

氏名（本籍・生年月日）	松尾 健太郎（1 岡山県・2 昭和59年11月9日）		
学位の種類	博士（理学）		
学位記番号	甲 第 9 8 号		
学位授与の日付	平成26年 3月 20日		
学位授与の要件	信州大学学位規程 第5条第1項該当		
学位論文題目	The Borel cohomology of loop space of a homogeneous space (等質空間のループ空間の Borel コホモロジー)		
論文審査委員	主査 教授	栗林 勝彦 教授	
	教授	玉木 大 教授	
		五味 清紀 准教授	
		境 圭一 助教	
		山口 俊博 教授（高知大学）	

論 文 内 容 の 要 旨

群作用のある空間を調べる道具として、Borel（有理）コホモロジーがある。Borel コホモロジーは特異コホモロジーと比べ群作用をよく反映している。そのため、Borel コホモロジーは様々な手法により調べられている。Lie 群の作用のある多様体については、H.Cartan のアイデアを基にしている同変 de Rham 理論がある。トラス作用のある特別な多様体（GKM-多様体）に対しては、M.Goresky-R.Kottwitz- R.MacPherson の結果を基にした GKM 理論がある。

S.Lillywhite は、 G -形式的の概念をモデル圏の言葉で定義し、その基本性質を明らかにした。さらに G -形式的空間のループ空間の Borel コホモロジーをトージョン積を用いて記述した。その手法はバー分解を利用するものであり有理ホモトピー論的モデル（Sullivan モデル）を経由しないため、他の有理ホモトピー論における結果との関連が不鮮明である。本論文では、まず、有理ホモトピー論（Sullivan モデル）についての説明を行っている。位相空間の（Sullivan）モデルからその特異コホモロジーへの擬同型が存在するとき、その位相空間を形式的という。これを応用した相対形式的な組（relatively formalizable pair）を Sullivan モデルの言葉を用いて定義した。Serre ファイブレーションを含む相対形式的な組の引き戻し（pullback）のモデルを導来テンサー積（derived tensor product）を用いて表した。（本論文では、導来テンサー積を相対 Sullivan 代数を用いて定義している。）これにより引き戻しのコホモロジーはトージョン積で記述できる。

S.Lillywhite が定義した G -形式的を、相対形式的な組を用いて定義し直した。したがって、有理ホモトピー論的立場により議論することを可能にした。S.Lillywhite が行ったモデル圏の場合と同様に G -形式的空間の基点付ループ空間の Borel 構成のモデルは導来テンサー積を用いて記述できることを示した。

さらに、M.Goresky-R.Kottwitz-R.MacPherson により定義された同変形式的（equivariantly formal）であり、Borel 構成が形式的である空間の自由ループ空間の Borel 構成のモデルも導来テンサー積を用いて記述できることを示した。

Lie 群の間の準同型により、等質空間 Lie 群の作用を考えることができる。本論文の後半

では、自然な条件を加えることにより、等質空間が G -形式的と同変形式的であることとその Borel 構成が形式的であることを示している。したがって、上の結果より、等質空間のループ空間の Borel 構成のモデルは導来テンサー積を用いて表すことができる。

複素射影空間はユニタリ群の等質空間とみなすことができる。よって、 1 次元トーラスからユニタリ群への準同型により複素射影空間は 1 次元トーラスの線型作用を与えることができる。作用を与える準同型は、共役をとることにより像がユニタリ群の標準極大トーラスに含まれるような準同型に置き換えることが出来る。この置き換えた準同型は、 m 次元複素射影空間を扱う場合は、 $m+1$ 個の整数によって記述することが出来る。ここで $m+1$ 個の各整数を線型作用の成分という。上の結果を適用することにより、 $m+1$ 個の整数を用いて、次を求めた；

(1) 複素射影空間の基点付ループ空間の

(a) Borel 構成の Sullivan モデルと (b) Borel コホモロジー。

(2) 複素射影空間の自由ループ空間の

(a) Borel 構成の有理モデル。

m 次元複素射影空間の Borel コホモロジーは線型作用の成分の入れ替えを行っても同型であるが、基点付ループ空間のそれは線形作用の $m+1$ 番目の成分を特徴付ける形になった。これは、基点付ループ空間の Borel コホモロジーが元の空間の Borel コホモロジーでは検出することが出来なかった作用の違いを検出したことになる。ただし、 1 次元複素射影空間の基点付ループ空間の Borel コホモロジーは、線形作用の 2 個の成分を入れ替えても同型である。実際、空間レベルで成分を入れ替える準同型が存在することを示している。