

$$\left. \begin{aligned} N &= (-\gamma_1 + \mu_1)\sin\varphi - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} (\delta_n + n\gamma_n)\sin n\varphi, \\ V &= \gamma_o + \mu_1 \cos\varphi - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} (n\delta_n + \gamma_n)\cos n\varphi, \\ M &= \rho \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^2 - 1} \delta_n + \frac{1}{n(n^2 - 1)} \gamma_n + \frac{1}{n} \mu_n \right\} \sin n\varphi. \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

変位……B点を固定した変位 ( $\delta_r', \delta_{\theta}'$ ). BAを固定した変位 ( $\delta_r, \delta_{\theta}$ ). はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \delta_r' &= \frac{\rho^3}{EI} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n M(n) \sin\theta + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} M(n) \sin n\theta \right\}, \\ \delta_{\theta}' &= \frac{\rho^3}{EI} \left\{ \left( \gamma_1 - \mu_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 - 1}{n^2} M(n) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \gamma_1 - \mu_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n M(n) \right) \cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3} M(n) \cos n\theta \right\}, \end{aligned} \right\} \tag{21}$$

ここに 
$$M(n) = \frac{n}{(n^2 - 1)^2} \delta_n + \frac{1}{(n^2 - 1)^2} \gamma_n + \frac{1}{n^2 - 1} \mu_n.$$

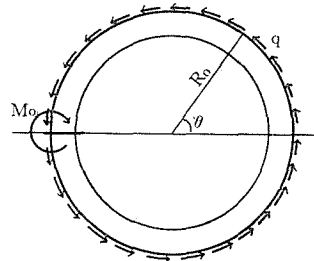
$$\left. \begin{aligned} \delta_r &= \frac{\rho^3}{EI} \left\{ -(\gamma_1 - \mu_1 + \sum_{od}'' Z_1) \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} n Z_1 \sin n\theta \right\}, \\ \delta_\theta &= \frac{\rho^3}{EI} \left\{ -\sum_{ev}' Z_1 - \sum_{od}'' Z_1 \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} Z_1 \cos n\theta \right\}. \\ Z_1 &= \frac{1}{n(n^2-1)^2} \delta_n + \frac{1}{n^2(n^2-1)^2} \gamma_n + \frac{1}{n^2(n^2-1)} \mu_n. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

簡単な計算例。(第4図)

“外周に一樣な接線外力  $q$  が作用し、 $B$  断面にこれとつりあうモーメント  $M_0$  が作用している円環の断面力・変位”を計算してみよう。

(a) 外力のフーリエ係数

$$\left. \begin{aligned} \delta_n &= 0, \quad \gamma_0 = R_0 q = \frac{M_0}{2\pi R_0}, \quad \gamma_n = 0. \\ \mu_0 &= \frac{M_0}{2\pi\rho}, \quad \mu_n = (-1)^n \frac{M_0}{\pi\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$



第4図 一樣接線荷重

(b)  $A$  断面のせん断力  $V_0 \dots (9)$  より……

$$V_0 = \frac{M_0}{\pi R_0} \left( \frac{1}{2} - \frac{e_0}{1 + \kappa\zeta} \right). \quad (24)$$

(c) 断面力……(10)より

$$\left. \begin{aligned} N &= -\frac{M_0}{\pi R_0} \frac{1}{1 + \kappa\zeta} \sin \theta, \quad V = \frac{M_0}{\pi R_0} \left( \frac{1}{2} - \frac{e_0}{1 + \kappa\zeta} \cos \theta \right), \\ M &= \frac{M_0}{\pi} \left( -\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{1 + \kappa\zeta} \sin \theta \right). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

(d) 変位……簡単のため薄肉円環の解(21)を適用する……

$$\delta_r' = \frac{M_0 \rho^2}{2\pi EI} \theta (1 + \cos \theta), \quad \delta_\theta' = \frac{M_0 \rho^2}{2\pi EI} \left( 1 + \frac{1}{2} \pi^2 - \frac{1}{2} \theta^2 + \cos \theta - \theta \sin \theta \right). \quad (26)$$

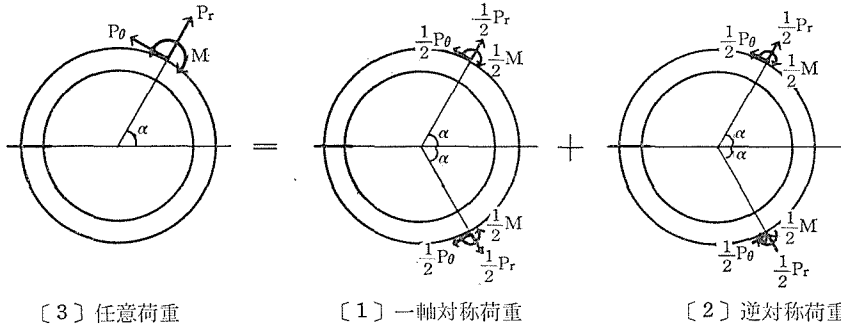
## 7. 一般荷重への適用 (前報告との総括)

周辺に作用する任意の荷重をフーリエ級数で表わすと



$$\left. \begin{aligned}
 \text{外力の法線成分: } p_r &= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \delta n \sin n\theta, \\
 \text{外力の接線成分: } p_\theta &= \gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin n\theta, \\
 \text{モーメント: } m &= \rho \left( \mu_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \sin n\theta \right).
 \end{aligned} \right\} (27)$$

(27)は一軸対称荷重 (前報告) と逆対称荷重 (本報告) の重ね合せによつて得られるものであることは、はしがきにも述べたとおりで、これをたとえば集中荷重の場合に図式的に表わすと



第5図 任意荷重の分解

つぎに上図の解を導いてみよう。集中荷重の場合断面力の一般解を適用するよりも、A断面の不静定量を求めて直接断面力を誘導する方が簡明である。

(変位は複雑になるので省略した)

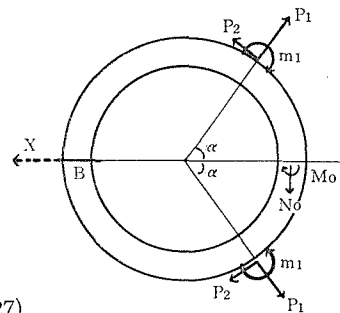
〔1〕 一軸対称集中荷重 (第6図)

右図の集中荷重について附録 (A-1, 2, 3) を適用する。B断面を固定するに必要な力をXとすれば

$$X = 2 (P_1 \cos \alpha - P_2 \sin \alpha).$$

(i) 外力, モーメントのフーリエ係数

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha_0 &= \frac{P_1}{\pi} + \frac{X}{2\pi}, \quad \alpha_n = \frac{2P_1}{\pi} \cos n\alpha + \frac{X}{\pi} (-1)^n, \\
 \beta_n &= \frac{2P_2}{\pi} \sin n\alpha, \quad \nu_n = \frac{2m_1}{\pi\rho} \sin n\alpha.
 \end{aligned} \right\} (27)$$



第6図 集中荷重〔1〕

(ii) 不静定量  $N_0, M_0$

$$\left. \begin{aligned} N_0 &= \frac{P_1}{\pi} (\pi - \alpha) \sin \alpha + \frac{P_2}{\pi} \left\{ K_1 \sin \alpha + (\pi - \alpha) \cos \alpha \right\} - \frac{m_1}{\rho \pi (1 + \kappa \zeta)} \sin \alpha, \\ M_0 &= \frac{\rho P_1}{\pi} \left\{ \frac{1}{1 + \kappa} (1 + \cos \alpha) - (\pi - \alpha) \sin \alpha \right\} \\ &+ \frac{\rho P_2}{\pi} \left\{ -K_2 \sin \alpha + (\pi - \alpha) (e_0 - \cos \alpha) \right\} + \frac{m_1}{\pi} \left\{ \frac{2}{1 + \kappa \zeta} \sin \alpha - (\pi - \alpha) \right\}. \end{aligned} \right\} (28)$$

ただし  $K_1 = (2e_0 - 1 + \kappa \zeta) / (1 + \kappa \zeta)$ ,  $K_2 = K_1 + (1/1 + \kappa)$ .

(v) 断面力

$$\left. \begin{aligned} N &= N_0 \cos \theta + \left[ P_1 \sin (\theta - \alpha) - P_2 \cos (\theta - \alpha) \right], \\ V &= -N_0 \sin \theta + \left[ P_1 \cos (\theta - \alpha) + P_2 \sin (\theta - \alpha) \right], \\ M &= M_0 + \rho N_0 (1 - \cos \theta) - \left[ \rho P_1 \sin (\theta - \alpha) + \rho P_2 \{ e_0 - \cos (\theta - \alpha) \} - m_1 \right]. \end{aligned} \right\} (29)$$

ただし [ ] の項は  $\alpha < \theta < \pi$  に対して用いる。

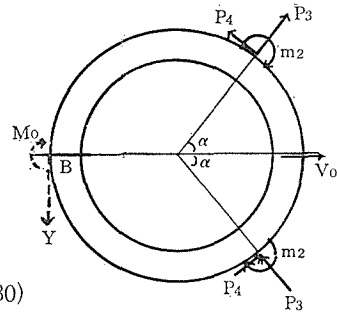
〔2〕 逆対称集中荷重 (第7図)

B断面を固定するため必要な力, モーメントを  $Y, M_0$  とすれば

$$\left. \begin{aligned} Y &= 2 (P_3 \sin \alpha + P_4 \cos \alpha), \\ M_0 &= 2 \rho e_0 \left\{ P_3 \sin \alpha + P_4 (1 + \cos \alpha) \right\} - 2m_2. \end{aligned} \right\}$$

(i) 外力, モーメントのフーリエ係数

$$\left. \begin{aligned} \delta_n &= \frac{2P_3}{\pi} \sin n\alpha, \\ \gamma_0 &= \frac{P_4}{\pi} + \frac{Y}{2\pi}, \quad \gamma_n = \frac{2P_4}{\pi} \cos n\alpha + \frac{Y}{\pi} (-1)^n, \\ \mu_0 &= \frac{m_2}{\pi\rho} + \frac{M_0}{2\pi\rho}, \quad \mu_n = \frac{2m_2}{\pi\rho} \cos n\alpha + \frac{M_0}{\pi\rho} (-1)^n. \end{aligned} \right\} (30)$$



第7図 集中荷重〔2〕

(ii) 不静定量  $V_0, \dots, (9)$  より

$$\begin{aligned} V_0 &= -\frac{P_3}{\pi} \left\{ \frac{1 - \kappa \zeta}{1 + \kappa \zeta} \sin \alpha + (\pi - \alpha) \cos \alpha \right\} - \frac{P_4}{\pi} \left\{ \frac{2e_0}{1 + \kappa \zeta} (1 + \cos \alpha) - (\pi - \alpha) \sin \alpha \right\} \\ &+ \frac{m_2}{\rho \pi (1 + \kappa \zeta)} (1 + \cos \alpha). \end{aligned} \quad (31)$$

(b) 断面力

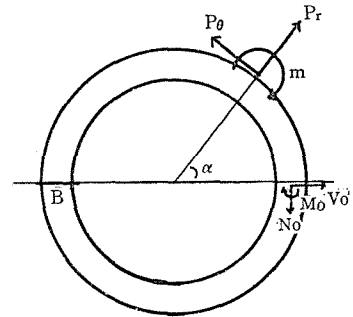
$$\left. \begin{aligned} N &= V_0 \sin \theta + \left[ P_3 \sin (\theta - \alpha) - P_4 \cos (\theta - \alpha) \right], \\ V &= V_0 \cos \theta + \left[ P_3 \cos (\theta - \alpha) + P_4 \sin (\theta - \alpha) \right], \\ M &= -\rho V_0 \sin \theta - \left[ \rho P_3 \sin (\theta - \alpha) + \rho P_4 \{e_0 - \cos (\theta - \alpha)\} - m_2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

ただし [ ] の項は  $\alpha < \theta < \pi$  に対して用いる。

〔3〕 任意の集中荷重 (第8図)

〔1〕 〔2〕 において

$$\left. \begin{aligned} P_1 = P_3 = \frac{1}{2} P_r, \quad P_2 = P_4 = \frac{1}{2} P_\theta, \\ m_1 = m_2 = m. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$



第8図 任意の集中荷重

$$\left. \begin{aligned} N_0 &= \frac{P_r}{2\pi} (\pi - \alpha) \sin \alpha + \frac{P_\theta}{2\pi} \{K_1 \sin \alpha + (\pi - \alpha) \cos \alpha\} - \frac{m}{\rho} \frac{1}{\pi(1 + \kappa\zeta)} \sin \alpha, \\ V_0 &= -\frac{P_r}{2\pi} \left\{ \frac{1 - \kappa\zeta}{1 + \kappa\zeta} \sin \alpha + (\pi - \alpha) \cos \alpha \right\} - \frac{P_\theta}{2\pi} \left\{ \frac{2e_0}{1 + \kappa\zeta} (1 + \cos \alpha) - (\pi - \alpha) \sin \alpha \right\} \\ &\quad + \frac{m}{\rho} \frac{1}{\pi(1 + \kappa\zeta)} (1 + \cos \alpha), \\ M_0 &= \frac{\rho P_r}{2\pi} \left\{ \frac{1}{1 + \kappa} (1 + \cos \alpha) - (\pi - \alpha) \sin \alpha \right\} + \frac{\rho P_\theta}{2\pi} \left\{ -K_2 \sin \alpha + (\pi - \alpha) (e_0 - \cos \alpha) \right\} \\ &\quad + \frac{m}{2\pi} \left\{ \frac{2}{1 + \kappa\zeta} \sin \alpha - (\pi - \alpha) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

断面力：

$$\left. \begin{aligned} N &= N_0 \cos \theta + V_0 \sin \theta + \left[ P_r \sin (\theta - \alpha) - P_\theta \cos (\theta - \alpha) \right], \\ V &= -N_0 \sin \theta + V_0 \cos \theta + \left[ P_r \cos (\theta - \alpha) + P_\theta \sin (\theta - \alpha) \right], \\ M &= M_0 + \rho N_0 (1 - \cos \theta) - \rho V_0 \sin \theta - \left[ \rho P_r \sin (\theta - \alpha) + \rho P_\theta \{e_0 - \cos (\theta - \alpha)\} - m \right]. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

ただし [ ] の項は  $\alpha < \theta < \pi$  に対して用いる。

## 8. む す び

以上の結果を要約すると

- (1) 厚肉円環の周辺に逆対称面内荷重 (1) 式が作用したとき生ずる断面力・変位を、それぞれ (10) (15) (18) 式のフーリエ級数で表はすことができた。
- (2) 薄肉円環の解は上記の解に (19) 式のおきかえを行つて求めることができ、その形は相当簡略化され計算も容易になる。(第6節)  
断面力 (10) (20) 式を比較すると厚肉円環とのちがいは、ほとんど荷重項  $\delta_1, \gamma_1, \mu_1$  のみに関係しているのも興味深く、一般に  $\mu_1$  は 1 に比べて小さいのでその差は余り著しくない。
- (3) 実際の荷重例に適用するには、荷重をフーリエ係数で表わし (10) 式等に代入する。これを既知の関数に書直したい場合は頻度の多い  $\theta, \sin\theta, \cos\theta, \theta\cos\theta$  等を必要な変域で展開したフーリエ級数を組合せればよいが、一般に変位は断面力に比べ複雑で既知関数に書直すのは面倒なことが多い、幸い変位式は収束性がよいので場合によつては直接数値計算をした方が速いようである。
- (4) 任意の荷重については前報告 (一軸対称荷重) と本報告 (逆対称荷重) の結果を重ね合せて計算することができる。有用な一例として任意の集中荷重に対する解を求めた。(第7節)

特定の荷重に対して、そのフーリエ係数を求める手法、フーリエ級数で与えられた解を既知の関数に書直す公式等は省略した。本報告は円環の断面力・変位を求めるのにとどめ、断面力より応力を求める計算については割愛した。

終りに本計算に当つて参考とした文献と、終始好意ある御鞭達をいただいている本学工学部宮入武夫教授に深く謝意を表します。

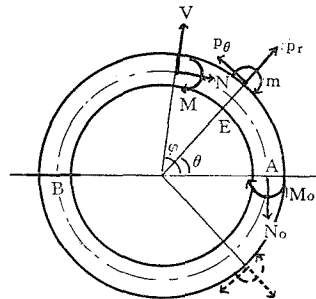
## 附 録

一軸対称荷重における断面力・変位を再録する (前報告の記号、誤植を一部訂正した)

$$\left. \begin{aligned} \text{外力の法線成分: } p_r &= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\theta, \\ \text{接線成分: } p_\theta &= \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin n\theta, \end{aligned} \right\} (A-1)$$

$$\text{モーメント荷重: } m = \rho \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \sin n\theta.$$

$$\text{力のつりあいより } \alpha_1 - \beta_1 = 0, \quad (A-2)$$



第9図 一軸対称荷重

A断面の不静定量  $N_0$ ,  $M_0$

$$\left. \begin{aligned} N_0 &= \alpha_0 + \frac{1}{1 + \kappa \zeta} \left\{ (e_0 + \kappa \zeta) \beta_1 - \nu_1 \right\} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} (\alpha_n - n \beta_n), \\ M_0 &= \rho \left[ -\frac{\kappa}{1 + \kappa} \alpha_0 + \frac{\kappa \zeta}{1 + \kappa \zeta} \left\{ (e_0 - 1) \beta_1 - \nu_1 \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^2 - 1} \alpha_n + \left( \frac{e_0}{n} - \frac{n}{n^2 - 1} \right) \beta_n - \frac{1}{n} \nu_n \right\} \right] \end{aligned} \right\} (A-3)$$

断面力

$$\left. \begin{aligned} N &= \alpha_0 + \frac{1}{1 + \kappa \zeta} \left\{ (e_0 + \kappa \zeta) \beta_1 - \nu_1 \right\} \cos \varphi - \sum_{n=2}^{\infty} (\alpha_n - n \beta_n) \cos n\varphi, \\ V &= -\frac{1}{1 + \kappa \zeta} \left\{ (e_0 - 1) \beta_1 - \nu_1 \right\} \sin \varphi + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} (n \alpha_n - \beta_n) \sin n\varphi, \\ M &= \rho \left[ -\frac{\kappa}{1 + \kappa} \alpha_0 + \frac{\kappa \zeta}{1 + \kappa \zeta} \left\{ (e_0 - 1) \beta_1 - \nu_1 \right\} \cos \varphi \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^2 - 1} \alpha_n + \left( \frac{e_0}{n} - \frac{n}{n^2 - 1} \right) \beta_n - \frac{1}{n} \nu_n \right\} \cos n\varphi \right]. \end{aligned} \right\} (A-4)$$

B断面を固定した場合の内周の変位 ( $\delta_r'$ ,  $\delta_\theta'$ )

$$\left. \begin{aligned} \delta_r' &= \frac{\rho}{AE} \left\{ \frac{1}{1 + \kappa} \alpha_0 + \left( \frac{1}{1 + \kappa} \alpha_0 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n X_1(n) \right) \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} X_1(n) \cos n\theta \right\}, \\ \delta_\theta' &= \frac{\rho}{AE} \left\{ \left( -\frac{1}{1 + \kappa} \alpha_0 + K_{0i} \beta_1 + K_i \nu_1 - \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n X_1(n) \right) \sin \theta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} X_2(n) \sin n\theta \right\}. \end{aligned} \right\} (A-5)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} X_1(n) &= K_1(n) \alpha_n + K_{20}(n) \beta_n + K_4(n) \gamma_n, \\ X_2(n) &= K_{2i}(n) \alpha_n + K_{30i}(n) \beta_n + K_5(n) \gamma_n, \\ K_{0i} &= \frac{\zeta(1 - e_0)(1 - e_i)}{1 + \kappa \zeta} + e_0 e_i, & K_i &= \frac{\zeta(1 - e_i)}{1 + \kappa \zeta} - e_i, \\ K_1(n) &= \frac{1}{\kappa(n^2 - 1)^2} + \frac{\zeta n^2}{(n^2 - 1)^2}, \\ K_{2s}(n) &= \frac{1}{\kappa(n^2 - 1)} \left( \frac{e_s}{n} - \frac{n}{n^2 - 1} \right) - \frac{\zeta n}{(n^2 - 1)^2}, \\ K_{30i}(n) &= \frac{1}{\kappa} \left( \frac{e_0}{n} - \frac{n}{n^2 - 1} \right) \left( \frac{e_i}{n} - \frac{n}{n^2 - 1} \right) + \frac{e_0 e_i}{n^2} + \frac{\zeta}{(n^2 - 1)^2}, \\ K_4(n) &= -\frac{1}{\kappa n(n^2 - 1)}, & K_5(n) &= -\frac{1}{\kappa n} \left( \frac{e_i}{n} - \frac{n}{n^2 - 1} \right) - \frac{e_i}{n^2}. \end{aligned} \right\} (A-6)$$

## 文 献

- 1) R.J. Roark : Formulas for Stress and Strain. 3rd ed. p.156. 1954.
  - 2) 佐々木三郎 : 機械・精機学会諏訪地方講演会前刷 (昭39.10)  
佐々木三郎 : 信州大学工学部紀要, 18号 (昭39.12)
  - 3) S. Timoshenko : Strength of Materials. 3rd ed. p.382. 1955.
  - 4) たとえば  
大野 諫 : 土木学会誌, 37-7. pp.300-305. (昭27-7)
- 上記のほかに
- 倉西正嗣 : 一般構造力学, 応用力学講座, 共立出版, pp.53-56. 1958.  
森口・宇田川・一松 : 数学公式Ⅱ, 岩波全書, 1962.  
J. Pippard : Studies in Elastic Structure, 1st ed. 1952.

### Summary

#### Strength Calculation of a Circular Ring (continued report)

(As a curved beam under the action of a skew-symmetrical load)

The purpose of our researches is to attempt the solution of sectional forces and displacements of a thick circular ring under the action of any load which is represented in the following form :

$$\left. \begin{aligned}
 \underline{p_r} &= \alpha_0 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\theta}_{\text{full underline}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin n\theta}_{\text{dotted underline}}, \\
 \underline{p_\theta} &= \gamma_0 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \cos n\theta}_{\text{dotted underline}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin n\theta}_{\text{full underline}}, \\
 \underline{m} &= \rho (\mu_1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \cos n\theta}_{\text{dotted underline}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \sin n\theta}_{\text{full underline}}).
 \end{aligned} \right\}$$

In the preceding paper, solutions were obtained by calculations of uni-symmetrical loads about an axis (expressed in terms of full underline).

This paper deals with the calculations for skew-symmetrical loads about an axis (expressed in terms of dotted underline).

By superposing these results, solutions under any load is be to obtained. For example, we derived the solution of sectional forces submitted to the action of any concentrated load.