学位論文の審査結果の要旨

本論文ではアウスランダー・ゴーレンステイン環の環拡大を通しての構成法を論じる。アウスランダー・ゴーレンステイン環は数学、特に代数系の種々の理論に現れる環でその歴史は古い。しかし、1960年代のバスによる可換ゴーレンステイン環の特徴付け、それにヒントを得たアウスランダーによるアウスランダー・ゴーレンステイン環の提案（命名はビヨルクによる）の後、ビヨルク等の研究がある以降は停滞していたように見える。特に、アウスランダー・ゴーレンステイン環の環論的構成およびそれに繋がる研究が殆ど無くなっていた。最近 Hoshino-Koga は「ネータ環があるアウスランダー・ゴーレンステイン環上アウスランダー・ゴーレンステイン分解を持てばアウスランダー・ゴーレンステイン環である」ことを示した。彼らの記述では、分解を持つ、という具体的計算に持ち込み難い条件が課されている。しかし、次のフロベニウス拡大を使った形が知られている。即ち、「R はネータ環とするとき R の環拡大 A がフロベニウス拡大ならば A は R 上アウスランダー・ゴーレンステイン分解を持つ」これより A が R 上フロベニウス拡大ならば、R としてアウスランダー・ゴーレンステイン環を取れば A はアウスランダー・ゴーレンステイン環になる。本論文ではフロベニウス拡大について自己入射次元の推移も完全に決定した、即ち、A は R 上フロベニウス拡大とする。そして、A が左 R 加群として射影的かつ A が R 上分解するとする。このとき、A がアウスランダー・ゴーレンステイン環ならば R もそうであり、更に R の自己入射次元は A のそれと一致することを示した。これは環拡大において自己入射次元が推移することを示した重要な結果である。

3 章では群次数付環および群双次数付環からアウスランダー・ゴーレンステイン環を構成する。環 A を群 G による次数付環とする。A の G-次数族 {Ax}，x は G を渡る、とする。Ae を自明項とする。R の拡大環 A がアウスランダー・ゴーレンステイン環か否かを調べるのに、ある環 A から基と関係式により構成される次数付環 A’ で A’ が A の拡大環となる設定を考える。これは通常の発想では得られない独創的なアイデアである。ここでは A の第 1 種のフロベニウス拡大 A’ を構成する。構成法は A 上自由な環 A’ を作りその基の間の積を巧妙に定めることによる。そのとき A の拡大 A’ は第 1 種フロベニウス拡大である。環 A’ の良い点は A’ の G-不変部分環が A になることである。Ae が局所環で A の非自明項の積 AxAx’（x’ は x の逆元）が全ての x ≠ e について Ae の根基に入る（この条件を以下（＊）とする）ならば A’ は半完全基本環になることを副産物として得ている。A が条件（＊）を充たし、かつ Ae のフロベニウス拡大ならばそれは第 2 種になるこのことを使い、条件（＊）の下で A がアウスランダー・ゴーレンステイン環である必要十分条件は A’ がアウスランダー・ゴーレンステイン環になることである。これは一見奇妙な結果と思われる。つまり、A が Ae の拡大という設定で考えたいのであるが、その前に A の拡大 A’ について調べる。A’ は必要なのか、ということである。もちろん必要なのであるが、その必要性を見抜いた発想は優れている。以上を応用し、A が Ae の第 2 種フロベニウス拡大である G-次数付環 A の系統的な構成法を与える。環 R に対し R の自己同型 f と R の元 c を取る。自由 R 加群 A に対し、c と f に依存した積を与える。このとき、例えば f が恒等写像、

ｃ＝０の一見自明な場合でも興味深い例が供給されることを確認した。

4章では、任意の局所環から出発し、G－次数付局所環を系統的に構成する方法を与える。環Rを固定し3つ組(f, c, t)をfはRの自己同型、c, tはRの元、である条件を充たすものとする。自由R加群Aに(f, c, t)による積を導入し環とする。このときAはR上の第2種の分解フロベニウス拡大を示した。また、tがRの根基に属するとき、Aがアウスランダー・ゴーレンステイン局所環である必要十分条件はRがアウスランダー・ゴーレンステイン環なることを示した。更に、Aの拡大環A'でR上分解フロベニウス拡大かつ2種でA'はR上の完全行列環となるものを構成した。これは行列環という極めて広く分布するかんを用い豊富な例を与えるものである。

5章ではクリフォード拡大による構成法を論じている。自由R加群A'に、その基に(f, c)を用いた積を考える。このとき、A'はR上第2種の分解フロベニウス拡大である。これを特殊化してR上のクリフォード拡大A'を与える。するとそれは、第1種のフロベニウス拡大であったから、アウスランダー・ゴーレンステイン環の構成に使える。

補足においては、本論文の主目的であるアウスランダー・ゴーレンステイン環の系統的に構成された例を大量に与えた。これは今後のアウスランダー・ゴーレンステイン環の研究に著しく寄与すると考えられる。

以上の理由により本論文は学位論文に値する。

公表主要論文名

- Mitsuo Hoshino, Noritsugu Kameyama and Hirotaka Koga, Group-graded and group-bigraded rings, J. Algebra and its Applications (to appear).
- Mitsuo Hoshino, Noritsugu Kameyama and Hirotaka Koga, Construction of Auslander-Gorenstein local rings as Frobenius extensions, Colloq. Math. (to appear).
- Mitsuo Hoshino, Noritsugu Kameyama and Hirotaka Koga, Clifford extensions, Comm. In Algebra (to appear).