

横揺れ週期に依る負荷架空索の中央垂下量の推定法に就て (第1報)

鳥 山 清 美

On the method estimating the sag of the loaded skyline cable by using a period of oscillation (1)

Kiyomi TORIYAMA

無負荷索の索張りを測定または推定する方法に就ては、今まで多く紹介されているが、^{1) 2) 3) 4)} 荷重の懸つている場合に対しては、直接測定法以外には適当な方法が見当たらない。

筆者は、横揺れ週期に依る方法を、負荷索にも拡張使用することによつて、負荷時中央垂下量が推定出来ることを知つたので茲に報告する。此処では先づ弾性伸長を考慮しないとも及び曳索の無い場合に就て述べる。

尙本研究の計算、実験に協力して下された春日敏、長祐吉両君並に本山紀子嬢に謝意を表す。

I 理 論 式

支間水平距離 d 、支間傾斜角 θ の二点 A, B の間に張られた架空索の任意点 C (A 点からの水平距離: kd ($k \leq 1$)) に、索の下方 e のところに荷重 P が吊されている。荷重点の垂下量を f_D 、荷重が中央に来たときの垂下量——中央垂下量——を f_0 とする。

このような索が横揺れするとき、全体が軸 AB の周りに振動する物理振子と考えると、その週期 t は

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + I_1 + I_2}{(G_0 + G_1 + G_2)g \cos \theta}} \quad \dots\dots\dots (1)$$

で表はされる。茲に g は重力の加速度, G_0 ,

G_1, G_2 及び I_0, I_1, I_2 は夫々荷重, 索 AC, 索 BC の軸 AB に関する一次モーメント及び二次モーメントであり次の様に求められる。

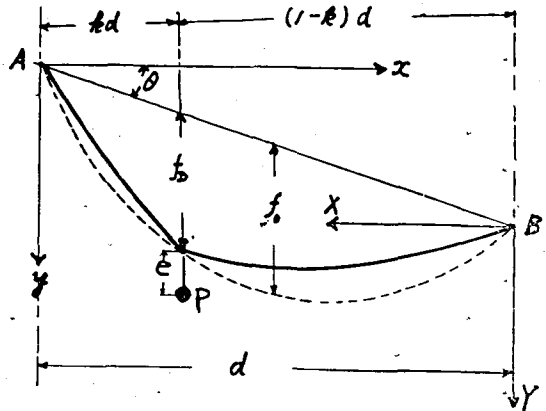
図のように A 点を原点として x-y 座標をとると。

$$G_0 = \frac{P}{g} (f_D + e) \cos^2 \theta \quad I_0 = \frac{P}{g} (f_D + e)^2 \cos^2 \theta \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$G_1 = \int_0^{kd} \frac{q}{g} (y-x \tan \theta) \cos \theta dS \quad I_1 = \int_0^{kd} \frac{q}{g} (y-x \tan \theta)^2 \cos^2 \theta dS \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$G_2 = \int_{kd}^d \frac{q}{g} (y-x \tan \theta) \cos \theta dS \quad I_2 = \int_{kd}^d \frac{q}{g} (y-x \tan \theta)^2 \cos^2 \theta dS \quad \dots\dots\dots (4)$$

但し g : 索単位長重量 S: 索 長



G_2, I_2 はまた, B 点を原点として図のように X-Y 座標をとると

$$G_2 = \int_0^{(1-k)d} \frac{q}{g} (Y+X \tan \theta) \cos \theta \, dS \quad I_2 = \int_0^{(1-k)d} \frac{q}{g} (Y+X \tan \theta)^2 \cos^2 \theta \, dS \dots\dots\dots (4)'$$

とも表はせる。

さて, 拋物線索理論に従えば⁵⁾

$$f_D = 4m(1+2n)(k-k^2)f_0 \dots\dots\dots (5)$$

但し

$$\begin{cases} m = \frac{(1+3n+3n^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+2n)\left\{1+12(n+n^2)(k-k^2)\right\}^{\frac{1}{2}}} \\ n = \frac{P \cos \theta}{q d} : \text{荷重比} \end{cases}$$

$$y - x \tan \theta = 4m f_0 \left\{ (1+2n-2kn) \frac{x}{d} - \left(\frac{x}{d}\right)^2 \right\} \dots\dots\dots (6)$$

$$\frac{dy}{dx} = 4m s_0 \left\{ (1+2n-2kn) - 2 \frac{x}{d} \right\} + \tan \theta \dots\dots\dots (7)$$

但し $s_0 = \frac{f_0}{d} : \text{垂下比}$

(7) 式の右辺第一項は, 索道に於ては一般に微量であるから, これを Δ_1 と置くと

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$= \sec \theta \left(1 + \Delta_1 \sin \theta \cos \theta + \frac{\Delta_1^2}{2} \cos^2 \theta\right) dx \dots\dots\dots (8)$$

茲に $\Delta_1 = 4m s_0 \left\{ (1+2n-2kn) - 2 \left(\frac{x}{d}\right) \right\}$

同様に

$$Y+X \tan \theta = 4m f_0 \left\{ (1+2kn) \frac{x}{d} - \left(\frac{x}{d}\right)^2 \right\} \dots\dots\dots (9)$$

$$dS = \sec \theta \left(1 - \Delta_2 \sin \theta \cos \theta + \frac{\Delta_2^2}{2} \cos^2 \theta\right) dx \dots\dots\dots (10)$$

茲に $\Delta_2 = 4m s_0 \left\{ (1+2kn) - 2 \left(\frac{x}{d}\right) \right\}$

(5) (6) (8) (9) (10) 式を (2) (3) (4)' 式に代入して, 計算を行うと

$$G_0 + G_1 + G_2 = \frac{4mqdf_0}{g} \left[n \left\{ 1 + \frac{\nu}{4m(1+2n)Z} \right\} (1+2n) Z + \frac{1}{6} (1+6nZ) \right. \\ \left. + \frac{4}{15} \left\{ 1+10nZ+40n(1+4n+3n^2)Z^2 \right\} m^2 s_0^2 \cos^4 \theta \right]$$

$$I_0 + I_1 + I_2 = \frac{16m^2 qdf_0^2}{g} \cos \theta \left[n \left\{ 1 + \frac{\nu}{4m(1+2n)Z} \right\}^2 (1+2n)^2 Z^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{30} \left\{ 1+10nZ+10n(1+4n)Z^2 \right\} \right. \\ \left. + \frac{4}{105} \left\{ 1+14nZ+14n(1+6n)(1+12Z)Z^2+280n^3(7+4n)Z^3 \right\} m^2 s_0^2 \cos^4 \theta \right]$$

但し $Z = k-k^2 \quad \nu = \frac{e}{f_0} : \text{吊下比}$

故に (1) 式より

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{4f_0}{5g} \frac{1}{a\beta\gamma}} \dots\dots\dots (11)$$

或は

$$f_0 = \frac{5g}{16\pi^2} a, \beta, \gamma, t^2 \dots\dots\dots (12)$$

$$\text{但し } \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{1 + 12(n+n^2)Z}{m \{ 1 + 10nZ + 40n(1+4n+3n^2)Z^2 \}} \\ \beta = \frac{1 + \frac{3n\nu}{2m \{ 1 + 12(n+n^2)Z \}}}{1 + \frac{15n \left\{ (1+2n)Z + \frac{\nu}{8m} \right\} \nu}{m \{ 1 + 10nZ + 40n(1+4n+3n^2)Z^2 \}}} \\ \gamma = \frac{1 + \frac{8}{5} \frac{\{ 1 + 10nZ + 40n(1+4n+3n^2)Z^2 \}}{\{ 1 + 12(n+n^2)Z + \frac{3n\nu}{2m} \}} m^2 s_0^2 \cos^4 \theta}{1 + \frac{7}{8} \frac{\{ 1 + 14nZ + 14n(1+6n)(1+12Z)Z^2 + 280n^3(7+4n)Z^3 \}}{\left[\{ 1 + 10nZ + 40n(1+4n+3n^2)Z^2 \} + \frac{15n}{m} \left\{ (1+2nZ + \frac{\nu}{8m}) \nu \right\} \right]} m^2 s_0^2 \cos^4 \theta} \end{array} \right.$$

が得られる。

II 実 用 式

(12) 式はこのまゝでは煩雑であり実用的でない。ところで式中の γ は、荷重重量、位置、支点傾斜角、垂下比及び吊下比の函数であり、その値は、普通索道のとり得る範囲のこれらの変量に対しては、第一表に示す通りである。この表からもわかる通り、 $k \geq 0.01$ 又は $(1-k) \geq 0.01$ のときは他の変量がどうあろうとその値は殆んど 1 である。

一方実際に横揺れさせる場合、荷重が支点に非常に近いと、荷重と索が聯成振動を起し、荷重と索が一体となつて揺れない。このようなときは、その週期は (1) 式で表わせないのは勿論、測定も困難である。従つて本方法は適用出来ない。

荷重と索が一体となつて揺れるのは、吊下比及び荷重比によつても変化するが、普通

$$k > 0.1 \text{ 或は } (1-k) > 0.1 \dots\dots\dots (13)$$

のときである。即ち実際面から k の値は (13) 式の通り制限されるのであるが、この条件があつても実用的には殆んど不都合を感じない。

結局、(12) 式に於て、(13) 式の下に $\gamma=1$ として

$$f_0 = \frac{5g}{16\pi^2} a, \beta, t^2$$

$$\text{或は } f_0 = C_0 \beta t^2 \dots\dots\dots (14)$$

$$\text{但し } C_0 = \frac{5g}{16\pi^2} a$$

なる実用式が得られる。

$g = 9.80 \text{ m/sec}^2$ として、 C_0 及び β の値を Fig.1 及び Fig.2 に示す。

第一表 γ の 値

k or(1-k)	ν s_0 θ n	0				0.1				0.2			
		0.02		0.10		0.02		0.10		0.02		0.10	
		0°	30°	0°	30°	0°	30°	0°	30°	0°	30°	0°	30°
		0	0	1.0002	1.0001	1.0045	1.0026	1.0002	1.0001	1.0045	1.0026	1.0002	1.0001
0	0.1	1.0002	1.0001	1.0042	1.0024	1.0002	1.0001	1.0044	1.0025	1.0002	1.0001	1.0048	1.0026
0	1.0	1.0001	1.0000	1.0035	1.0020	1.0002	1.0001	1.0054	1.0031	1.0003	1.0002	1.0069	1.0039
0	5.0	1.0001	1.0000	1.0034	1.0019	1.0005	1.0002	1.0127	1.0071	1.0008	1.0005	1.0198	1.0112
0.01	0	1.0002	1.0001	1.0045	1.0026	1.0002	1.0001	1.0045	1.0026	1.0002	1.0001	1.0045	1.0026
0.01	0.1	1.0002	1.0001	1.0041	1.0023	1.0002	1.0001	1.0042	1.0024	1.0002	1.0001	1.0044	1.0025
0.01	1.0	1.0001	1.0000	1.0019	1.0010	1.0001	1.0001	1.0027	1.0015	1.0001	1.0001	1.0035	1.0020
0.01	5.0	1.0000	1.0000	1.0004	1.0002	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	0	1.0002	1.0001	1.0045	1.0026	1.0002	1.0001	1.0045	1.0026	1.0002	1.0001	1.0045	1.0026
0.1	0.1	1.0002	1.0001	1.0037	1.0021	1.0002	1.0001	1.0037	1.0021	1.0002	1.0001	1.0037	1.0021
0.1	1.0	1.0001	1.0000	1.0015	1.0008	1.0000	1.0000	1.0012	1.0007	1.0000	1.0000	1.0008	1.0004
0.1	5.0	1.0000	1.0000	1.0006	1.0003	1.0000	1.0000	1.0004	1.0002	1.0001	1.0001	1.0002	1.0001
0.5	0	1.0002	1.0001	1.0045	1.0026	1.0002	1.0001	1.0045	1.0026	1.0002	1.0001	1.0045	1.0026
0.5	0.1	1.0002	1.0001	1.0038	1.0022	1.0001	1.0001	1.0036	1.0021	1.0001	1.0001	1.0035	1.0020
0.5	1.0	1.0001	1.0000	1.0017	1.0010	1.0001	1.0000	1.0015	1.0008	1.0000	1.0000	1.0012	1.0001
0.5	5.0	1.0000	1.0000	1.0006	1.0003	1.0000	1.0000	1.0005	1.0003	1.0002	1.0001	1.0004	1.0002

Fig. 1 Value of C in formula (14)

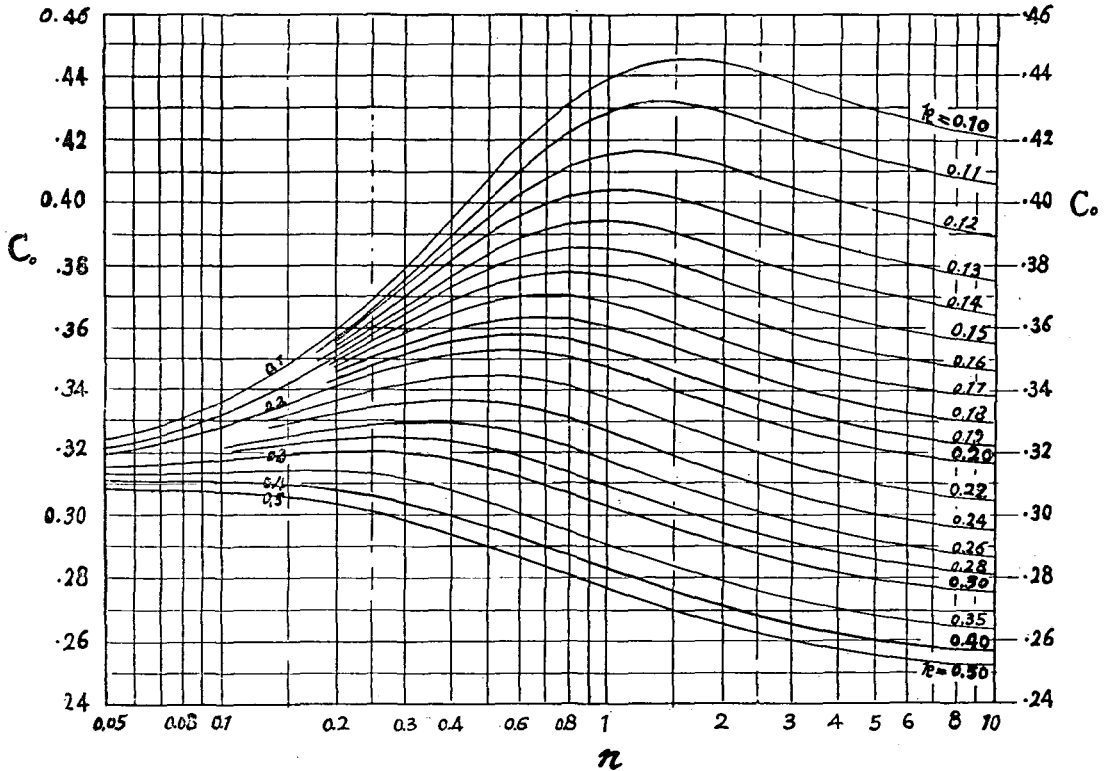
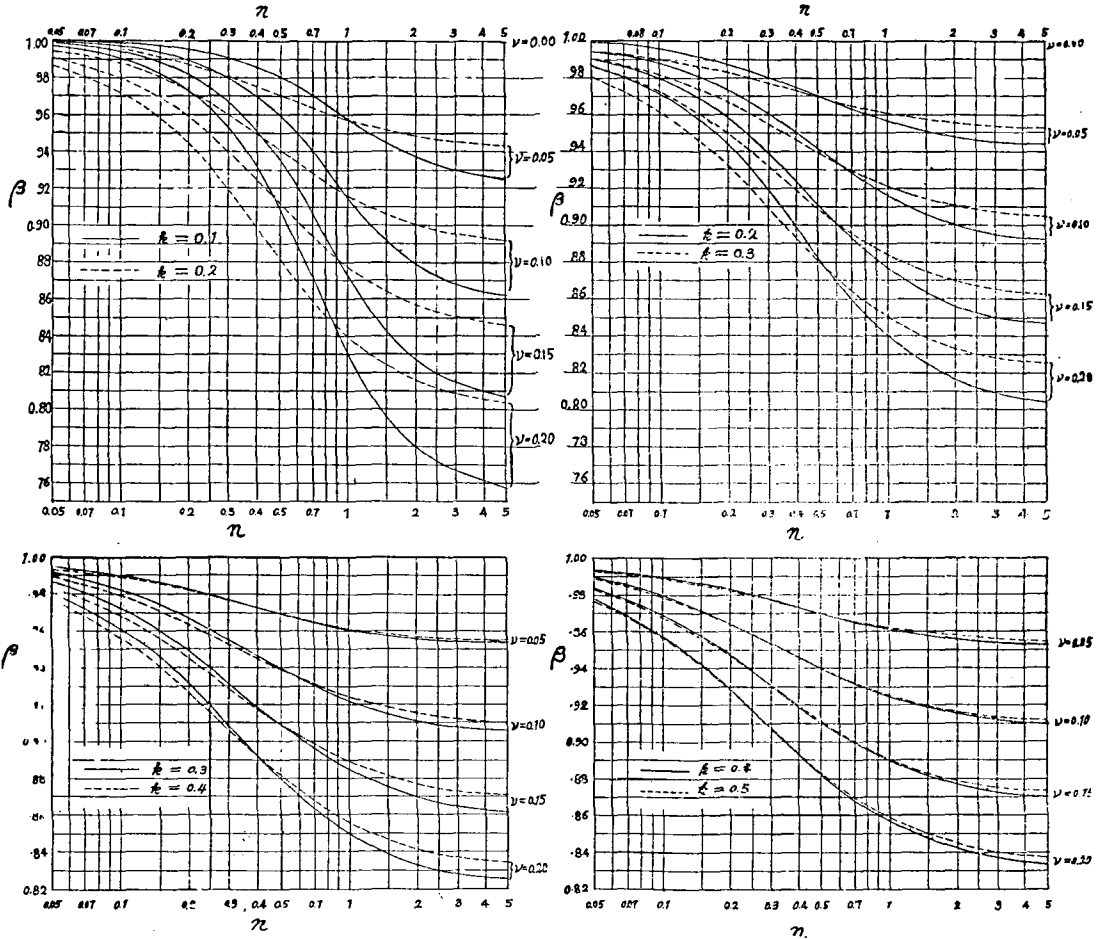


Fig. 2 Value of β in formula (14)



$n = 0$, 従つて $C_0 = 1$, $\beta = 1$ のときが無負荷索の場合であり

$$f_0 = 0.310 t^2$$

となる。^{3) 4)}

Fig.1, Fig.2 の C_0 , β の値を用いる場合, 週期 t の単位を (秒) とすれば, 中央垂下量 f_0 は (米) 単位で出る。

(14) 式中の β は, 吊下比に対する補正係数であり, 既に求むべき中央垂下量 f_0 が含まれているから, 実際操作は次の如く行う。すなわち, 先ず

$$f_1 = C_0 t^2 \dots\dots\dots (15)$$

から f_0 の第1近似値 f_1 を求め, 次いで

$$\frac{e}{f_1} = v_1 \quad (e \text{ は既知})$$

を用いて, β 図から v_1 に対する補正係数 β_1 を読み

$$f_2 = \beta_1 f_1$$

として, f_0 の第2近似値 f_2 を求める。同様にして

$$\frac{e}{f_2} = v_2 \rightarrow \beta_2 \rightarrow f_3 = \beta_2 f_1$$

$$\frac{e}{f_3} = v_2 \rightarrow \beta_3 \rightarrow f_4 = \beta_3 f_1$$

と繰えしを行えば、 f_1, f_2, f_3, \dots は順次 f_0 に近づく。

II 実 験

上述の(14)式が実際に果して使用可能か否か確めるため、次の如き実験を試みた。

(実験1)

条件、支間水平距離 $d = 34.078\text{m}$

支間傾斜角 $\theta = 10^\circ 51'$

使用鋼索 7本線6撚り径4mm, 単位重量 $q = 0.033\text{ kg/m}$

荷重 $P = 0.670\text{kg}, 1.800\text{kg}, 2.460\text{kg}$ ($n = 0.585, 1.572, 2.148$)

荷重位置 上方支点より夫々 1.815, 6.815, 12.815, 15.815, 17.039, 18.815, 21.815, 24.815, 27.815m ($k = 0.112, 0.200, 0.288, 0.375, 0.464, 0.500, 0.552, 0.640, 0.728, 0.816$)

吊下長 $e = 0$

索張りは索長を変化させる。

実験方法、上記荷重を上記各位置に、重心が索上に来る様に乘せ、微小横揺れをさせ、その30回揺れる時間をストップウォッチで測定し週期を求める。又荷重を中央に懸けたときの垂下量 f_0 を測定する。

(実験2)

条件 荷重 $n = 0.585, 1.12, 1.73$

荷重位置 $k = 0.2, 0.5$

吊下長 $e = 0.10\text{m}$

他は(実験1)に同じ

実験方法 荷重の重心が索下10cmの所にあるように吊す。他は(実験1)に同じ

(実験3)

条件 使用鋼索 7本線6撚り径6mm, 単位重量 $g = 0.128\text{ kg/m}$

荷重 $P = 2.5\text{kg}, 5.2\text{kg}$ ($n = 0.584, 1.214$)

荷重位置 $k = 0.2, 0.5$

吊下長さ 適当に変化させる。

他は前実験と同じ。

III 実験結果及び考察

実験1, 2, 3から得た測定値と、(14)式からの推定値をその推定経過と共に第二表, 第三表, 第四表に示す。

いづれの場合も、実測値と推定値はよく一致していると云えるのであるが、たゞ実験1の結果が示す如く、荷重位置が支点に近いときは、誤差が幾分増大する様である。これは矢張り、荷重と索が聯成振動気味に揺れるためであると思う。従つて荷重は成る可く支間の中央に近く懸けるのが望ましい。

次に、吊下比が大きくと、 f_1, f_2, f_3, \dots と、その値は非常に早く一定値に収斂することがわかるから、第3近似値 f_3 を以て、中央吊下量の推定値として充分である。Fig. 1, Fig. 2 の如き図表を

用いる限り、極端に吊下比の大なるときを除き、これ以上の計算を行つても無意味である。そして f_3 を用いたときの誤差は大略3%以下であり、実用上差支えないものと考えられる。

結局、負荷索の場合にも、(14)式を使用すれば、横揺れ週期から中央垂下量を推定することが充分可能である。

第二表 実験1よりの結果と計算

k or(1-k)	n=0.585				n=1.572				n=2.148			
	実測 $f_0=102.5\text{cm}$				$f_0=104.6\text{cm}$				$f_0=114.0\text{cm}$			
	tsec	C_0	f/cm	$\frac{f'-f_0}{f_0}$	t	C_0	f'	$\frac{f'-f_0}{f_0}$	t	C_0	f'	$\frac{f'-f_0}{f_0}$
0.112	— ※				1.553	0.430	103.7	-0.008	1.617	0.418	109.3	-0.041
0.200	1.682	0.353	99.9	-0.025	1.731	0.338	101.3	-0.031	1.833	0.332	111.5	-0.022
0.288	1.776	0.315	99.4	-0.030	1.845	0.298	101.4	-0.030	1.970	0.292	113.3	-0.006
0.375	1.860	0.299	103.4	+0.009	1.930	0.280	104.3	-0.002	2.033	0.274	113.2	-0.007
0.464	1.891	0.289	103.3	+0.008	1.963	0.272	104.8	+0.003	2.072	0.265	113.8	-0.002
0.500	1.893	0.288	103.2	+0.007	1.970	0.269	104.4	-0.003	2.075	0.263	113.2	-0.007
0.448	1.890	0.290	103.6	+0.010	1.960	0.273	104.8	+0.003	2.070	0.266	114.0	— 0
0.360	1.852	0.300	102.9	+0.005	1.928	0.282	104.8	+0.003	2.021	0.276	112.7	-0.011
0.272	1.773	0.323	101.5	-0.010	1.862	0.305	105.7	+0.011	1.946	0.293	111.0	-0.026
0.184	1.698	0.360	103.8	+0.013	1.716	0.346	101.9	-0.025	1.813	0.340	111.8	-0.025

但し f' は (14) 式から推定した垂下量

※ 聯成振動を起し測定不可能

第三表 実験2よりの結果と計算

k	n	e cm	f_0 cm	t sec	C_0	f_1 cm	β_1	f_2 cm	β_2	f_3 cm	$\frac{f_3-f_0}{f_0}$
0.2	0.585	10.0	70.6	1.474	0.354	76.9	0.915	70.4	0.909	69.9	-0.010
			79.3	1.552		85.3	0.925	79.0	0.919	78.4	-0.011
			115.0	1.862		122.7	0.947	116.2	0.943	115.7	+0.006
	1.12	10.0	77.8	1.588	0.346	87.3	0.902	78.7	0.896	78.2	+0.005
			85.5	1.627		91.6	0.907	83.1	0.900	82.4	-0.036
			120.1	1.940		130.2	0.932	121.3	0.928	120.8	+0.006
1.73	10.0	84.1	1.673	0.338	94.6	0.899	85.0	0.890	84.2	+0.001	
		93.0	1.732		101.4	0.904	91.7	0.893	90.6	-0.026	
		124.4	2.030		139.3	0.926	129.0	0.922	128.4	+0.032	
0.5	0.585	10.0	70.6	1.659	0.287	79.0	0.920	72.7	0.916	72.4	+0.026
			79.3	1.727		85.6	0.927	79.3	0.923	79.0	-0.004
			115.0	2.047		120.3	0.946	113.8	0.944	113.6	-0.012
	1.12	10.0	77.8	1.784	0.275	87.5	0.911	79.7	0.905	79.2	+0.018
			85.5	1.872		96.4	0.916	88.3	0.911	87.8	+0.027
			120.1	2.156		127.8	0.938	119.9	0.934	119.4	-0.006
1.73	10.0	84.1	1.881	0.267	94.5	0.913	86.2	0.906	85.6	+0.018	
		93.0	1.960		103.2	0.919	94.8	0.914	94.3	+0.014	
		124.4	2.237		133.6	0.936	125.0	0.931	124.4	0.000	

第四表 実験3よりの結果と計算

k	n	e cm	f ₀ cm	t sec	C ₀	f ₁ cm	β ₁	f ₂ cm	β ₂	f ₃ cm	$\frac{f_3-f_0}{f_0}$
0.2	0.584	8.0	103.0	1.763	0.353	109.7	0.952	104.4	0.949	104.1	+0.011
	"	17.2	103.0	1.827	"	117.8	0.906	106.7	0.895	105.4	+0.023
	"	10.0	107.6	1.810	"	116.4	0.943	109.8	0.941	109.5	+0.018
	1.214	9.0	121.5	1.937	0.343	128.7	0.937	120.6	0.935	120.3	-0.010
0.5	0.584	8.0	103.0	1.967	0.287	111.0	0.958	106.3	0.955	106.0	+0.030
	"	18.0	103.0	2.020	"	117.1	0.905	106.0	0.896	104.9	+0.018
	"	10.0	107.6	2.000	"	114.8	0.943	108.1	0.941	108.0	+0.004
	1.214	14.0	112.0	2.133	0.273	124.2	0.912	113.3	0.904	112.2	+0.002
	"	14.0	121.5	2.217	"	134.2	0.918	123.2	0.913	122.5	+0.008

引用文献

- 1) 林野庁編 ウイツセン集材機資料 No. 11 1952
- 2) 長野営林局編 索道集 1954
- 3) 竹下英世 架空送電線の弛度 1953
- 4) 堀高夫 架空索の垂下の推定法について 日林誌 1955
- 5) 加藤誠平 パラボリックケーブルの静力学的性質 日林誌 1930

Summary

By using a period of oscillation of a skyline cable on which one concentrated load hangs, a value of its middle sag can be estimated.

Formula (14) is practical formula under this case. Now, C₀ and β are coefficients whose value are given in Fig. 1 and Fig. 2 respectively.

β in (14), however, contains f₀ to be pursued, therefore we have to put forward the operation as follows. First of all the first approximate value (f₁) is calculated by formula (15), then get a value of β₁ corresponding ν₁=e/f₁ Through Fig. 2. the second approximate value (f₂) will be soon calculated thus f₂=β₁f₁. When we repeat this operation several times in the same way, f₁, f₂, f₃ will astrigent to a true value (f₀). Generally, the third approximate value (f₃) may satisfy our demand enough.