ONE PROBLEM OF PUZZLE

安　東　康　喬*

Yasutaka ANDO

（昭和27年9月5日受理）

15枚の2糎角位の板切れに1枚宛1から15迄の番号を書き，内のり8糎位の平い箱に1重に並べると板切1枚分の空き間が出来る。此の板切れを持ち上げないで空き間を利用して1枚づゝずらせ，任意の順序に並べたものから左から又下へ番号順に並べ変えるパヅルがある。春の日曜日の縁側で考えた。

先づ此の15枚の札と空き間の位置はどんな順序からでも所定の順序に並べ変え得るかどうかが問題になる。

空き間を記号で *，番号 i の札を (i) と書く。箱の札を並べる位置も上の1行を左から1, 2, 3, 4 と次の2行目を左から5, 6, 7, 8 と以下同様に番号を附ける。1から16迄の番号が附く事になるが，i 番の位置を〔i〕で表わす事にする。

最初札が或る順序で並べられてある，一般性を失わず，* が〔16〕に在ると考え得る。*の隣りに在る札をずらせ * の位置に持つて来る事を，* とその札との互換と考えれば，札を並べ変える操作は * と或る札との互換を幾回かやる事である。此の操作の後，* がもとの位置〔16〕にもどつたとすれば互換の回数は偶数回である事は容易に証明される。札の箱に並られてある或る順序を位置の番号順に1列に並べて順列と考えれば，最初與えられた順列が偶順列である時しか基本の順列(1, 2, ……, 15)に並べ変える事が出来ない。

次に偶順列であれば必ず基本の順列に並べ変え得るかどうかを論じよう。

定義　〔1〕と〔2〕又は〔1〕と〔4〕の如く相隣る 2 つの位置は距離が 1 であると云い，〔1〕と〔3〕又は〔1〕と〔5〕の如きは距離が 2 であると云い，………，〔1〕と〔16〕の如きは距離が 6 であると云う。

定理1　* の位置と奇数の距離に在る札 (i) は他の位置を変えずに * と互換する事が出来る。勿論操作の途中では他の札の位置も動かすのであるが最後には他の札は最初の位置で * と (i) だけが位置を交換して居る様に出来る事である。

距離が1の場合，距離が3で桂馬飛びの場合，同じく距離は3で直線上の場合，距離が5の場合に分ければ容易に証明出来る。

定理2　* が〔16〕に，(11) が〔11〕に在る。(11) 以外の2枚の札 (a), (b) は (11) 以外の他の札の位置を変えず互換する事が出来る。但しそのとき (11) は〔16〕に来る，* は〔11〕に来る。* が〔11〕に，(11) が〔16〕に在る場合も (11) を〔11〕に動かす事によつて，(a), (b) を互換する事が出来る。

証明　i)　(a), (b) が共に〔16〕と奇数の距離に在る場合。

(a) と〔16〕，(a) と〔11〕，(b) と〔11〕，(b) と〔16〕は共に奇数距離に在るから順環的に定理1を使つて置き換えればよい。

ii)　(a), (b) が共に〔16〕と偶数距離に在る場合。

〔16〕と奇数距離に在る任意の札 (c) を * と互換する。(a) と *を互換する。任意の可能な札

* 信州大学繊維学部数学研究室

(d) （$\neq(a)$，(b)，(c)，(11)）と＊を互換する。＊と (b)，(a) と＊，(d) と＊，(b) と＊，(c) と＊，(d) と＊，(11) と＊，(c) と＊，(d) と＊を順次に互換すればよい。

iii) (a) が〔16〕と奇数距離，(b) が〔16〕と偶数距離に在る場合。

(b) と＊，(a) と＊，(a), (b), (11) 以外の可能な任意の札 (c) と＊，(11) と＊，(a)，(b)，(11)，(c) 以外の可能な任意の札 (d) と＊，(b) と＊，(11) と＊，(c) と＊，(b) と＊，(d) と＊を順次に互換すればよい。証明終り。

最初札と＊が任意の位置に在る．一般性を失わず＊が〔16〕，(1) が〔11〕に在ると仮定する。それで他の札が偶順列に並んで居るとすれば偶数回の互換で所定の順列を得る。此の時定理 2 を使って互換をやるとすれば，偶数回 (11) は位置を変え〔11〕にもどる。故に偶順列は必ず所定の順列に並べ変え得る。

此の問題を一般化して，n^2-1 枚の札を並べ変える同種のパヅルでも全く同様の方法で同じ結果を得る。更に n^3-1 枚の札を今度は立体に並べ空間に於ける同種のパヅルを考え得る。それを又一般化して m 次元空間に於てるパヅルを考える。これ等を解くには定理 1 の証明法を何んとか考えねばならない。此所では問題を提出して置くのに留める。

(1952—5)