

熱あるいは物質移動に伴う自然対流に  
関する基礎的研究

1987年1月

坂田光雄

# 熱あるいは物質移動に伴う自然対流に 関する基礎的研究

1997年1月

坂田光雄

# 目 次

<b>1</b>	<b>緒 論</b>	<b>1</b>
1.1	概説	1
1.2	従来の研究	4
1.2.1	反応吸収系におけるマランゴニ対流に関する従来の研究	7
1.2.2	気泡塔内流れに関する従来の研究	8
1.2.3	熱対流に関する従来の研究	9
	参考文献	12
<b>2</b>	<b>反応吸収系におけるマランゴニ対流</b>	<b>17</b>
2.1	緒言	17
2.2	問題の定式化	19
2.2.1	モデルと定常解	19
2.2.2	攪乱方程式と境界条件	22
2.2.3	攪乱の解および固有値	25
2.3	結果および考察	26
2.3.1	平滑表面の場合	26
2.3.2	表面変形の効果	29
2.4	結論	33
	付録	35
	参考文献	59
<b>3</b>	<b>気泡塔内流れの遷移について</b>	<b>61</b>
3.1	緒言	61
3.2	実験装置および方法	63
3.3	結果および考察	64
3.3.1	流動状態とガスホールドアップの変化	64
3.3.2	流れの判別	65
3.4	結論	68
	参考文献	76
<b>4</b>	<b>鉛直側壁部分加熱による円筒内熱対流の実験</b>	<b>77</b>
4.1	緒言	77
4.2	実験装置および方法	79
4.3	結果および考察	81

4.3.1	液体における流れの観察および温度分布	81
4.3.2	空気における温度測定	83
4.3.2.1	温度分布	83
4.3.2.2	レイリー数の効果	83
4.3.2.3	空間の効果	85
4.4	結論	87
	参考文献	101
<b>5</b>	<b>鉛直側壁部分加熱による円筒内熱対流の数値計算</b>	<b>103</b>
5.1	緒言	103
5.2	モデルと基礎方程式	105
5.3	差分方程式と計算方法	107
5.4	風上差分法による結果	109
5.5	$Pr = 0.72$ の場合の対流変化	112
5.5.1	定常対流	113
5.5.2	周期振動流の発生 (分岐 1)	113
5.5.3	分岐 2 ( $2^1$ 分岐)	114
5.5.4	分岐 3 ( $2^2$ 分岐) およびカオスの振動	115
5.6	プラントル数の効果	117
5.6.1	振動流発生	117
5.6.2	分岐過程	119
5.6.3	対流構造の変化	119
5.6.4	振動数	121
5.7	空間の効果	122
5.7.1	定常対流	122
5.7.2	振動流発生	123
5.7.3	$Ra = 5 \times 10^4$ の場合の空間効果	123
5.8	熱伝達率	126
5.9	結論	127
	参考文献	
<b>6</b>	<b>結論</b>	<b>175</b>
	謝辞	181

# 第1章

## 緒論

# 第1章 緒論

## 1.1 概説

静止した流体層に熱あるいは物質の出入りがあると、温度や濃度の関数である流体の密度や表面張力が部分的に変化するため、浮力や表面張力の不均一が生じて流体に動き（自然対流）が発生する。つまり、自然対流とは、流れを作り出す外的な操作なしで、流体の内的要因によって発生する流れである。静止した流体中の熱移動あるいは物質移動は分子運動による移動現象である。一方、対流運動中での熱移動や物質移動では、分子運動に伴う移動と流体粒子の物理的な運動に伴いエネルギーや物質が移動する2つの機構が同時に起こる。従って、対流が発生すると熱や物質の移動量が大きくなることはよく知られている。

対流の発生は、あるパラメータ（レイリー数やマランゴニ数）を増加させると起こる。この現象は、熱移動系や物質移動系の様々な系で起こり、何が移動しているかにより取り扱いが異なるだけでなく、場の大きさや形、操作条件等にも依存し極めて多岐にわたる問題である。更に、そのパラメータを増加させると非線形性が顕著になり、流れパターンを種々変えながらやがて乱流状態になる。工学的な立場からこれらの対流発生および流れパターンの変化は、各種熱工学の応用、情報機器の冷却、ガス吸収・放散などの化学装置などの効率向上、高温融液からの高純度半導体材料の結晶成長の制御等に関連しており<sup>1,2)</sup>、いつどのような条件で対流が発生し、またどのように変化するのかを知ることは極めて重要である。

本研究は、自然対流を中心とした熱あるいは物質移動に伴う現象について、流れの状態がいつどのような条件で変わるか検討したものである。具体的には、以下の3件

について研究した。

(1) 第2章に、気液反応吸収系に対する表面張力勾配に起因する自然対流(マランゴニ対流)の発生条件を、線形安定論を用いて解析した結果を述べる。温度依存に伴う表面張力勾配による対流発生は、Bénardの実験にはじまり多くの研究報告がある。一方、濃度依存に伴う表面張力勾配による対流発生は、物質移動時(液液抽出、ガス吸収等)にしばしば観察されており、物質移動速度の急激な増大を引き起こす。従って、物質移動系においても対流発生条件を明確にすることは、きわめて重要であるが、関係する因子が多いため十分には解明されていない。ここでは、ガスが静止液層に吸収され反応している時の表面張力が反応生成物濃度と溶質ガス濃度に依存する場合の対流発生条件を明らかにした。特に、臨界マランゴニ数に対する表面変形の効果、気相側移動抵抗の効果および液層底部の条件の違いによる効果を検討した。

(2) 第3章は、ガス分散器を用いてガスを液中に気泡群として分散させ、気液界面積を増大し気液間の物質移動や反応を促進させる化学装置としての気泡塔内の流れの遷移を検討した。気泡塔内の流動状態(気液2相流)は、ほぼ均一な気泡が一様に液中を上昇する均一気泡流と気泡合一や流れの不安定が起こることにより大気泡が生成し、これら気泡が主に塔中心部を上昇するため時間平均値としての液循環流が存在する乱流循環流とに分けられる。これらの状態は、ガス流速の増大に伴い均一気泡流から乱流循環流に遷移する。この現象は、浮力による自然対流発生と類似と考えられる。気泡塔におけるこれらの流動状態は、著しく異なっており、装置効率に重大な影響を持つことが知られている。そこで、流れの観察およびガスホールドアップと空塔ガス流速の実験データの整理から流動状態の遷移する臨界流速を明らかにした。

(3) 第4章は、オイルサンド熱回収時に監視用として用いられる温度観測井内の対流伝熱の解明を目的として、そのモデルとしての鉛直円筒側壁部分加熱における密閉円筒内の熱対流に対する実験を行った。流れの観察と温度の時系列測定から定常対流から振動流発生を観察した。第5章は、第4章の実験をより詳しく考察するため数値計算

を用い解析した。軸対称ブジネスク近似としたときの対流変化を有限差分法を用い非定常計算した。レイリー数、プラントル数および空間の効果について検討した結果、プラントル数  $Pr$  が小さいときは、レイリー数の増加と共に定常対流→振動流発生→倍周期振動流→4倍周期振動流→…等と  $2^n$  分岐過程を経て乱流化すること、また、 $Pr \geq 5$  では別の遷移過程を示すことを明らかにした。空間の効果として、加熱層に対する上部冷却層長さを変えた場合を調べ、空間が大きいほど乱れやすいことがわかった。また、流体への伝熱量についても考察した。

第6章は、本研究で得られた結論を要約してまとめる。



## 1.2 従来の研究

本研究に関連する対流発生や流れパターンの変化に対する従来の研究は、Chandrasekhar<sup>3)</sup>、Bergら<sup>4)</sup>や藤縄<sup>5)</sup>に解説されるようにベナール対流に対する研究経過に象徴されると思われるので最初に紹介する。ここでは、自然対流には2つの異なる機構（浮力不安定と表面張力勾配不安定）があること、線形安定理論とその代表的な結果および非線形現象に対するカオス理論から得られた熱対流の特徴的な変化を概説する。本研究との関連は、第2章に反応吸収系の表面張力勾配による不安定性に対し線形安定論を用い解析するが、その基礎的背景を示すことになる。第3章は気液混相流の流れの変化を浮力不安定と類似な現象と考え、流れの遷移条件を実験データから整理する。第4章は鉛直円筒内熱対流の流れパターンの変化を実験的に調べ、5章では数値的に明らかにし、ベナール対流に対するカオス研究の結果と対比しながら考察する。つまり、本研究では下方から加熱したベナール対流は直接扱ってはいないが、研究手法や考察にはすべて含まれている。

Bénard(1900,1901)<sup>6)</sup>は、下から加熱された浅い液体層の流れの詳細な観察を行った。彼の研究は、液体層に規則的対流パターンの出現やその流れの構造を詳細に報告し、その後の流体力学的研究に大きな影響を及ぼした。Rayleigh 卿(1916)<sup>7)</sup>は、Bénardの観察した対流に対し密度不安定による流れであるとして、ナビエ・ストークス方程式とエネルギー方程式を線形化した方程式から判断できるとし、微小な攪乱が増幅するか減衰するかの臨界点を解析した（線形安定論）。Rayleighは、数学的な簡便さから上下自由表面を持つ液層の場合を解析したが、その後の研究結果<sup>8)</sup>から流体が自由表面を持つ固体壁面上の液層の場合、表面からの熱流束により対流発生の臨界レイリー数( $Rac$ )は669から1100であり、一定温度を持つ上下固体壁に挟まれている場合は1707.8であることが知られている。これらの臨界値を超えると対流が起こる事になり、実験事実とも対応する。現在、水平流体層の下方から加熱した場合の熱対流をベナール対流あるいはレイリー・ベナール対流と呼ばれている。

ところで、Bénardが観察した対流は、この密度対流で説明できたかという点である。液体層が1～2mmの浅い層であったため、実験でのレイリー数 $Ra$ は $Rac$ よりは

るかに小さい値であったため説明がつかず、別の原因により対流が発生していることになる。

Pearson(1958)<sup>9)</sup>は、Bénardの実験は自由表面の温度不均一のため生じる表面張力勾配（マランゴニ効果）による接線応力の不安定性であるとして、Rayleighと同様に線形安定論を用いて解析した。このときの対流は、自由表面の境界条件に表れる表面張力勾配と粘性力の比として定義されるマランゴニ数によって支配される。尚、表面変形（法線応力）がなくても対流は起こる。Pearsonは、対流発生の臨界マランゴニ数（ $Mac$ ）が約80であることを示した。Bénardの実験はマランゴニ数  $Ma$  が  $Mac$  以上の値に対応しており、表面張力勾配による対流であることがわかった。尚、マランゴニという名は、Marangoni(1871)<sup>10)</sup>が、“表面張力の分布は表面の運動を惹起する、また逆に、表面積の急激な縮小拡大は表面張力を変化させる”ことを示したことから、表面張力勾配による流れをマランゴニ効果と呼ばれるためである。

ここで、自然対流には2つの異なる原因による流れ、つまり密度の不均一によるレイリー・ベナール対流と表面張力または界面張力の不均一に基づくマランゴニ対流があることがわかる。Bénardの実験は、自由表面を持つ数mmの液体層を選定したことからその長さの3乗に比例するレイリー数が極端に小さくなり、表面張力勾配が支配するマランゴニ対流を観察したことになる。一般に、自由表面を持つ液体層を下から加熱した場合、レイリー効果（密度安定性）とマランゴニ効果が同時に作用している。両効果が同時に作用する場合の対流発生の臨界条件も多くの研究者によって線形安定論を用いて解析され、実験的にも検証されている<sup>11~14)</sup>。

線形理論は、ある状態に対して微少攪乱が加わったとき、その状態が安定か不安定かを調べるもので、理論結果と実験結果の一致を幾つかの流体力学現象に対して与えた。化学反応系は、多くの成分が関係しており、更に熱移動と物質移動の両者が共存する系が一般的であるため、きわめて複雑になる。従って、流体力学的な課題が多く残されていると思われる。

近年、宇宙実験室が注目されはじめたことにより、マランゴニ対流は重要になってきている。それは、無重力あるいは低重力において均一な半導体材料の生産が大きな目的になるが、無重力においても表面張力は残るため、マランゴニ対流の制御は大き

な問題<sup>15)</sup>となるのである。

一方、1970年代にカオス理論が登場し、様々な分野における非線形現象の理解が急速に進んだ<sup>16~18)</sup>。一般に、微分方程式系によって記述される少数自由度の力学系が、ある条件のもとできわめて複雑な非周期挙動を示す。その特徴は、いかに詳細な初期条件を知っていても十分に時間が経過した後の状態を予測することはできない、あるいはせいぜい確率的にのみ予測できるという点にある。つまり、初期条件の微少な相違が、時間とともに有意の大きさにまで拡大され、周期運動や準周期運動などの規則的運動とははっきり区別される挙動を示す。このような挙動は「カオス」と呼ばれ、自然現象の中にいろいろのカオス現象が存在することが明らかになってきた。

このカオス理論は非線形力学全般を含むが、自然対流は実験的検証の典型的な例として重要な役割を演じた。Lorenz(1963)<sup>19)</sup>は、レイリー・ベナール対流の簡単な力学モデル(3変数の1階常微分方程式系)を示した。その方程式の解は、不規則で奇妙なアトラクター(多重巻き閉軌道)を持つことはよく知られている。また、流体系における熱対流やテイラー渦の実験からカオスが見いだされなければ非線形現象に対する今日の理解は、大幅に遅れたと考えられる。ここで、熱対流の代表的な三つの実験をまず紹介する。

GollubとBenson<sup>20)</sup>は、水平面が長方形断面の高さ7.9mmおよび11.94mmの箱に水を入れ下方から加熱した場合の熱対流に対して、レーザー・ドップラー流速計を用いた速度測定から乱流にいたる道筋を見いだした。プラントル数 $Pr = 5$ (水)では $Ra_c = 1707$ 以上で規則的ロールセル構造を持つ対流が発生する(定常対流)。 $Ra/Ra_c = 27.2$ から振動流(周期的にくねり運動を起こし、その基本振動数を $f_1$ とする)が発生し、 $Ra/Ra_c = 32$ から新しい基本振動数 $f_2$ が現れ、速度のパワースペクトルはこれらの1次結合 $m_1 f_1 + m_2 f_2$ ( $m_1, m_2$ は整数)に対応する値にピークを持つ(準周期運動)。 $Ra/Ra_c \geq 44.4$ では $f_1/f_2$ が $Ra$ を多少変えても変化しない位相ロッキングを起こす。更に $Ra$ を上げると位相ロッキングが解消し連続スペクトルを示すカオスとなる。Bergeら<sup>21)</sup>は $Pr = 130$ (シリコンオイル)を用いた実験から、 $Ra/Ra_c = 250$ において振動を始め、 $Ra/Ra_c \approx 290$ から間欠的な大きな乱れが発生することを示した(間欠カオ

ス)。また、Libchaber ら<sup>22)</sup>は  $Pr$  が小さい水銀を用い、スペクトルが基本振動数の主ピーク  $f_1$  とその高調波からなっているものが  $Ra$  の増加と共に  $f_2 = f_1/2$  のピークが新たに発生し、さらに  $f_3 = f_2/2$  が派生する分岐を繰り返す、つまり、周期が 2 倍、4 倍と倍々化する  $2^n$  分岐と呼ばれる過程を見事に捉えた。

レイリー・ベナール対流に対する解析的研究としては、Yahata<sup>23,24)</sup> や Curry ら<sup>25)</sup> が支配方程式をフーリエモードに展開して可能な限り多数のモードを含むモデルを提案し、数値計算から Gollub と Benson の実験をよく説明する解を得ている。

流体力学の大きな課題である乱流化に対して、ランダウのシナリオは有名である。ランダウは、レイノルズ数の増大と共に多数回分岐が起こり、速度場の時間的挙動が逐次複雑化して行くと考えた。つまり、無限回のホップ分岐の後乱流が発生するというものである。これに対して、ルエルとターケنزはホップ分岐が 2 回起これば、系にカオスが生じ乱流が起こり得る可能性があることを指摘した。実験事実の裏付けとともに、このことは、未解決の乱流化に対して著しく理解が進んだ。

Bénard 対流に対する研究経過を述べてきたが、以下、本論文で扱った問題について従来の研究を振り返ることとする。

### 1.2.1 反応吸収系におけるマランゴニ対流に関する従来の研究

Bénard が観察した対流は、浮力ではなく表面張力勾配に起因する対流であることは、すでに述べた通りである。表面張力  $\sigma$  は、温度  $T$  だけでなく物質の濃度  $C$  が変わると変化し、温度依存性 ( $\partial\sigma/\partial T$ ) よりむしろ濃度依存性 ( $\partial\sigma/\partial C$ ) の方が大きく、化学工学の分野では 1950 年代に物質移動時 (液液抽出、ガス吸収等) に激しい対流運動が観察された<sup>26)</sup>。Sterling と Scriven<sup>27)</sup> は、Pearson とはまったく独立に、二液層系の濃度依存に基づくマランゴニ効果に対する安定解析を行い、いくつかの重要な結果を得ている。Brian ら<sup>28)</sup> は、気液界面を通しての反応吸収 (モノエタノールアミン水溶液による炭酸ガスの吸収系) の吸収速度が従来の理論値<sup>26)</sup> に比べ異常に大きいことを見だし、その原因を表面張力勾配による界面攪乱の発生によるものと推論した。モノエタノールアミン水溶液による炭酸ガスの吸収系以外にも、各種アミン類水溶液による炭酸ガスの吸収<sup>31)</sup>、NaOH あるいは  $\text{NH}_3$  水溶液による  $\text{H}_2\text{S}$  ガスの吸収<sup>29)</sup>、 $\text{NH}_3$  水溶液による

炭酸ガスの吸収<sup>30)</sup>など、多くの反応吸収系でも反応吸収理論の予測値より大きな吸収速度を示すことが知られており、いずれの系でも界面攪乱が発生することを示唆している。また、今石・藤縄<sup>32)</sup>は、気液接触装置として濡壁塔を用い、各種アミン水溶液による炭酸ガス吸収時の攪乱を光学的に観察している。

反応吸収に伴う攪乱の発生機構は、表面に存在する液体の表面張力が表面下の液体が表面に出たと仮想したとき示す表面張力より大きいという状況が必要で、表面張力に対する界面活性な反応溶質の濃度や反応生成物の濃度および溶解熱や反応熱に伴う温度などが考えられる。ShahとSzeri<sup>33)</sup>は、反応吸収時の温度依存性の解析を報告しているが、攪乱が報告されている吸収系では温度依存のマランゴニ対流発生が困難であることが示された。今石・藤縄<sup>34)</sup>は、表面張力を増大する反応生成物の濃度によるマランゴニ対流について線形安定論により解析し、実験結果を説明する結果を得ている。

しかしながら、反応吸収系には様々な因子が関係しており、きわめて複雑な系となるため十分解明されたとは思われない。本報告の第2章では、より現実に近い状況における解析として、今石・藤縄の研究の拡張として、表面が変形可能でかつ気相側物質移動抵抗も考慮した場合を扱う。温度依存におけるマランゴニ対流の表面変形効果は、多くの研究<sup>35~38)</sup>があるが、反応吸収系の濃度依存に伴う場合の解析例は見当たらない。

### 1.2.2 気泡塔内流れに関する従来の研究

気液混相流は、沸騰を伴う伝熱装置や物質移動を伴う化学装置によく見られる<sup>39,40)</sup>。気泡塔は、ガス分散器を用いてガスを液中に気泡群として分散し、気液界面積を増大し気液間の物質移動や反応を促進させる装置である。直接攪拌機器を用いないため低コストであること、操作が簡単であること等の理由から、気泡塔は、ガス吸収・放散・反応器として古くから使われ、また大型の醗酵槽や廃水処理装置として用いられる<sup>40,41)</sup>。一般に鉛直管での気液二相上昇流においては、液流速を一定に保ちガス流速を増加させると流動状態は、気泡流、スラグ流、フロス流、環状流の順に変化する。大口径の気泡塔内の流動状態は、ガス分散器から発生した個々の気泡が断面全体を均一に上昇する均一気泡流と、気泡の合一・分裂が一部観察され局所的に液の循環流が存在する遷移

域と、気泡の合一・分裂が頻繁に起こりその結果生成する大気泡が塔中央部を上昇し液は循環流れとなる乱流循環流とに分けられる。均一気泡流動は、気液の表面積が大きいいため物質移動が大きい。一方、大気泡を伴う循環流は、混合作用が大きい。気体の流速を増加させると均一気泡流から乱流循環流に流れは遷移する。本現象は、連続体の自然対流とは異なるが、熱対流発生と類似の考え方、つまり気泡密度（ガスホールドアップ）が均一に分布した相が気泡密度の不安定性の結果としての循環流が発生すると考えられる<sup>42)</sup>。この乱流循環流動に対しては、多くの流体力学モデルの研究報告がなされている<sup>43~45)</sup>。

気泡塔の流動状態や装置効率は、ガスホールドアップに直接関係している。ガスホールドアップ $\varepsilon_G$ は、気体の容積割合であり、空塔ガス流速 $V_G$ （液が無いとしたときの平均ガス流速）と気液スリップ速度 $V_S$ の比として、

$$\varepsilon_G = \frac{\text{気泡体積}}{\text{全体積}} = \frac{V_G}{V_S} \quad (1.1)$$

と表される。 $\varepsilon_G$ は、同じ $V_G$ に対して、気泡径、分散方法、液物性（粘度、表面張力等）、界面活性剤の添付などに複雑に関係する。 $\varepsilon_G$ と $V_S$ の相関式は、多くの研究者により提案されている<sup>43,46,47,49)</sup>。しかし、関係する因子が多く、それぞれの相関式が異なっているのが実状である。均一気泡流から乱流循環流へどのような条件の下で遷移するかについては、河越らの報告<sup>48)</sup>があるが分散板条件については記述がなく、十分には解明されていないと考えられる。

本論文の第3章では、静止液中に気泡を吹き込んだ場合における流動状態の観察と $V_G$ に対する $\varepsilon_G$ のデータ整理から流れの遷移条件を明らかにする。

### 1.2.3 熱対流に関する従来の研究

熱対流は、線形安定論の結果と実験が一致した例として、また非線形散逸力学系の典型的な例として多くの研究がなされているほか、伝熱現象の基礎及び応用として膨大な研究が報告されている。先にプラントル数が異なる3つの実験例を紹介したが、流体層を下方から加熱したベナール対流の場としての容器の形状は直方体と円筒形が主に用いられ、アスペクト比（容器の縦横比）の様々な値<sup>50,51)</sup>に対して研究されている。

つまり、プラントル数（運動量拡散と熱拡散の比）と幾何学的な形状が異なると対流は様々な流動パターンを示すのである。

一方、流体層が水平方向に温度分布を持つ場合は、浮力の不均一によって最初から対流が存在することになる。この時の場合は、鉛直二平板間や二重管環状路内の流体に対して一側面や内管のみ加熱した場合<sup>52~55</sup>)が代表的モデルとして研究されている。これらの研究から、流れの可視化実験により流れパターンの変化や温度・流速測定による時間特性が次第に明らかになってきている。解析的には、鉛直方向に十分に長い場合、容易に定常対流場が設定できることから、線形安定論により、1セル対流から多重セル化（stationary-waveあるいはtravelling-waveに対する安定性）の研究が報告されている<sup>53~55</sup>)。この問題では、プラントル数がおおよそ1~15の中間領域が十分に解明されていないように思われる。また、計算機の発達に伴い、ナビエ・ストークス方程式とエネルギー方程式に対して直接数値的（有限差分法<sup>50,56</sup>）、有限要素法<sup>57</sup>)等に解くことが可能になり、定常から非定常計算へ、また2次元から3次元計算<sup>58</sup>)へと研究が進められてきている。

ここでは、本報告で扱ったオイルサンド熱回収時に用いられる温度観測井モデルとしての円筒側壁部分加熱による対流に関する研究、あるいはそれと類似研究について振り返る。

原油の油層内三次回収やオイルサンド・ビチューメン油層内回収などに、火攻法、水蒸気圧入法などの熱攻法プロセスがある<sup>59~61</sup>)。これらのいずれの方法においても地層内の温度伝達変化を正確に知るため温度観測井が用いられる。温度観測井で測定した鉛直方向温度分布の解析から油層の位置や油層内温度を知ることができれば、熱攻法プロセスにとって意義あるものと考えられる。原油熱回収に関係した地層内熱移動の解析にはYortsosらの報告<sup>61</sup>)があるが、温度観測井内の自然対流による伝熱機構を詳しく論じた報告は見当たらない。

温度観測井は、蒸気等により加熱された油層に対応する一部環状側壁から加熱され井戸内部に対流が発生する。この場合の対流発生は、水平方向の温度分布が一定でないため浮力の不均一性によって最初から対流が発生する。従って、鉛直二平板間や二重

管環状路の一側面のみ加熱と同様、最初から対流が存在する場合である。しかし、水平方向の温度分布が高さ方向の場所により異なること、および加熱冷却の空間的複雑さから、更に複雑な対流運動の変化が予想される。また、温度観測井内の対流は、開放形あるいは密閉形熱サイフォン<sup>62~65)</sup>とよく似た加熱条件を与える。熱サイフオンの実験においても、規則的あるいは不規則な振動流が報告されているが十分に解明されていないと思われる。密閉矩形容器内の一側面を部分的に加熱した系においても振動流の報告<sup>55)</sup>があり、一連の振動流発生は層流から乱流に遷移する段階で必然的にみられると考えられる。

かなり研究が進んでいると思われるベナール対流系でさえ関係する因子が多く、未解明な部分が多いと思われるが、更に本研究対象の円筒側壁部分加熱の場合は、研究報告も少なくレイリー数、プラントル数およびアスペクト比のいずれの効果についても十分に解明されていない。

本研究は、振動流発生およびその後の分岐を経て乱流化に至る熱対流の状態の変化を明らかにすることを主目的とする。第4章で実験的に流れの観察および温度測定から振動現象の確認をして、第5章において有限差分法を用いた数値計算から、振動流発生、高レイリー数域での流動状態の変化および伝熱機構に対するプラントル数の効果および上部冷却層長さを変えたときの空間の効果を明らかにする。



## 参考文献

1. R.A. Brown : Theory of transport processes in single crystal growth from the melt. *AIChE J.*, 34 (1988) 881-911.
2. 日本機械学会編 : 新編伝熱工学の進展 第1巻、養賢堂 (1995).
3. S. Chandrasekhar : *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Oxford Univ. Press. (1961) 9-75.
4. J.C. Berg, A. Acrivos and M. Boudart : *Evaporative Convection*. Adv. Chem. Engerg., No.6, Academic Press, N.Y.(1966) 61-123.
5. 藤縄勝彦 : レイリー運動とマランゴニ運動、化学工学, 49,11 (1985) 896-901
6. H.C. Bénard : *Rev. generales Sci. pures at appliquées*,11 (1900) 1261-1271 and 1309-1329. *Ann. Chem. Phys.*, 23 (1901) 62-144. (J.C. Berg<sup>4</sup>)および藤縄<sup>5</sup>)からの引用) .
7. Lord Rayleigh: On the convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side. *Phil. Mag.*, 32,(1916) 529-546. (S. Chandrasekhar<sup>3</sup>)およびJ.C. Berg<sup>4</sup>)からの引用) .
8. A. Pellew and R.V. Southwell : On maintained convection motion in a fluid heated from below. *Proc. Roy. Soc.*, A176 (1940) 312-343.
9. J.R.A. Pearson : On convection cells induced by surface tension. *J. Fluid Mech.*, 4 (1958) 489-500.
10. C. Mrangoni : *Nuovo Cimento*. ser.2,16 (1871) 239. (J.C. Berg<sup>4</sup>)および藤縄<sup>5</sup>)からの引用) .
11. D.A. Nield : Surface tension and buoyancy effects in cellular convection. *J. Fluid Mech.*, 19 (1964) 341-352.
12. H.J. Palmar and J.C. Berg : Convective instability in liquid pools heated from below. *J. Fluid Mech.*, 47 (1971) 779-787.

13. H.J. Palmar and J.C. Berg: Hydrodynamic stability of surfactant solutions heated from below. *J. Fluid Mech.*, 51 (1972) 385-402.
14. M. Takashima and J. Kitawaki : Buoyancy-surface tension instability due to an internal heat source. *J. Phys. Soc. Japan*, 33 (1972) 529-532.
15. 那野比古 : 「宇宙工場」 への招待、*ASCII*, 4, #8 (1980) 48-53.
16. 蔵本由紀 : 乱流現象の科学、巽友正編、東京大学出版会(1986) 第4章.
17. 高安秀樹編著 : フラクタル科学、朝倉、(1987).
18. 合原一幸編著 : カオス、サイエンス社、(1990).
19. E.N. Lorenz : Deterministic non-periodic flow, *J. Atm. Sci.*, 20 (1963) 130-141.
20. J.P. Gollub and S.V. Benson : Many routes to turbulent convection. *J. Fluid Mech.*, 100 (1980) 449-470.
21. P. Berge, M. Dubios, P. Manneville and Y. Pomean : Intermittency in Rayleigh-Bénard convection. *J. Phys. Lett.*, 41 (1980) L341-L345.
22. A. Libchaber, C. Laroche and S. Fauve : Period doubling cascade in mercury. *J. Phys. Lett.*, 43 (1982) L211-L216.
23. H. Yahata : Transition to turbulence in the Rayleigh-Bénard convection. *Prog. Theor. Phys.*, 68 (1982) 1070-1081.
24. H. Yahata : Onset of chaos in some hydrodynamic model systems of equations. *Chaos and Statistical Methods* , Springer (ed. Y. Kuramoto), (1984) 232-241.
25. J.H. Curry, J.R. Herring, J. Loncaric and S. A. Orszag : Order and disorder in two- and three-dimensional Bénard convection. *J. Fluid Mech.*, 147 (1984) 1-38.
26. T.K. Sherwood, R.L. Pigford and C.R. Wilke : *Mass Transfer*, McGRAW-HILL, (1975) Chapter 5.
27. C.V. Sternling and L.E. Scriven: Interfacial turbulence: hydrodynamic instability and the Marangoni effect. *AIChE J.*, 5 (1959) 514-523.

28. P.L.T. Brian, J.E. Vivian and D.C. Matiatos : Interfacial turbulence during the absorption of carbon dioxide into monoethanolamine. *AIChE J.*, 13 (1967) 28-36.
29. 疋田晴夫, 浅井悟、日昔吉紀、石原立憲 : アンモニアおよび苛性ソーダ水溶液による硫化水素の吸収. *化学工学*, 32 (1968) 278-285.
30. 疋田晴夫, 浅井悟、日昔吉紀 : アンモニア水溶液による炭酸ガスの吸収. *化学工学*, 35 (1971) 1021-1028.
31. E. Sada, H. Kumazawa, M.A. Butt and J.E. Lozano : Interfacial turbulence accompanying chemical absorption. *Can. J. Chem. Eng.*, 55 (1977) 293-296.
32. 今石宣之, 藤縄勝彦 : 反応吸収時の界面攪乱の光学的観察. *化学工学論文集*, 4 (1978) 484-489.
33. Y.T. Shah and A.Z. Szeri : Marangoni instability in non-isothermal first order gas-liquid reactions-evaluations of  $\text{Cl}_2$ -toluene and  $\text{CO}_2$ -sodium hydroxide systems. *Chem. Eng. Sci.*, 29 (1974) 2219-2228.
34. 今石宣之, 藤縄勝彦 : 反応吸収時の Marangoni 不安定性. *化学工学論文集*, 4 (1978) 490-495.
35. L.E. Scriven and C.V. Sternling : On cellular convection driven by surface-tension gradients: effects of mean surface tension and surface viscosity. *J. Fluid Mech.*, 19 (1964) 321-340.
36. K.A. Smith : On convective instability induced by surface-tension gradients. *J. Fluid Mech.*, 24 (1966) 401-414.
37. R.W. Zeren and W.C. Reynolds : Thermal instabilities in two-fluid horizontal layers. *J. Fluid Mech.*, 53 (1972) 305-327.
38. M. Takashima : Surface tension driven instability in a horizontal liquid layer with a deformable free surface. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 50 (1981) 2745-2756.
39. 赤川浩爾 : 気液二相流. コロナ社 (1947)
40. 化学工学協会編 : 気泡・液滴・分散工学. 槇書店 (1982)

41. Y.T. Shah, S.P. Kelkar and W.D. Deckwer : Design parameters estimations for bubble column reactors. *AIChE J.*, 28 (1982) 353-379.
42. N.De Nevers : Bubble driven fluid circulations. *AIChE J.*, 14 (1968) 222-226.
43. W. Freedman and J.F. Davidson: Hold-up and liquid circulation in bubble columns. *Trans. Instn. Chem. Engrs.*, 47 (1969) T251-T262.
44. 宮内照勝、徐嘉男 : 気泡塔における流動の研究. 化学工学, 34 (1970) 958-964.
45. K. Ueyama and T. Miyauchi : Properties of recirculating turbulent two phase flow in gas bubble columns. *AIChE J.*, 25 (1979) 258-266.
46. 加藤康夫 : 気泡塔内のガスホールドアップおよび気泡群の平均上昇速度. 化学工学, 26 (1962) 1068-1075.
47. 加藤康夫、西脇昭雄 : 気泡塔内の液の混合拡散係数. 化学工学, 35 (1971) 912-916.
48. 河越幹男、井上徹、中尾勝実、大竹伝雄 : 気泡分散型気液接触装置の流動特性. 化学工学, 38 (1974) 733-739.
49. F. Yamashita and H. Inoue : Gas holdup in bubble columns. *J. Chem. Eng. Japan*, 8 (1975) 334-336.
50. Y. Lee and S.A. Korpela : Multicellular natural convection in a vertical slot. *J. Fluid Mech.*, 126 (1983) 91-121.
51. J.N. Koster and U. Müller : Oscillatory convection in vertical slots. *J. Fluid Mech.*, 139 (1984) 363-390.
52. Y. Oshima : Experimental studies of free convection in a rectangular cavity, *J. Phys. Soc. Japan*, 30 (1971) 872-882.
53. J. Mizushima : Equilibrium solution of the secondary convection in a vertical fluid layer between two parallel plates, *Fluid Dynamics Res.*, 5 (1990) 289-299.
54. I.G. Choi and S.A. Korpela : Stability of the conduction regime of natural convection in a tall vertical annulus. *J. Fluid Mech.*, 99 (1980) 725-738.

55. B.B. Rogers and L.S. Yao : Natural convection in a heated annulus. *Int. Heat Mass Transfer*, 36 (1993) 35-47.
56. 北村健三、込山公一、斉藤武 : 密閉容器内自然対流の振動現象について。日本機械学会論文集 (B編) 50, 451 (1984) 845-851.
57. Y. Yamaguchi, C.J. Chang and R.A. Brown : Multiple buoyancy-driven flows in a vertical cylinder heated from below. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, A312 (1984) 519-552.
58. F.B. Lipps : Numerical simulation of three-dimensional Bénard convection in air. *J. Fluid Mech.*, 75 (1976) 113-148.
59. J.M. Dealy : Rheological properties of oil sand bitumens. *Can. J. Chem. Eng.*, 57, (1979) 677-683.
60. 鷺見弘一 : オイルサンドーその回収と改質技術の現状ー。化学工学 10 (1979) 155-168.
61. T.G. Yortsos and G.R. Gavalas : Heat transfer ahead of moving condensation fronts in thermal oil recovery processes. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 25 (1982) 305-316.
62. M.J. Lighthill: Theoretical considerations on free convection in tubes. *Quart. Journ. Mech. and Applied Math.*, 6-4 (1953) 398-439.
63. 長谷川修、山県清、西川兼康 : 開放形熱サイフォンにおける熱伝達 (第1報、流動状態の観察結果) 日本機械学会論文集 (B編) 28, 192 (1962) 930-939.
64. 長谷川修、森末道忠 : 開放形熱サイフォンにおける熱伝達 (第2報、円管による熱伝達の実験結果) 日本機械学会論文集 (B編) 28, 192 (1962) 940-946.
65. 長谷川修 : 開放形熱サイフォンにおける熱伝達 (第3報、伝熱機構について) 日本機械学会論文集 (B編) 28, 192 (1962) 947-960.

## 第2章

# 反応吸収系におけるマランゴニ対流

## 第2章 反応吸収系におけるマランゴニ対流

### 2.1 緒言

温度あるいは濃度変化による表面張力勾配の不安定性により自然対流がしばしば起こる。気液反応吸収系において、ガス吸収速度が異常に増大する実験結果が幾つか報告されており、その原因は、表面張力勾配（マランゴニ効果）による界面攪乱の発生によるものと考えられている<sup>1~4</sup>）。また、今石と藤縄<sup>9</sup>）は濡壁塔を用い、各種アミン水溶液による炭酸ガスの反応吸収時における攪乱発生を光学的に観察している。表面張力勾配に起因する安定問題の理論的解明は、熱対流系に対する Pearson<sup>5</sup>）や物質移動系に対する Sternling と Scriven<sup>6</sup>）を初めとして、数多く取り組まれて来ているが、反応を伴う系での解析は少なく、液液系<sup>7</sup>）と気液系<sup>8,10</sup>）についての報告があるに過ぎない。また、接触界面が変形する場合には、表面張力波や重力波などの効果が無反応系に対する解析から安定条件に影響することが知られている<sup>11~15</sup>）が、反応を伴う場合については未だ十分に検討されていないように思われる。

今石と藤縄<sup>10</sup>）は、反応吸収時のマランゴニ対流における温度、反応溶質、生成物の表面張力に対する役割を考察した。その結果、対流を引き起こす最も重要な因子は、不揮発性の反応生成物濃度であるとして、ガス吸収系の不可逆擬一次反応に対し線形安定論を用い解析した。実際に界面攪乱の発生が報告されている反応系は、反応生成物が不揮発性で、その濃度の増加と共に液の表面張力を増加させる塩類である<sup>10</sup>）。しかし、この種の反応吸収系の安定問題に対しては、詳細な研究が必要と考えられる。つ

まり、反応過程、各成分の効果および様々な表面条件等が対流に及ぼす効果を明確にすることである。

この章は、擬一次反応系についての今石と藤縄の解析<sup>10)</sup>を拡張して詳細に調べた。彼らのモデルは、等温静止液層にガスが吸収され液層内で溶質と反応する。溶質は豊富にありその濃度変化が無視できる擬一次反応系とし、自由表面は平滑とした。また、気相側物質移動抵抗は無視し表面で常にガス濃度は飽和溶解度（一定）としている。そこで、本解析は、等温静止液層系の擬一次反応をそのまま採用したが、気相側物質移動抵抗を考慮し、また液層底部の濃度条件も考察した。更に、表面は自由に変形可能な場合に拡張し、表面張力波および重力波の安定性に対する効果を検討した。これらのモデルに対して線形安定論を用い、反応生成物に基づく臨界マランゴニ数  $M_{RC}$  に対する効果を検討すると共に、ガス濃度に基づくガスマランゴニ数  $M_A$  についても議論した。次節において、モデルと定常解、定常解に攪乱が作用したときの攪乱方程式および境界条件を記述し、求めるべき固有値  $M_R$  を表式化する。3節の結果においては、平滑表面の場合と表面変形の場合に分け、波数  $\alpha$  に対する漸近解を使い詳細に検討する。



## 2.2 問題の定式化

### 2.2.1 モデルと定常解

変形可能な厚さ $\delta$ の液層が固体壁上に静止しているとし、座標系をFig.2-1のように取る。自由表面は、平均厚さ $\delta$ と変位 $\psi$ に分け、 $y = \delta + \psi$ とする。液層は、気相側からガスAを吸収し、内部で $A + mB \rightarrow nP$ なる反応をしている。ここで、 $m, n$ は化学量論係数である。溶質Bは充分豊富でその濃度 $C_B$ が一定と見なせるとき、擬一次不可逆反応 $A \rightarrow nP$ となる。溶質ガスの濃度を $C_A$ 、生成物Pのそれを $C_P$ で表すと、反応速度 $r$ は、各々 $r_A = kC_A$ 、 $r_P = -nkC_A$ となる。ここで、 $r_i$ は化学反応による $i$ 成分の消失速度を示し、 $k$ は反応速度定数であり、与えられた温度に対して一定とする。この時、液層内温度 $T$ は一様であり、密度 $\rho$ 、粘性係数 $\mu$ 、拡散係数 $D_A, D_P$ などの物性値は一定とする。

この系の基礎方程式は、次の連続の式、ナビエ・ストークス方程式および反応を伴う拡散方程式で構成される。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \quad (2.2)$$

$$\frac{DC_A}{Dt} = D_A \nabla^2 C_A - kC_A \quad (2.3)$$

$$\frac{DC_P}{Dt} = D_P \nabla^2 C_P + nkC_A \quad (2.4)$$

ここで、

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla, \quad \nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

但し、 $\mathbf{u}$ は流速ベクトル $(u, v, w)$ 、 $p$ は圧力、 $\mathbf{g}$ が重力加速度 $(0, -g, 0)$ である。

この問題の境界条件について、以下の仮定を導入する。

(1) ガス吸収の気相側物質移動係数 $k_G$ を考慮すると、気液表面におけるA成分の移動速度は、

$$-\mathbf{n} \cdot D_A \nabla C_A = k_G (C_A - C_{A\infty})$$

で与えられる。 $\mathbf{n}$ は界面の外向き法線ベクトル、 $C_{A\infty}$ は気液表面から充分離れた気相側での一定濃度とする。

(2) 反応生成物は不揮発性で、気相への放散はない。従って、 $\mathbf{n} \cdot \nabla C_P = 0$ 。

(3) 気液表面張力 $\sigma = \sigma(C_A, C_P, T)$ の変化を

$$d\sigma = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial C_A} \right) dC_A + \left( \frac{\partial \sigma}{\partial C_P} \right) dC_P \quad (2.5)$$

とする。

(4) 液層底部の固体壁で、 $A, P$ 両成分の濃度の代表的な条件として、

$$C_P = 0$$

$$C_A = 0: \text{ Case(i) } , \quad \partial C_A / \partial y = 0 \quad \text{ Case(ii)}$$

を用いる。尚、 $\partial C_P / \partial y = 0$ の条件も考えられるが、仮定(2)との関係から生成物が時間と共に蓄積するため、定常解を持たないのでここでは扱わない。

この系は、 $[\mathbf{u}, p, C_A, C_P, \psi]$ で記述されており、表面が平滑な静止定常反応系 $[0, \bar{p}, \bar{C}_A, \bar{C}_P, 0]$ では、 $y$ のみに依存するものとして、(2.2)~(2.4)式および仮定(1)~(4)により、定常解は次のように表される。

$$\bar{p} / \rho g \delta = \bar{p}_G / \rho g \delta + 1 - y / \delta \quad (2.6)$$

$$\text{Case(i)} : C_{A,y=0} = 0$$

$$\bar{C}_A / \bar{C}_{A\infty} = \frac{B \sinh(\gamma y / \delta)}{\gamma \cosh \gamma + B \sinh \gamma} \quad (2.7)$$

$$\bar{C}_P / \bar{C}_{Pi} = \beta B \frac{(\gamma y / \delta) \cosh \gamma - \sinh(\gamma y / \delta)}{\gamma \cosh \gamma + B \sinh \gamma} \quad (2.8)$$

$$\beta = \frac{\gamma \cosh \gamma / B + \sinh \gamma}{\gamma \cosh \gamma - \sinh \gamma}$$

$$\text{Case(ii)} : (\partial C_A / \partial y)_{y=0} = 0$$

$$\bar{C}_A / \bar{C}_{A\infty} = \frac{B \cosh(\gamma y / \delta)}{\gamma \sinh \gamma + B \cosh \gamma} \quad (2.9)$$

$$\bar{C}_P / \bar{C}_{Pi} = \beta B \frac{1 + (\gamma y / \delta) \sinh \gamma - \cosh(\gamma y / \delta)}{\gamma \sinh \gamma + B \cosh \gamma} \quad (2.10)$$

$$\beta = \frac{\gamma \sinh \gamma / B + \cosh \gamma}{1 + \gamma \sinh \gamma - \cosh \gamma}$$

ただし、 $\bar{p}_G$ は気相側ガス圧力、 $\gamma (= \delta\sqrt{k/D_A})$ は反応パラメータ、 $\bar{C}_{P_i}$ は表面における生成物濃度である。仮定(1)の物質移動の効果はBiot数 $B(= k_G\delta/D_A)$ として含まれており、 $B \rightarrow \infty$ の時 $C_{A,y=\delta} = C_{A\infty}$ となる。なお、 $\beta(= n\bar{C}_{A\infty}D_A/\bar{C}_{P_i}D_P)$ は、生成物濃度を規格化するために定義されている。また、Case(i),(ii)の濃度分布は、遅い反応( $\gamma < 1$ )の場合に特徴的な違いを示し、特に $\gamma \rightarrow 0$ の極限では、 $\bar{C}_A$ はCase(i)で直線分布、Case(ii)では $\bar{C}_A$ は一定値を持つ。速い反応( $\gamma \gg 1$ )では両者は一致し、表面近くの極めて薄い層にのみ反応が限定される。

## 2.2.2 攪乱方程式と境界条件

線形安定理論の手法により、(2.6)~(2.10)式に示される2つの定常状態に微少攪乱  $[\mathbf{u}', p', C_{A'}, C_{P'}, \psi]$  を加えた場合の攪乱に対する方程式と境界条件を導入する。

線形化した(2.1)~(2.4)式は、

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p' + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u}' \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial C_{A'}}{\partial t} + v' \frac{d\bar{C}_A}{dy} = D_A \nabla^2 C_{A'} - k C_{A'} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial C_{P'}}{\partial t} + v' \frac{d\bar{C}_P}{dy} = D_P \nabla^2 C_{P'} + n k C_{A'} \quad (2.14)$$

更に、(2.11),(2.12)式より  $u', w', p'$  を消去して、 $v'$  に対する式に整理する。

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \right) \nabla^2 v' = 0 \quad (2.15)$$

変位表面 ( $y = \delta + \psi(x, z, t)$ ) の境界条件は、表面の運動学的条件、応力のつりあい、仮定(1)~(2)に対し、微少攪乱および  $|\psi/\delta| < 1$  を用いて整理すると、 $y = \delta$  において、

$$v' = \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (2.16)$$

$$\mu \left( \frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) = \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial y} \quad (2.17)$$

$$\mu \left( \frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z} \right) = \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \sigma}{\partial y} \quad (2.18)$$

$$-\rho g \psi + p' - 2\mu \frac{\partial v'}{\partial y} + \sigma \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial C_{A'}}{\partial y} + \frac{d^2 \bar{C}_A}{dy^2} \cdot \psi = -\frac{k_G}{D_A} \left( C_{A'} + \frac{d\bar{C}_A}{dy} \cdot \psi \right) \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial C_{P'}}{\partial y} + \frac{d^2 \bar{C}_P}{dy^2} \cdot \psi = 0 \quad (2.21)$$

ここで、(2.17),(2.18)式右辺は、仮定(3)より、表面張力の濃度勾配に書き換えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial y} &= \left( \frac{\partial \sigma}{\partial C_P} \right) \left( \frac{\partial C_{P'}}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \sigma}{\partial C_A} \right) \left( \frac{\partial C_{A'}}{\partial x} + \frac{d\bar{C}_A}{dy} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \sigma}{\partial y} &= \left( \frac{\partial \sigma}{\partial C_P} \right) \left( \frac{\partial C_{P'}}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial \sigma}{\partial C_A} \right) \left( \frac{\partial C_{A'}}{\partial z} + \frac{d\bar{C}_A}{dy} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

上式を(2.17),(2.18)式右辺に代入し、 $w, w'$ を消去して $v'$ に対する境界条件とすると、次式を得る。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)v' = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial C_P} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)C_{P'} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial C_A} \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)C_{A'} + \frac{d\bar{C}_A}{dy} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi \right\} \quad (2.22)$$

また、(2.19)式は、(2.11),(2.12)式を用い圧力 $p'$ を消去して $v'$ に対する式に整理すると、次式を得る。

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{3\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\} \frac{\partial v'}{\partial y} = -\frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2 \psi + g \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi \quad (2.23)$$

ここで、以下の無次元表現

$$\left( \frac{x}{\delta}, \frac{y}{\delta}, \frac{z}{\delta}, \frac{D_P t}{\delta^2} \right) \\ \left( \frac{\delta \mathbf{u}}{D_P}, \frac{p}{\rho g \delta}, \frac{C_A}{C_{A\infty}}, \frac{C_P}{C_{P_i}}, \frac{\psi}{\delta} \right)$$

および無次元数

$$M_R = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial C_P} \right) \frac{\bar{C}_{P_i} \delta}{\mu D_P} \quad (\text{Marangoni number}) \\ M_A = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial C_A} \right) \frac{\bar{C}_{A\infty} \delta}{\mu D_A} \quad (\text{Gas - Marangoni number}) \\ B = \frac{k_G \delta}{D_A} \quad (\text{Biot number}) \\ L = \frac{D_A}{D_P} \quad (\text{Diffusivity ratio}) \\ N_c = \frac{\mu D_P}{\sigma \delta} \quad (\text{Crispation number}) \\ N_G = \frac{\rho g \delta^2}{\sigma} \quad (\text{Weber number}) \\ S_c = \frac{\mu}{\rho D_P} \quad (\text{Schmidt number})$$

を導入する<sup>12)</sup>。以下に扱う変数はすべて無次元化されており、記号は同一とする。

系は  $[v', C_{A'}, C_{P'}, \psi']$  で表し、解の形を、

$$\{v', C_{A'}, C_{P'}, \psi'\} = \{f(y), g(y), h(y), S\} \exp(\phi) \quad (2.24) \\ (\phi = i\alpha_x x + i\alpha_z z + \lambda t)$$

とおく。ここで、 $(\alpha_x, \alpha_z;$  各方向の波数、 $\lambda;$  複素定数) である。本問題では、安定性の交換原理が適用されないため、安定性には、定常モード( $\lambda = 0$ )と非定常モード( $\lambda \neq 0$ )の2つのモードがある。本報告では、定常モードについて限定して解析する。それは、定常モードでは臨界マランゴニ数は正の値を与えるが、非定常モードでは負の値でしかも非常に大きな値を与え<sup>16,17)</sup>、対応する実験報告もないためである。尚、定常モードでは、 $S_c$ は対流発生に関係しない。

$\lambda = 0$ とした(2.24)式を(2.13)~(2.15)式に代入すると、 $f, g, h$ に対する方程式は次のようになる。

$$(D^2 - \alpha^2)^2 f = 0 \quad (2.25)$$

$$(D^2 - \alpha^2 - \gamma^2)g = fD\bar{C}_A/L \quad (2.26)$$

$$(D^2 - \alpha^2)h = fD\bar{C}_P - \beta\gamma^2 g \quad (2.27)$$

ここで、 $D=d/dy$ ,  $\alpha^2 = \alpha_x^2 + \alpha_z^2$ 。

境界条件(2.16),(2.20)~(2.23)は、

At  $y = 1$  (自由表面)

$$f = 0 \quad (2.28)$$

$$D^2 f = \alpha^2(M_R h + LM_A(g + D\bar{C}_A \cdot S)) \quad (2.29)$$

$$(D^2 - 3\alpha^2)Df = \alpha^2(\alpha^2 + N_G)S/N_c \quad (2.30)$$

$$Dg + D^2\bar{C}_A \cdot S = -B(g + D\bar{C}_A \cdot S) \quad (2.31)$$

$$Dh + D^2\bar{C}_P \cdot S = 0 \quad (2.32)$$

となる。また、固体壁面上の境界条件は、仮定(4)およびnonslip条件から、

At  $y = 0$  (固体壁)

$$f = Df = h = 0 \quad (2.33)$$

$$g = 0 \quad \text{Case(i)}, \quad Dg = 0 \quad \text{Case(ii)} \quad (2.34)$$

となる。

### 2.2.3 攪乱の解および固有値

境界条件を満たす方程式(2.25)~(2.27)の解 $f, g, h$ は、

$$f = b_0 \{ \sinh \alpha y - \alpha y \cosh \alpha y + (\alpha \coth \alpha - 1) y \sinh \alpha y \} \quad (2.35)$$

$$g = b_1 \sinh \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} y + b_2 \cosh \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} y + \frac{1}{L} U(y) \quad (2.36)$$

$$h = b_3 \sinh \alpha y + b_4 \cosh \alpha y - \beta g + c_1 V(y) + \left( \frac{1}{L} - 1 \right) \beta W(y) \quad (2.37)$$

となる。ここで、関数 $U(y), V(y), W(y)$ は、

$$U(y) = (D^2 - \alpha^2 - \gamma^2)^{-1} f D \bar{C}_A \quad (2.38)$$

$$V(y) = (D^2 - \alpha^2)^{-1} f \quad (2.39)$$

$$W(y) = (D^2 - \alpha^2)^{-1} f D \bar{C}_A \quad (2.40)$$

である。関数 $U(y), V(y), W(y)$ および $c_1$ の詳細は付録に記述する。また、積分定数 $b_1 \sim b_4$ は境界条件(2.31)~(2.34)より決定される。

マランゴニ対流の安定性の解析は、境界条件に含まれる固有値 $M_R, M_A$ を求めることになる。本問題は、生成物濃度に依存する $M_R$ と吸収ガス濃度に依存する $M_A$ があるが、実験的に報告されているのは、生成物濃度依存性が大きいことから $M_R$ を中心に考える。従って、固有値問題は、境界条件(2.29)から

$$M_R(\alpha, \gamma, L, B, M_A, N_c, N_G) = \frac{(D^2 f)_1}{\alpha^2 h(1)} - \frac{L M_A}{h(1)} \{ g(1) + (D \bar{C}_A)_1 S \} \quad (2.41)$$

となる。依存パラメータが多く極めて複雑であるため、次節において数値的評価および漸近解により考察する。

## 2.3 結果および考察

固有値  $M_R$  は、多くのパラメータに関係するため、平滑表面 ( $S = 0$ ) と表面変形 ( $S \neq 0$ ) の場合に分け議論する。また、ピオ数  $B \rightarrow \infty$  の場合、境界条件 (2.29) と (2.31) 式から  $M_A$  は対流を引き起こす原因とはならないため、 $B \rightarrow \infty$  と  $B$  有限とに分け、境界条件の違い、つまり液層底部で溶質ガスが濃度ゼロ (Case(i)) と流束ゼロ (Case(ii)) について議論する。

### 2.3.1 平滑表面の場合

表面が平滑 ( $S = 0$ ) の場合、(2.31) 式を用い (2.41) 式を書き換えると、固有値  $M_R$  は、

$$M_R(\alpha, \gamma, L, B, M_A) = \frac{(D^2 f)_1}{\alpha^2 h(1)} + M_A \frac{L(Dg)_1}{Bh(1)} \quad (2.42)$$

と表される。

$B \rightarrow \infty$  の場合、(2.42) 式の  $M_A$  の効果がなくなり単純化され、固有値  $M_R$  は  $\alpha, \gamma, L$  の3つのパラメータに依存する。仮定(4)で触れたように、この系は吸収されたガスAの濃度条件に対して2つの固体壁条件  $C_{A,y=0} = 0$  (Case(i))、 $(\partial C_A / \partial y)_{y=0} = 0$  (Case(ii)) の違いによる影響を調べる。

拡散係数の比  $L$  をパラメータとして、 $\gamma = 1$  の場合について  $M_R$  と波数  $\alpha$  との関係を Fig.2-2 に示す。各中立曲線の右側が不安定領域であり、臨界マランゴニ数  $M_{RC}$  は  $\alpha$  に対して  $M_R$  の最小値として与えられる。Case(i) の結果 (Fig.2-2(a)) は、今石らの結果<sup>9)</sup> と同じである。Case(ii) の場合は、Case(i) とよく似ているが、 $M_R$  に対する  $\alpha$  依存性に違いが見られ、また多少大きめの  $M_{RC}$  を与える。Case(i),(ii) とともに  $L$  が小さいほど中立曲線は左により不安定化している。これは、(2.26) 式より溶質ガスの攪乱が  $L = 0.1$  の場合対流項が支配的になるが、 $L = 10$  の場合は拡散項が支配的になることによる。

中立安定曲線の波数  $\alpha$  に関する漸近形を求めると、 $\alpha \ll 1$  の場合、

Case(i):  $C_{A,y=0} = 0$

$$M_R \sim \frac{3360L}{11(1+3L)} \frac{1}{\alpha^2} \quad (\gamma \rightarrow 0)$$



$$M_R \sim \frac{80}{\alpha^2} \quad (\gamma \gg 1)$$

Case(ii):  $(\partial C_A / \partial y)_{y=0} = 0$

$$M_R \sim \frac{120}{\alpha^2} \quad (\gamma \rightarrow 0)$$

$$M_R \sim \frac{80}{\alpha^2} \quad (\gamma \gg 1)$$

$\alpha \gg 1$  の場合は、Case(i)、(ii)とも同じで

$$M_R \sim \frac{8\alpha^3}{\beta\gamma^2} \quad (\alpha \gg \gamma \gg 1)$$

$$M_R \sim 8\alpha^2 \quad (\gamma \gg \alpha \gg 1)$$

となる。従って、 $\alpha \rightarrow 0$  および  $\alpha \rightarrow \infty$  で  $M_R$  は無限に大きい値を示す。 $\alpha \rightarrow 0$  の中立曲線は、Case(i) では  $\gamma \rightarrow 0$  で  $L$  に依存するが、Case(ii) では依存しない。 $\gamma \gg 1$  では、Case(i)、(ii)とも平均場の濃度分布が同じになるため差はなく、また熱対流の場合<sup>5)</sup>と一致する。

中立安定限界（臨界マランゴニ数  $M_{RC}$  と対応する波数  $\alpha_C$ ）に対する  $\gamma$  と  $L$  の効果を Fig.2-3 に示す。反応の遅い  $\gamma < 5$  では固体壁条件の違い（Case(i) と (ii)）は  $M_{RC}$  および  $\alpha_C$  に影響を与え、Case(ii) の方が  $M_{RC}$  が大きく安定であることが分かる。 $\gamma \rightarrow 0$  の極限で、Case(i) の  $M_{RC}$  および  $\alpha_C$  は  $L$  に依存するのに対し、Case(ii) では  $L$  に無関係に 1 点 ( $M_{RC} = 130.911, \alpha = 1.844$ ) に収束する。このことは、 $\gamma \sim 0$  のときの濃度  $\bar{C}_A$  が (2.7) 式と (2.9) 式より

$$\bar{C}_A \sim y \quad \text{Case(i)}, \quad \bar{C}_A \sim 1 \quad \text{Case(ii)}$$

となることによって説明される。Case(i) では  $\bar{C}_A$  が分布を持つため (2.26) 式右辺の対流項が残るが、Case(ii) では均一なので対流項が消失するためである。

$L \rightarrow \infty$  の場合には Case(i) の場合も (2.26) 式の対流項が消失するが、 $\gamma \rightarrow 0$  において  $M_{RC} = 109.41, \alpha = 1.867$  で Case(ii) の値とは異なる。これは、 $\bar{C}_P$  の分布と攪乱  $C'_A$  についての条件が違うことに起因する。尚、 $\gamma \rightarrow 0$  の極限においても反応項の存在が本質的に影響を持っており、無反応の系とは違う  $M_{RC}$  を示す事<sup>7,10)</sup>は、Case(i),(ii) いずれ

れの場合にも言える。逆の $\gamma \rightarrow \infty$ では熱対流の結果<sup>5,15)</sup> (温度の境界条件が $C_P$ のそれに相当する場合) に対応する。

ここで、 $M_A$ の効果を考える前に、 $M_A = 0$ における $B \rightarrow 0$ の場合の中立安定限界を考え、上記の結果と比較しておく。 $B = 0$ における臨界マランゴニ数 $M_{RC}$ と対応する波数 $\alpha_C$ に対する $\gamma$ と $L$ の効果をFig.2-4に示す。Fig.2-3と比較して定性的に良く似た結果を与えるが、 $L$ が小さいほど $B = 0$ の方が不安定であることを示している。これは、(2.31)式より $B \rightarrow \infty$ のとき表面攪乱 $g(1)$ はゼロで、 $B$ の低下とともに $g(1)$ が値を持ち、(2.37)式に示されるように生成物濃度の攪乱 $h(1)$ に大きな影響を与えるため、不安定化すると考えられる。 $M_A = 0$ で気相側移動抵抗を持つ $B$ が有限値の場合、Fig.2-3とFig.2-4の中間値として推測できる。

$B$ が有限の場合、表面が平滑であってもガス・マランゴニ数 $M_A$ の効果が現れる。(2.42)式に示されるように対流を引き起こす表面張力勾配は、 $C_A'$ 、 $C_P'$ 双方の効果によって発生する。(2.29)式右辺は、(2.31)式を使うと、

$$\alpha^2 (M_R h(1) + L M_A g(1)) = \alpha^2 \left( M_R h(1) - \frac{L M_A}{B} (Dg)_1 \right)$$

と表される。この左辺で $g(1)$ 、 $h(1)$ は同符号となるから、 $M_A < 0$ のとき $C_A'$ により表面張力勾配が緩和されるため、 $M_R$ は大きくならなければならない。一方、 $M_A > 0$ では $C_A'$ による表面張力勾配が手伝って、 $M_R$ が小さくとも対流が維持できる。また、ピオ数 $B$ と拡散係数比 $L$ は、 $g$ 、 $h$ に含まれているため、複雑な依存性を示すが、上式の右辺の $L M_A / B$ からほぼ推論できる。

$\gamma = 1$ とした場合の代表的な中立曲線をFigs.2-5~2-8に示す。Fig.2-5は、 $B = 100$ 、 $M_A = -1$ の場合で、 $B$ が大きく $M_A$ が小さいため、Fig.2-2とほぼ一致する。Fig.2-6は、 $B = 10$ 、 $M_A = -100$ とした場合で、 $M_A$ が負のため $L \geq 1$ でFig.2-5に比べ安定化し、 $L < 1$ では僅かではあるが不安定化している。更に $B = 1$ と小さくした場合、Fig.2-7に示されるように、 $L \geq 1$ で安定化し、 $L < 1$ では不安定化することが明確に分かる。また、 $M_A = 100$ 、 $B = 1$ とした場合(Fig.2-8)、すべての $L$ に対し中立曲線は、Fig.2-5に比べ不安定化していることが分かる。

ここで、ガス・マランゴニ数の効果を調べるため、生成物による表面張力変化を無視( $M_R = 0$ )して、 $M_A$ だけが対流を引き起こす場合を考える。臨界 $M_{AC}$ およびそれと

対応する $\alpha_C$ を $\gamma$ の関数としてFig.2-9に示す。 $\gamma < 3$ の時にのみ境界条件の違いが現れ、 $B$ の値と共に $M_{AC}$ は急激に大きな値を示す。 $\alpha_C$ も $\gamma$ と共に大きくなり、 $B \geq 10^4$ では $\alpha = \gamma$ に漸近する。尚、この場合、拡散係数比 $L$ は $M_A$ に対して無関係になる。Case(i)の場合、 $M_{AC}$ の最小値は、 $\gamma = B = 0$ のとき $M_{AC} = 79.61$ 、 $\alpha = 1.993$ を与え、物理吸収の場合と一致する<sup>6)</sup>。

### 2.3.2 表面変形の効果

解 $f$ を境界条件(2.30)式に代入すると、表面変形の振幅 $S$ が求められる。

$$S = -b_0 \frac{2\alpha^2 N_c}{(N_G + \alpha^2) \sinh \alpha} \quad (2.43)$$

上式で、 $N_c \rightarrow 0$ は表面変形のない平滑な場合となり、今石ら<sup>10)</sup>の結果と一致する。 $N_c \neq 0$ の時、表面変形は、表面張力波( $N_G = 0$ )と重力波( $N_G \neq 0$ )との合成から成っており、表面変形と流動の関係は、 $f(y)$ と $S$ の符号を調べることにより判明する。(2.43)式において、 $N_c > 0$ であるから $N_G + \alpha^2 > 0$ のとき、 $f$ と $S$ は符号が異なる。このことは、Scrivenら<sup>11)</sup>が指摘したように、表面張力による対流は、上昇流の位置での表面変位は平衡位置より下がり、逆に下降流で表面は上がる位相の機構を持つことがわかる。天井に付着した液層のような $N_G + \alpha^2 < 0$ のとき、 $f$ と $S$ とが同符号となり、浮力に起因した機構<sup>11,12)</sup>と同様な結果となる。しかしながら、本問題では重力波がこの効果を起こすので機構上は本質的に異なるものである。

$M_R$ に対して、まず $B \rightarrow \infty$ の場合の表面変形効果を調べる。この場合の固有値は、

$$M_R = M_R(\alpha, \gamma, L, N_c, N_G)$$

となり、平滑表面の場合と比べ表面張力波 $N_c$ と重力波 $N_G$ の効果が加わる。Case(i)の場合の代表例として、 $N_c$ の効果をFigs.2-10,11に示す。Fig.2-2(a)と比較すると $N_c$ の効果は低波数域で顕著であることがわかる。特に、波数 $\alpha = 0$ で $M_R = 0$ となり、臨界値 $M_{RC} = 0$ を与える。 $N_c$ が大きいと中立曲線は、低波数の幅広い範囲において $M_R$ を低下させる。また、低波数域での中立曲線には $L$ は依存しないことを示す。

$N_c$ と共に $N_G$ の効果は、Figs.2-12,13に示される。 $N_G$ の効果も低波数域に集中的に表われ、 $N_G$ の値と共に $\alpha = 0$ での $M_R$ を大きくする。従って、 $N_G$ の効果は、低波数域の攪乱に対して安定化作用を持つことが分かる。Fig.2-12で $L = 0.1$ の場合 $M_{RC}$ は、 $\alpha \approx 1.8$ で与えられ、 $L > 0.1$ では $\alpha = 0$ の値となる。Fig.2-13では、 $N_G$ の値が大きく $M_{R,\alpha=0}$ の値を安定化させるため、平滑表面の結果と同様、 $M_{RC}$ は $\alpha \approx 1.8$ の値となる。

ここで、臨界値 $M_{RC}$ は、 $\alpha = 0$ で決定される $M_{RC} = 0$  ( $N_c \neq 0$ かつ $N_G = 0$ ) およびFig.2-13で示される ( $M_{RC,\alpha=0} < M_{RC,\alpha \approx 1.8}$ ) モードと、表面変形のない場合および $N_G$ が大きい場合の $\alpha \approx 1.8$ で $M_{RC}$ を与えるモードの2つがある。便宜上、前者を表面変形不安定、後者を対流不安定と呼ぶことにする。

表面変形の効果は、低波数域の攪乱に著しい影響を持つため、漸近形を考察する。 $\alpha \ll 1$ の漸近解は、次式として整理される。

$$M_R = \frac{2 N_G}{3 N_c} E(\gamma, B) - \frac{L M_A}{B} Q(\gamma, B) \quad (2.44)$$

$$\text{Case(i)} : C_{A,y=0} = 0$$

$$E = \frac{(\gamma \coth \gamma - 1)(\cosh \gamma/B + \sinh \gamma/\gamma)}{\cosh \gamma - \gamma/\sinh \gamma + \gamma \sinh \gamma/B} \quad (2.45)$$

$$Q = \frac{E}{(\cosh \gamma/B + \sinh \gamma/\gamma)^2} \quad (2.46)$$

$$\text{Case(ii)} : (\partial C_A / \partial y)_{y=0} = 0$$

$$E = \frac{(\gamma \tanh \gamma - 1 + 1/\cosh \gamma)(\sinh \gamma/B + \cosh \gamma/\gamma)}{\sinh \gamma + \gamma/\cosh \gamma - \tanh \gamma + (\gamma \cosh \gamma - \gamma)/B} \quad (2.47)$$

$$Q = -\frac{E}{(\sinh \gamma/B + \cosh \gamma/\gamma)^2} \quad (2.48)$$

ビオ数 $B$ をパラメータとして $E$ および $Q$ の $\gamma$ に対する変化をそれぞれFigs.2-14,15に示す。図には、 $\gamma \gg 1$ の場合の漸近解 $E \sim (\gamma-1)/\gamma$ :Case(i)、 $E \sim (\gamma-1)/\gamma/(1-2e^{-\gamma})$ :Case(ii)も合わせ示す。 $E$ および $Q$ は $\gamma > 5$ ではCase(i),(ii)に違いはなく、それ以下で大きな差が表れる。 $E$ は、Case(i)よりCase(ii)の方がすべての $B$ に対して大きな値を示し、 $N_c/N_G$ を固定した場合、 $\alpha = 0$ の $M_R$ はCase(ii)の方が大きいことがわかる。また、ビオ数 $B$ の効果はCase(i)とCase(ii)で逆の効果、つまり、Case(i)で $B$ が大きいほど $E$ は大きい、Case(ii)では $B$ が小さいほど $E$ は大きい。また、Case(ii)において $B \leq 1$ で極値を持つことがわかる。

一方、ガスマランゴニ数  $M_A$  に関連する  $Q$  もまた、Fig.2-15 に示されるように遅い反応でのみ効果を持つ。Case(i) の場合、 $Q$  は正の値を持ち  $\gamma = 0$  で最大値を持ち、 $B$  が大きいほど大きな値を示す。Case(ii) の場合、 $Q$  は負の値を持ち、 $\gamma = 0$  で  $Q = 0$  となり、 $B$  が大きいほど大きなピークを示す。ただし、 $M_{R,\alpha=0}$  に対する  $B$  の効果は、 $Q/B$  として関係しているため  $B = 1$  近くでもっとも効果は大きい。

表面変形と  $M_A$  の効果を含む中立安定曲線の代表的な例を Figs.2-16~21 に Case(i) と (ii) による違いを比較して示す。 $M_A = -1$  とした Fig.2-16 は、 $B = 100$  と大きく  $M_A$  の効果は無視できる場合で、 $N_c = 0.1$  と大きいいため低波数域において不安定化される例である。Fig.2-17 は  $M_A = -100$ ,  $B = 10$  とした場合で、 $M_A$  の効果が現れてくる。式(2.44)の  $\alpha = 0$  の  $M_R$  は、 $N_G = 0$  であるため  $E$  の効果はないが、 $Q$  の値を持つため  $M_{R,\alpha=0}$  は  $L$  に依存する。特に、 $LM_A$  の絶対値が大きいほど特異な中立安定曲線を示す。このことは、 $B = 1$  とした Fig.2-18 の方がより拡大されて示される。Case(i) では  $Q > 0$  となり  $|LM_A|$  が大きいほど低波数域で安定化作用を示す。一方、Case(ii) で  $Q < 0$  となるため、 $L$  が大きいほど  $M_{R,\alpha=0}$  の値は小さくなり負の領域にまで伸びている。

Fig.2-19 は、 $M_A = 100$  の場合で、平滑の場合に指摘したように  $M_R$  を不安定化させる場合である。この時、Fig.2-17 ( $M_A = -100$ ) と比べ  $M_A$  の違いから  $\alpha = 0$  で Case(i) では不安定化し、Case(ii) では安定化する。しかし、平滑表面の Fig.2-8 と比較すると  $L$  が大きい場合、表面変形効果は広い波数域まで影響がおよぶことが分かる。つまり、 $L$  が小さいうちは  $\alpha = 0$  の  $M_R$  が  $M_{RC}$  を与えるが、 $L$  が大きくなるに連れて  $M_R$  は極値を持つようになり、 $\alpha \approx 2$  の極小値が  $M_{RC}$  を与える。

$N_G$  の効果は Figs.2-20~21 に代表的な例を示す。Fig.2-20 は、Fig.2-7 に示した場合に表面変形 ( $N_c = 10^{-4}$ ,  $N_G = 0.1$ ) を加えた場合で、低波数域のみに特徴的な変化を示すが、 $N_G/N_c = 10^3$  と大きいいため  $M_{R,\alpha=0}$  は安定化され大きな値を示している。ここで、 $N_G$  が負の値を持つ例を Fig.2-21 に示す。これは、天井に貼り付いた液体層を考えることになる。波数が  $\alpha^2 = -N_G$  の値を境に特異なパターンが現れ、 $M_{RC} = -\infty$  を与える。これは、表面変形と対流が異なる様相を示すためである。Case(ii) においても定性的に Case(i) と同様である。

臨界マランゴニ数  $M_{RC}$  と対応する  $\alpha_C$  についてまとめると、 $B \rightarrow \infty$  の場合

$$(M_{RC}, \alpha_C) = f(\gamma, L, N_G/N_c)$$

と関係する因子が少ない。特に、 $N_c$  と  $N_G$  は表面変形時にのみ低波数域で効果を持ち、(2.44) 式で示されるように  $N_G/N_c$  の組み合わせにおいて関係する。代表的な場合について  $M_{RC}$  対  $N_G/N_c$  図として Figs. 2-22, 23 に整理される。 $L = 1$  として  $\gamma$  依存性を Fig. 2-22 に示す。折れ線特性は、 $N_G/N_c$  が小さいときの表面変形不安定、つまり波数  $\alpha = 0$  の  $M_R$  が最小値を与える場合と、 $N_G/N_c$  が大きいときの対流不安定、つまり表面平滑の場合に与えられる最小値  $M_R$  が臨界値を与える場合の 2 つの機構の違いを示す。 $\gamma$  が大きいほど表面変形不安定領域が狭く、 $N_G/N_c$  の小さい値から対流不安定に移行することが分かる。Fig. 2-23 は、 $\gamma = 1$  として  $L$  依存性を示す。表面変形不安定に対し、 $L$  は (2.44) 式右辺 2 項にのみ関係するため、 $B \rightarrow \infty$  の場合は無関係となる。従って対流不安定にのみ  $L$  は関係する。

$B$  が有限の場合、臨界  $M_{RC}$  は  $M_A$  にも関係して複雑な振る舞いを示す。特に、 $\gamma \leq 5$  では、境界条件の違いから  $M_{R, \alpha=0}$  は異なる特性を示す。しかし、 $M_A$  の効果は一般に小さいことから、大略的な臨界値は、表面平滑の場合に代表される対流不安定 (Fig. 2-3 ( $B \rightarrow \infty$ ) と Fig. 2-4 ( $B \rightarrow 0$ ) の中間値) として決まる  $M_R$  と表面変形が特徴的に現れる  $\alpha = 0$  の  $M_R$  ((2.44) 式によって計算できる) との競合として決定できる。ただし、Fig. 2-19 に示される  $M_A$  と  $L$  が大きい場合の特異なケースも存在する。マランゴニ対流が報告されている実験<sup>1~4)</sup> では、生成物濃度に依存する系がほとんどで、溶質ガス依存性に対する指摘はなく、影響は小さいと考えられる。しかし、 $M_A$  と  $L$  が大きい場合での遅い反応でピオ数  $B$  と結合して現れる機構であるため、更に検討する余地は残されているように思われる。

## 2.4 結論

反応吸収時における界面攪乱に対し、定常擬1次反応吸収を伴う等温静止液層の安定問題として線形安定論により考察した。表面張力は、生成物濃度と溶質ガス濃度に依存し、生成物は不揮発性と仮定し、ガスの気相側移動抵抗を考慮にいった。液層底部で生成物濃度  $C_P = 0$ 、溶質ガス濃度は  $C_A = 0$  (Case(i)) と  $\partial C_A / \partial y = 0$  (Case(ii)) の場合について考察した。更に、表面変形が可能として対流発生条件を明らかにした。

定常モードに対する本問題は、生成物濃度依存のマランゴニ数  $M_R$  に対して、

$$M_R(\alpha, \gamma, L, B, M_A, N_c, N_G)$$

の固有値問題として解析した。また、漸近解を求めることにより特徴を明らかにした。その結果、

表面変形のない平滑表面の場合、

- (1) 今石らの解析（底面で  $C_A = 0$  の Case(i) に対応）を確認するとともに、底面で溶質ガスが流束ゼロの Case(ii) の境界条件の場合についても対流発生条件を明らかにした。これらの境界条件の違いは、遅い反応 ( $\gamma < 5$ ) のとき対流発生に影響を与える。
- (2) ガスの気相側移動抵抗を考慮することにより、ピオ数  $B$  とガスマランゴニ数  $M_A$  の効果を明らかにした。その結果は、おおむね  $LM_A/B$  の値が大きいと不安定化する。

表面変位  $S(\alpha, N_c, N_G)$  を考慮することにより表面張力波  $N_c$  と重力波  $N_G$  の影響を考察した。

- (3) Scriven ら<sup>11)</sup> が指摘したように表面張力勾配に起因する攪乱の構造は、上昇流において表面が下降し、下降流で表面隆起となっていることを反応吸収系においても確認した。
- (4) 表面変形の効果は、 $\alpha$  対  $M_R$  の中立曲線において、表面平滑の場合に比べ低波数域に顕著な違いが現れた。この特徴は、 $\alpha \ll 1$  の漸近解 ((2.44) 式) から理解で

きる。特に、 $B \rightarrow \infty, N_G = 0$ の場合、 $\alpha = 0$ で臨界値  $M_{RC} = 0$ を与える。また、 $\alpha = 0$ における  $M_R$ は  $L$ に依存せず、 $N_G/N_c$  および  $\gamma$  によって決まり、 $N_G > 0$ では重力は安定化作用を持つ。 $B$ が有限の場合の固有値  $M_{R,\alpha=0}$ は、 $N_G/N_c$ と  $LM_A$ の組み合わせにおいて  $\gamma$ と  $B$ に関係する。特に、 $LM_A$ 依存性は、境界条件の違い（溶質ガスの底部での違い）に対して、逆の作用（安定と不安定）を持つことがわかった。

- (5) 臨界マランゴニ数  $M_{RC}$ は、表面変形不安定と対流不安定の2つのモードがある。これは、波数  $\alpha = 0$ の  $M_R$ が臨界値を与える場合と平滑表面時に与えられる  $1 \leq \alpha \leq 2$ 付近で臨界値を与える場合にそれぞれ対応する。どちらのモードが臨界値を決定するかは、式(2.44)の  $M_{R,\alpha=0}$ の値と、Fig.2-3( $B \rightarrow \infty$ )およびFig.2-4( $B = 0$ )から推測される  $M_{RC,\alpha \approx 2}$ の値からわかる。



付録

(2.37)~(2.39)式の間数 $U(y)$ ,  $V(y)$ ,  $W(y)$ および(2.36)式中の $c_1$ は、次式によって表される。

$$U(y) = \frac{b_0 B}{4\alpha(\gamma \cosh \gamma + B \sinh \gamma)} \left\{ \left(2 + \frac{\alpha}{\gamma} + By\right) \sinh(\alpha + \gamma)y - \left(\frac{\alpha + \gamma}{\alpha\gamma} B + \alpha y\right) \cosh(\alpha + \gamma)y \right. \\ \left. - \left(2 - \frac{\alpha}{\gamma} + By\right) \sinh(\alpha - \gamma)y + \left(-\frac{\alpha - \gamma}{\alpha\gamma} B + \alpha y\right) \cosh(\alpha - \gamma)y \right\} \quad \text{Case(i)}$$

$$= \frac{b_0 B}{4\alpha(\gamma \sinh \gamma + B \cosh \gamma)} \left\{ \left(2 + \frac{\alpha}{\gamma} + By\right) \cosh(\alpha + \gamma)y - \left(\frac{\alpha + \gamma}{\alpha\gamma} B + \alpha y\right) \sinh(\alpha + \gamma)y \right. \\ \left. + \left(2 - \frac{\alpha}{\gamma} + By\right) \cosh(\alpha - \gamma)y - \left(-\frac{\alpha - \gamma}{\alpha\gamma} B + \alpha y\right) \sinh(\alpha - \gamma)y \right\} \quad \text{Case(ii)}$$

$$V(y) = \frac{b_0 y}{4} \left\{ \frac{3 + By}{\alpha} \cosh \alpha y - \left(\frac{B}{\alpha^2} + y\right) \sinh \alpha y \right\}$$

$$W(y) = \frac{b_0 B}{2(\gamma \cosh \gamma + B \sinh \gamma)} \left\{ \left(1 + 2\frac{\alpha}{\gamma} \frac{\alpha + \gamma}{2\alpha + \gamma} + By\right) \frac{\sinh(\alpha + \gamma)y}{2\alpha + \gamma} - \left(2\frac{B}{\gamma} \frac{\alpha + \gamma}{2\alpha + \gamma} + \alpha y\right) \frac{\cosh(\alpha + \gamma)y}{2\alpha + \gamma} \right. \\ \left. - \left(1 - 2\frac{\alpha}{\gamma} \frac{\alpha - \gamma}{2\alpha - \gamma} + By\right) \frac{\sinh(\alpha - \gamma)y}{2\alpha - \gamma} + \left(-2\frac{B}{\gamma} \frac{\alpha - \gamma}{2\alpha - \gamma} + \alpha y\right) \frac{\cosh(\alpha - \gamma)y}{2\alpha - \gamma} \right\} \quad \text{Case(i)}$$

$$= \frac{b_0 B}{2(\gamma \sinh \gamma + B \cosh \gamma)} \left\{ \left(1 + 2\frac{\alpha}{\gamma} \frac{\alpha + \gamma}{2\alpha + \gamma} + By\right) \frac{\cosh(\alpha + \gamma)y}{2\alpha + \gamma} - \left(2\frac{B}{\gamma} \frac{\alpha + \gamma}{2\alpha + \gamma} + \alpha y\right) \frac{\sinh(\alpha + \gamma)y}{2\alpha + \gamma} \right. \\ \left. + \left(1 - 2\frac{\alpha}{\gamma} \frac{\alpha - \gamma}{2\alpha - \gamma} + By\right) \frac{\cosh(\alpha - \gamma)y}{2\alpha - \gamma} - \left(-2\frac{B}{\gamma} \frac{\alpha - \gamma}{2\alpha - \gamma} + \alpha y\right) \frac{\sinh(\alpha - \gamma)y}{2\alpha - \gamma} \right\} \quad \text{Case(ii)}$$

$$c_1 = \gamma\beta \frac{\coth \gamma}{\gamma \coth \gamma + B} \quad : \quad \text{Case(i)},$$

$$c_1 = \gamma\beta \frac{\tanh \gamma}{\gamma \tanh \gamma + B} \quad : \quad \text{Case(ii)}$$

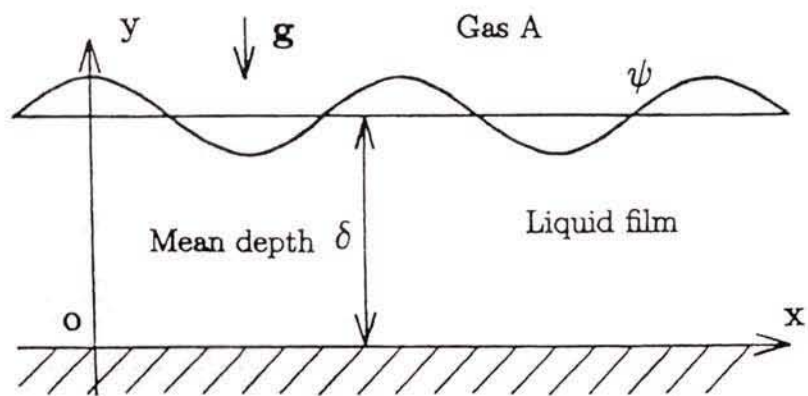
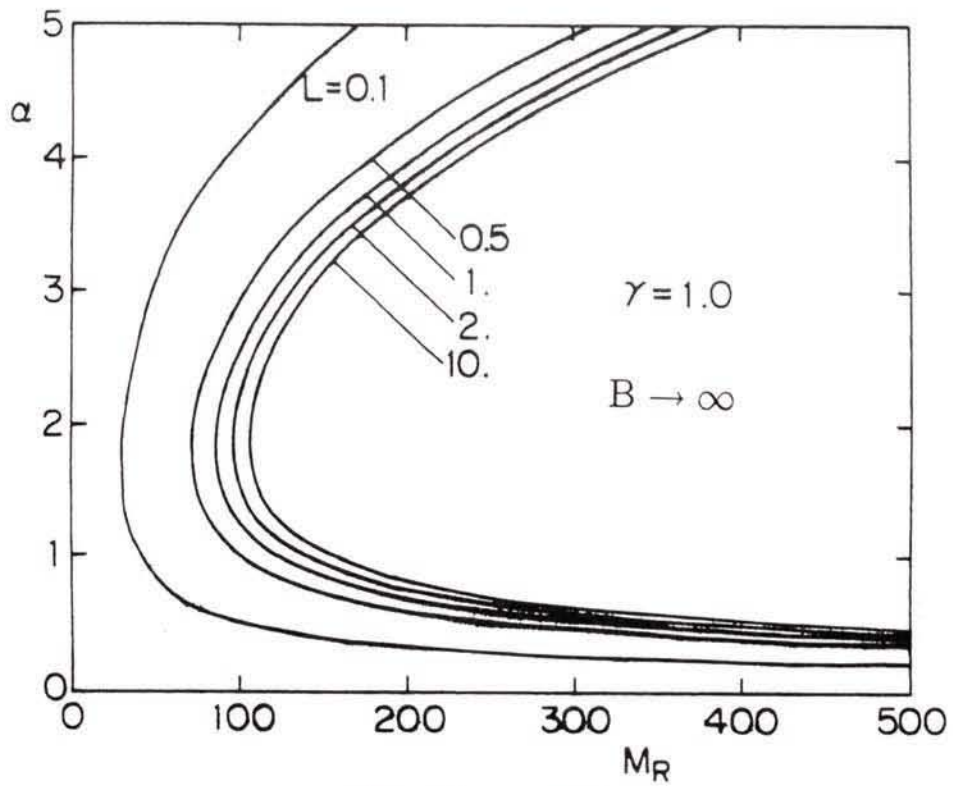
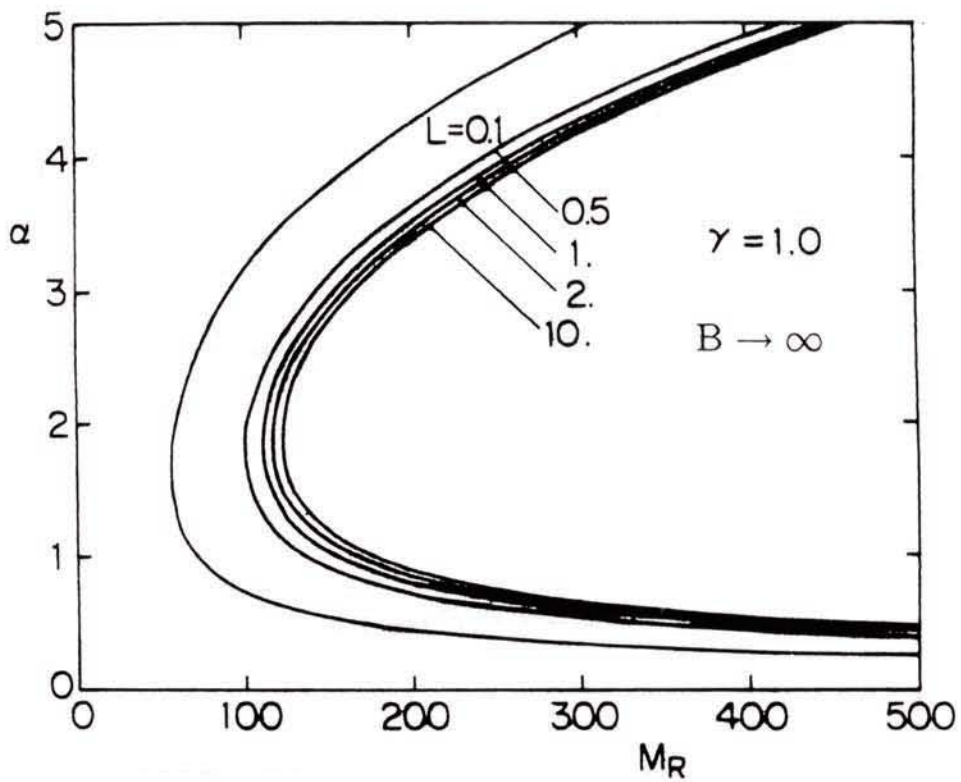


Fig. 2-1 Configuration of the system



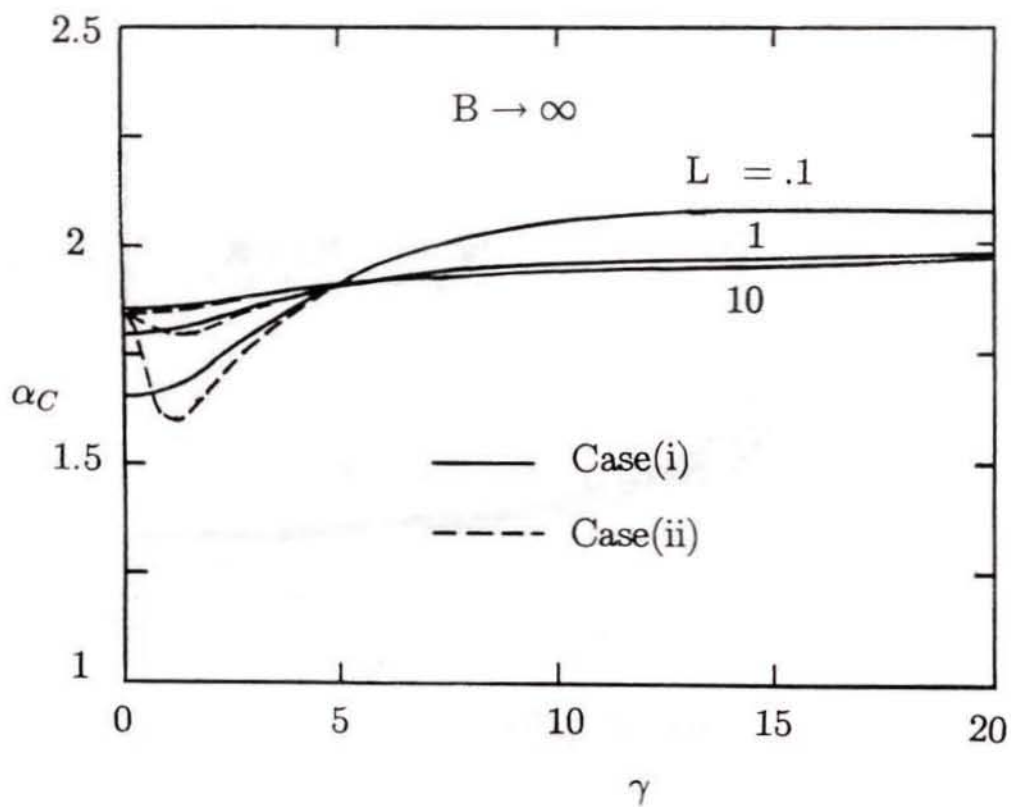
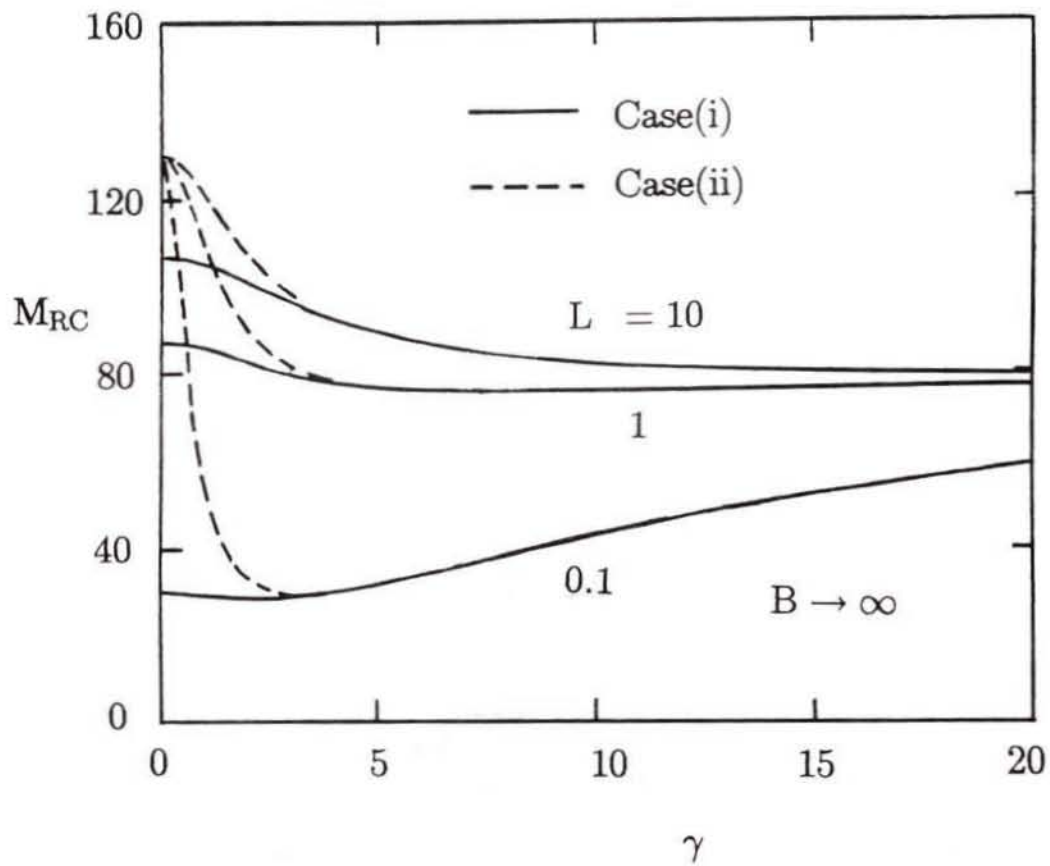
(a)  $C_{A,y=0} = 0$



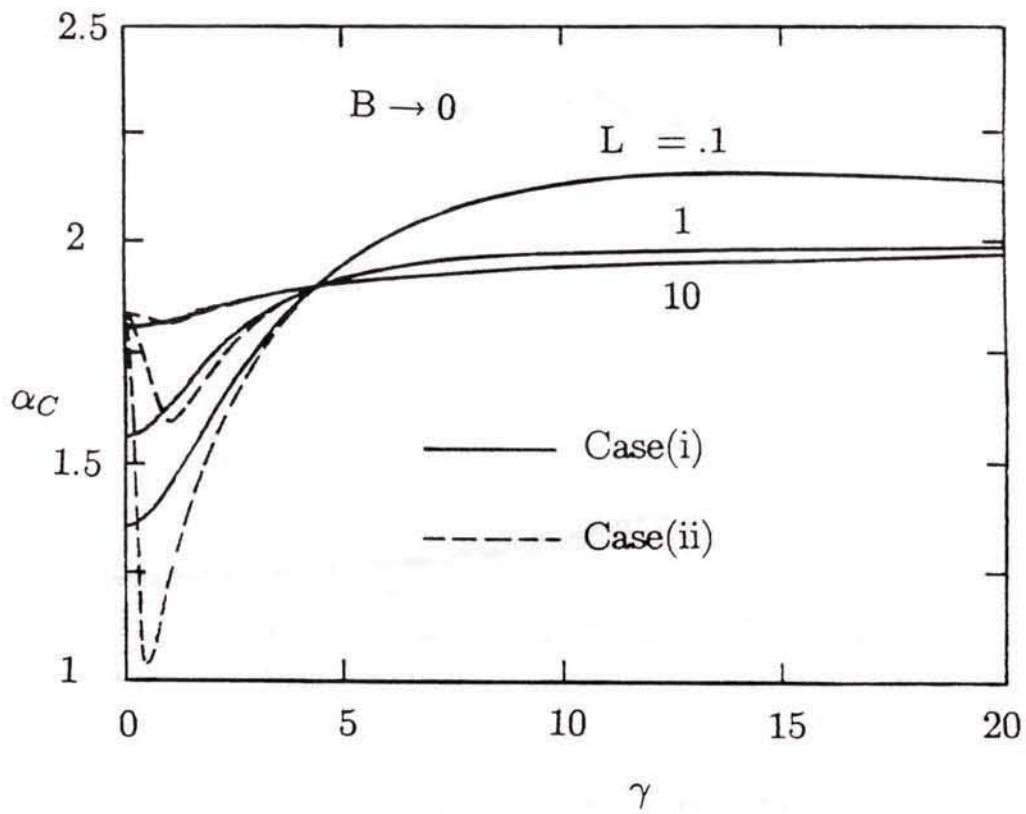
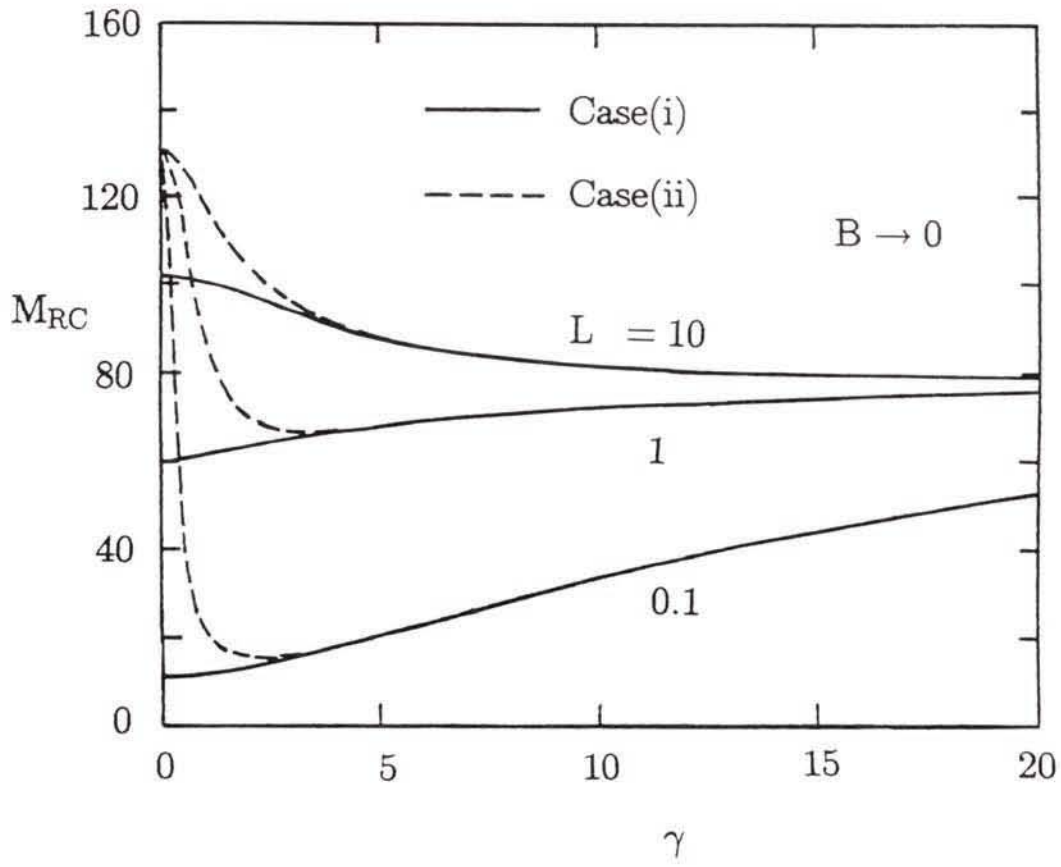
(b)  $(\partial C_A / \partial y)_{y=0} = 0$

**Fig.2-2** Neutral stability curves on flat surface ( $S = 0$ ):

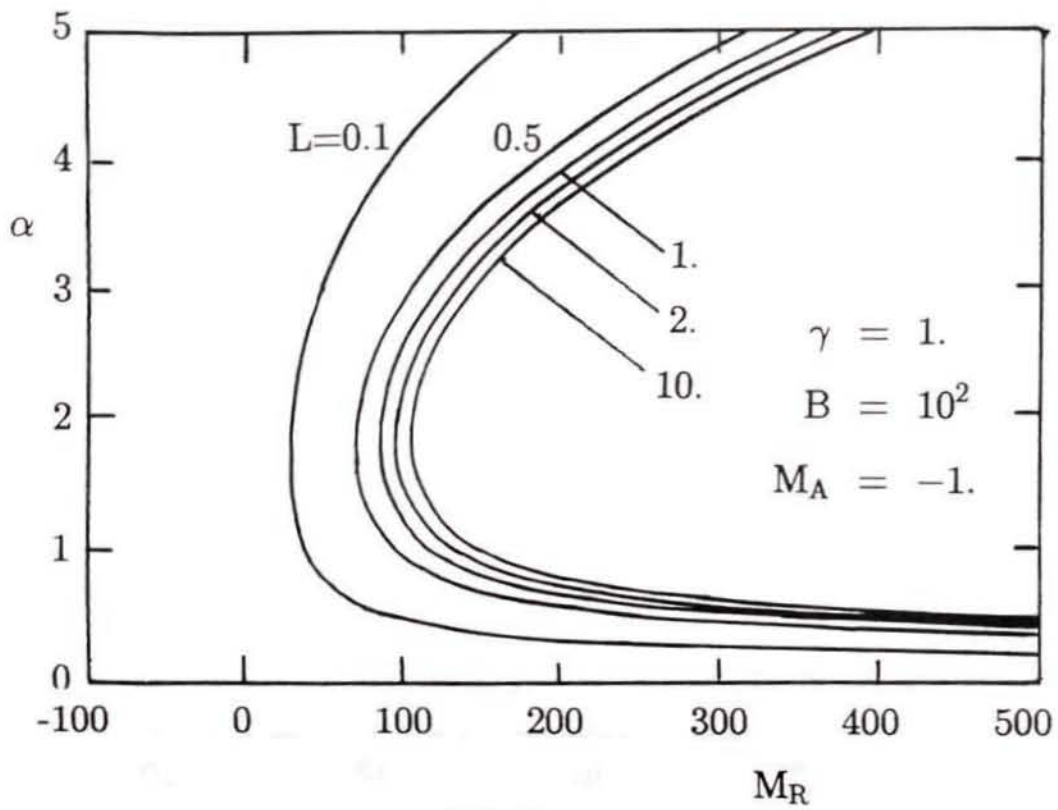
(a) Case(i), (b) Case(ii).



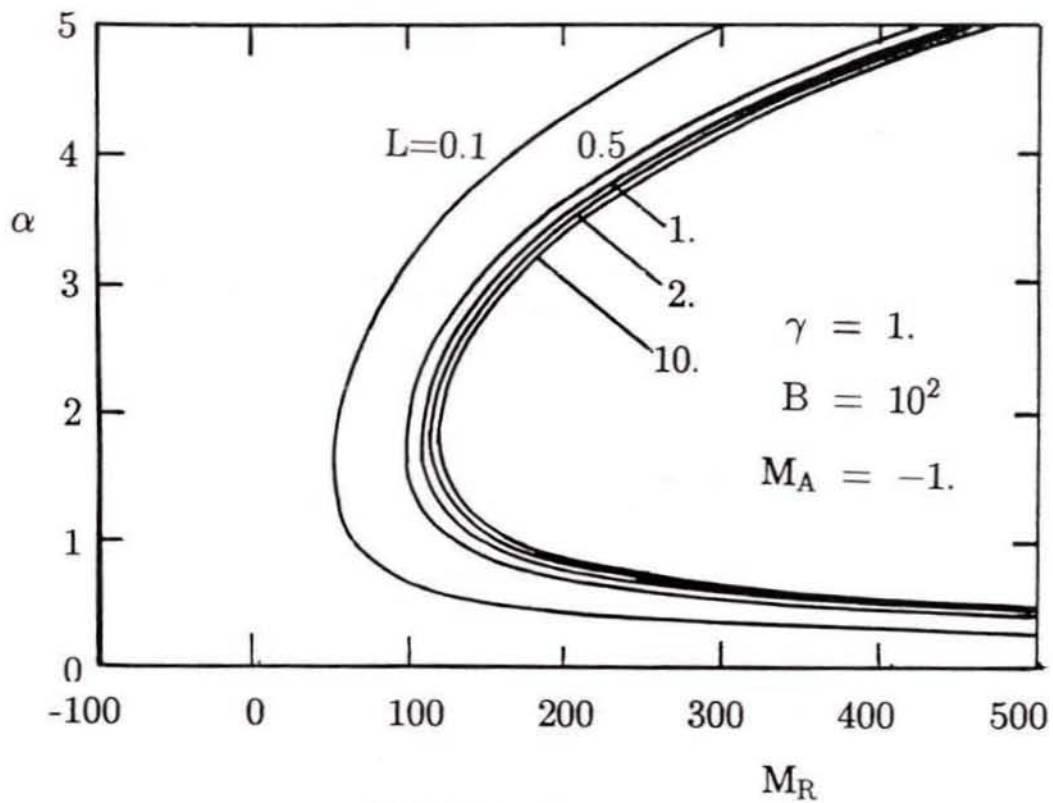
**Fig.2-3** Critical values  $M_{RC}$  and  $\alpha_C$  for  $B \rightarrow \infty$  versus  $\gamma$  :  
 (a)  $M_{RC}$  and (b)  $\alpha_C$ .



**Fig.2-4** Critical values  $M_{RC}$  and  $\alpha_C$  for  $B = 0$  versus  $\gamma$  :  
 (a)  $M_{RC}$  and (b)  $\alpha_C$ .

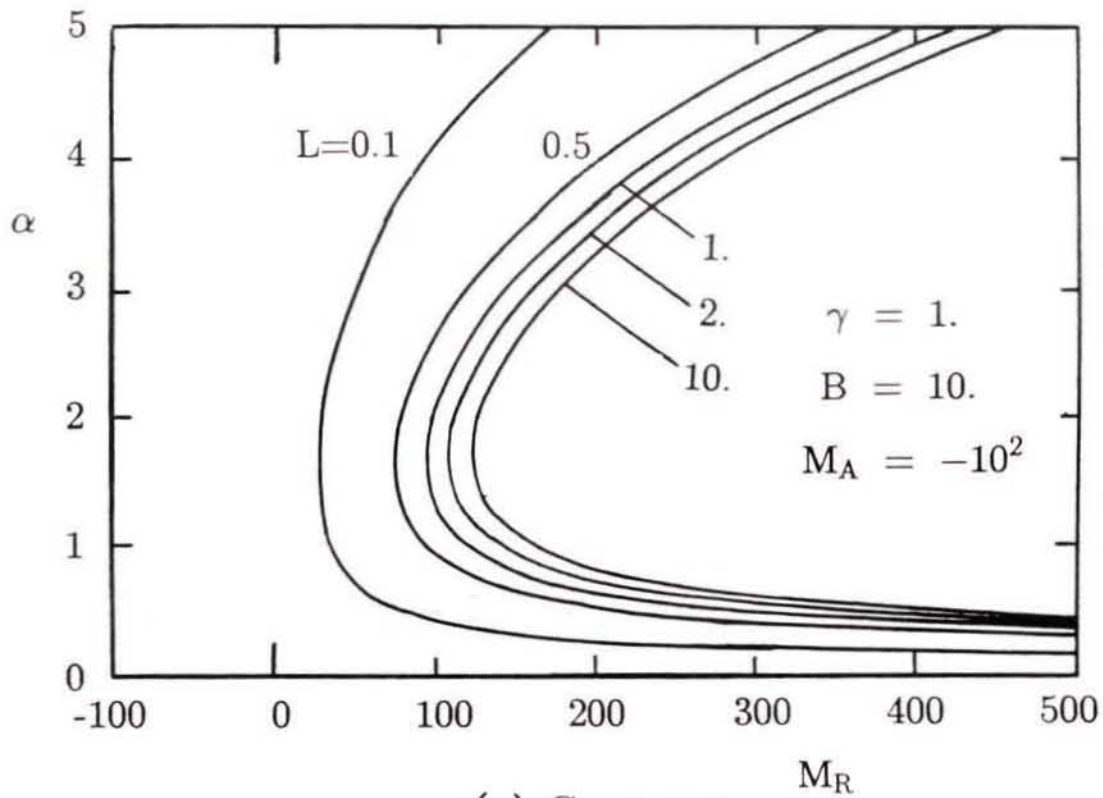


(a)  $C_{A,y=0} = 0$

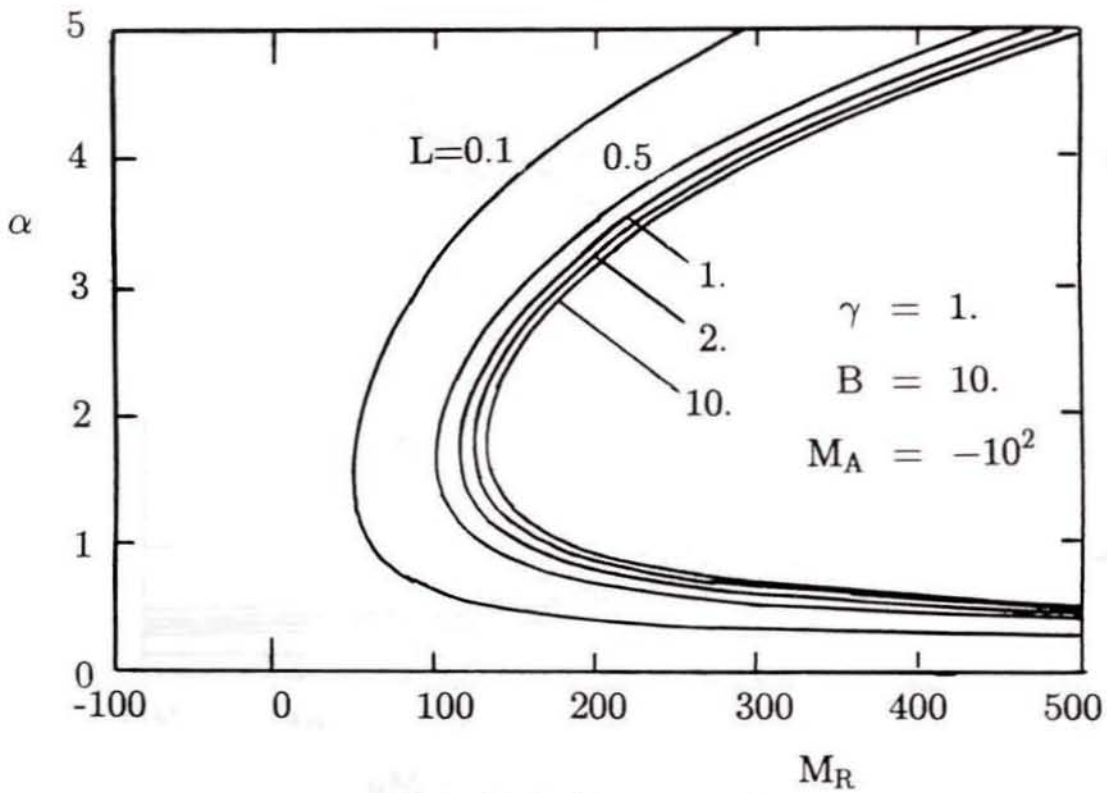


(b)  $(\partial C_A / \partial y)_{y=0} = 0$

**Fig.2-5** Neutral stability curves of  $M_R$  with effect of  $M_A$  and  $B$  on flat surface ( $S = 0$ ): (a) Case(i) and (b) Case(ii).

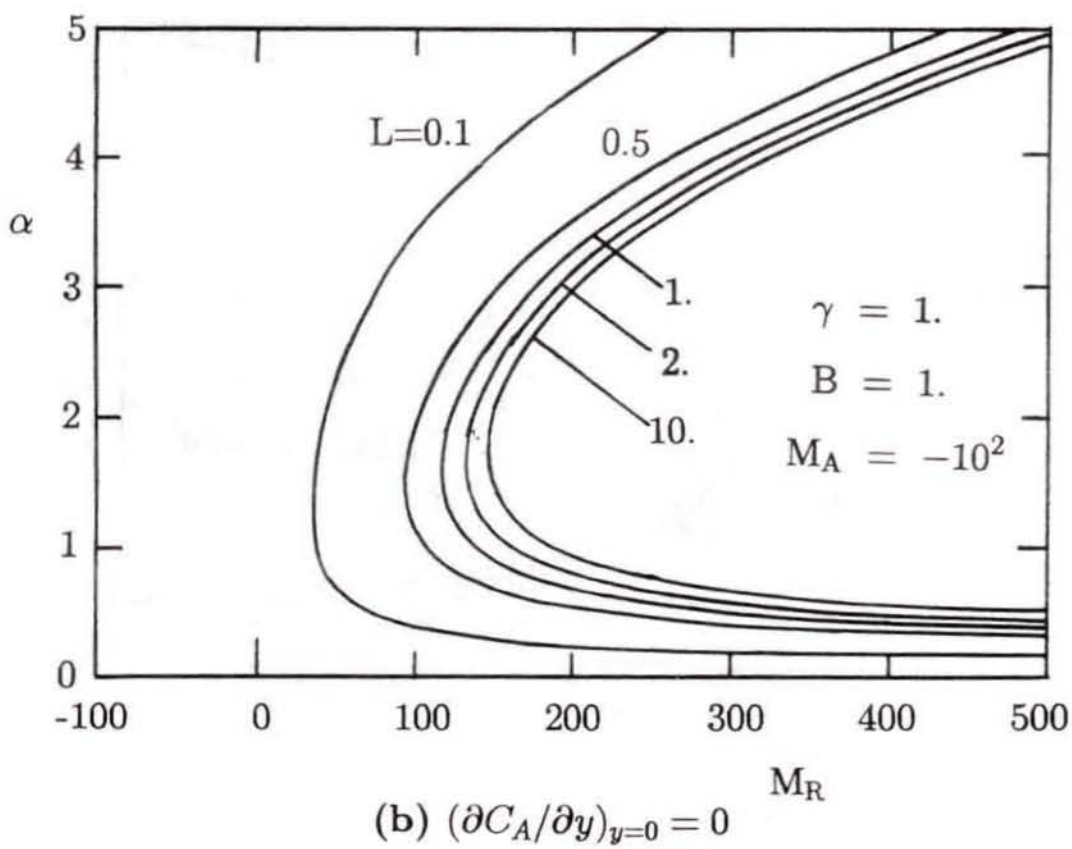
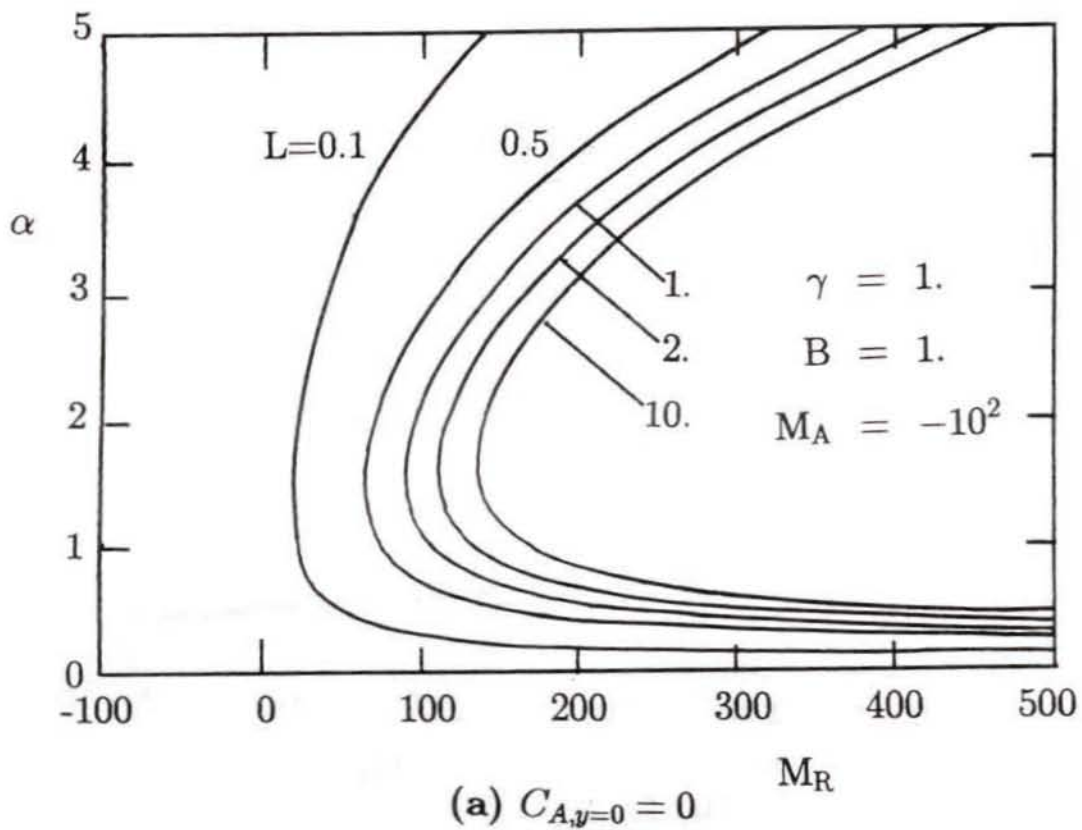


(a)  $C_{A,y=0} = 0$



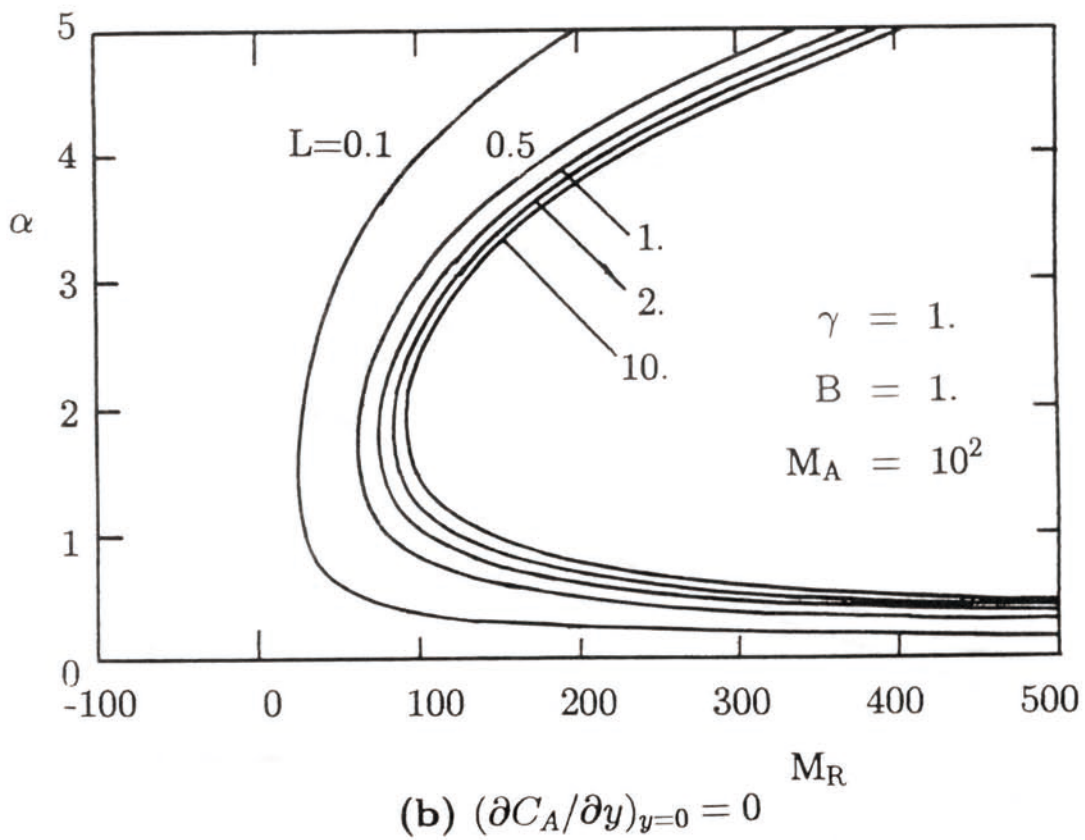
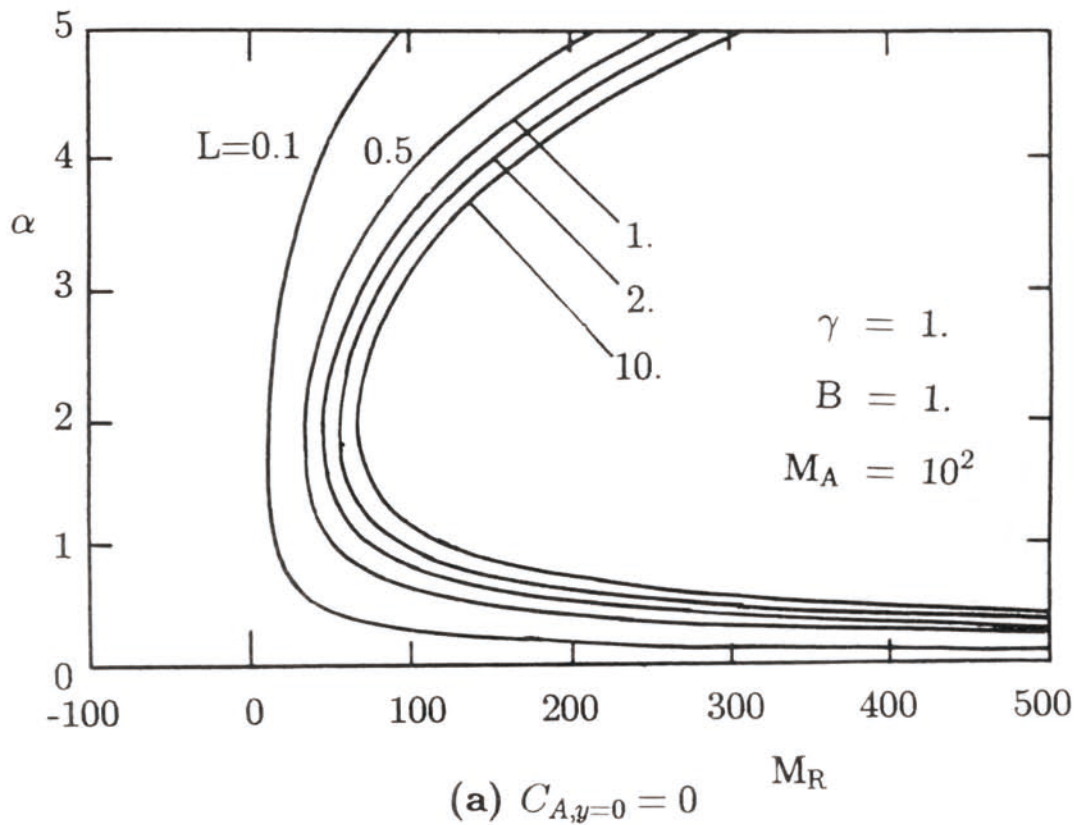
(b)  $(\partial C_A / \partial y)_{y=0} = 0$

**Fig.2-6** Neutral stability curves of  $M_R$  with effect of  $M_A$  and  $B$  on flat surface ( $S = 0$ ): (a) Case(i) and (b) Case(ii).

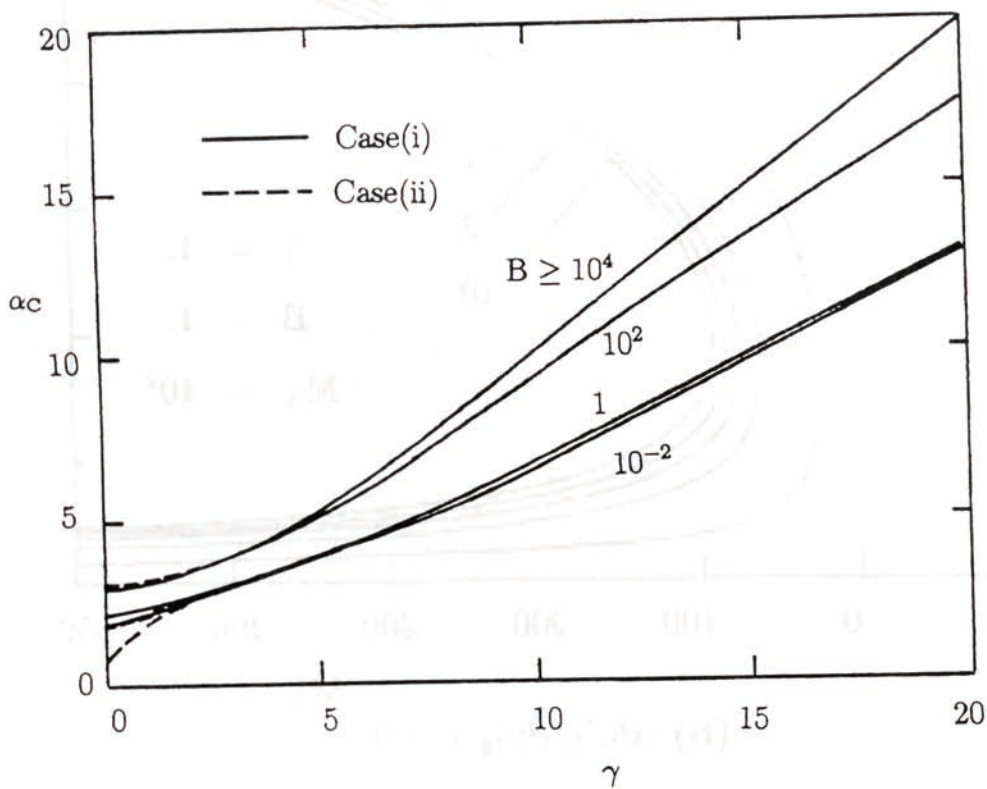
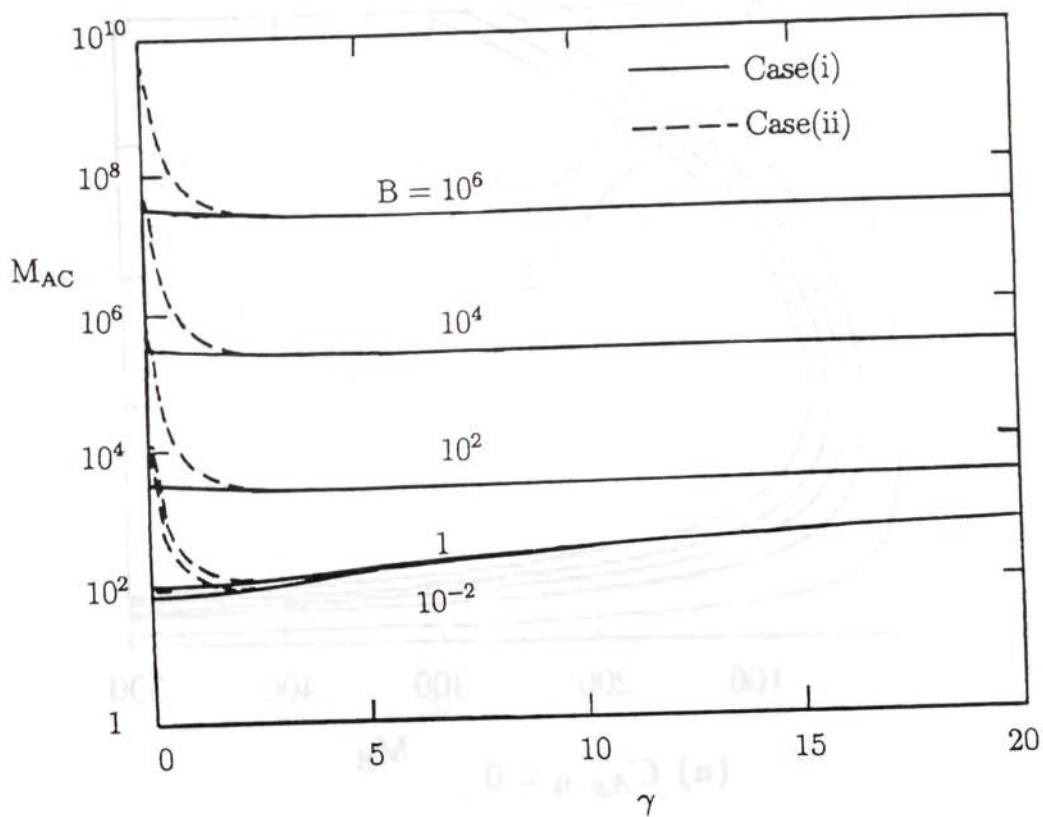


**Fig.2-7** Neutral stability curves of  $M_R$  with effect of  $M_A$  and  $B$  on flat surface ( $S = 0$ ): (a) Case(i) and (b) Case(ii).

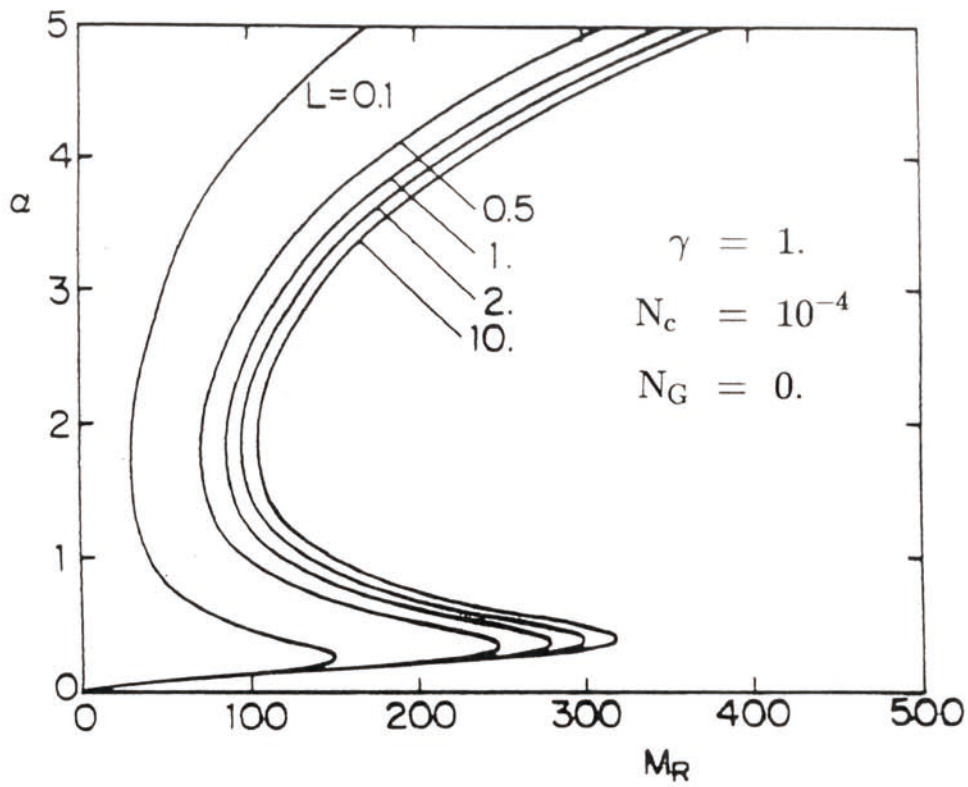




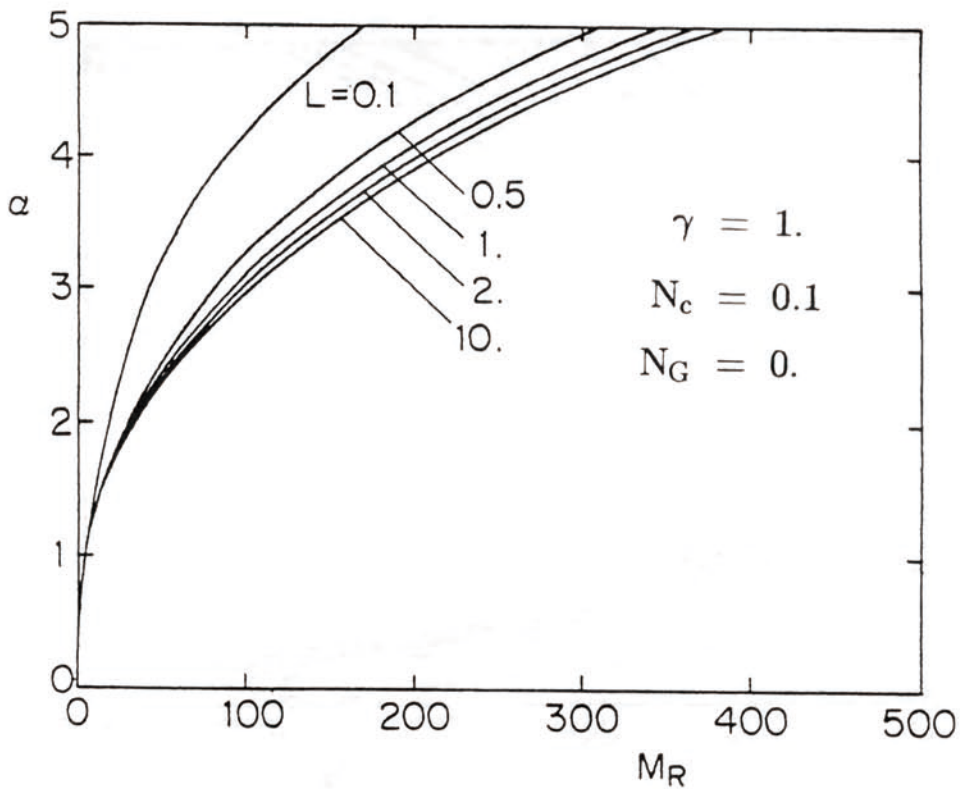
**Fig.2-8** Neutral stability curves of  $M_R$  with effect of  $M_A$  and  $B$  on flat surface ( $S = 0$ ): (a) Case(i) and (b) Case(ii).



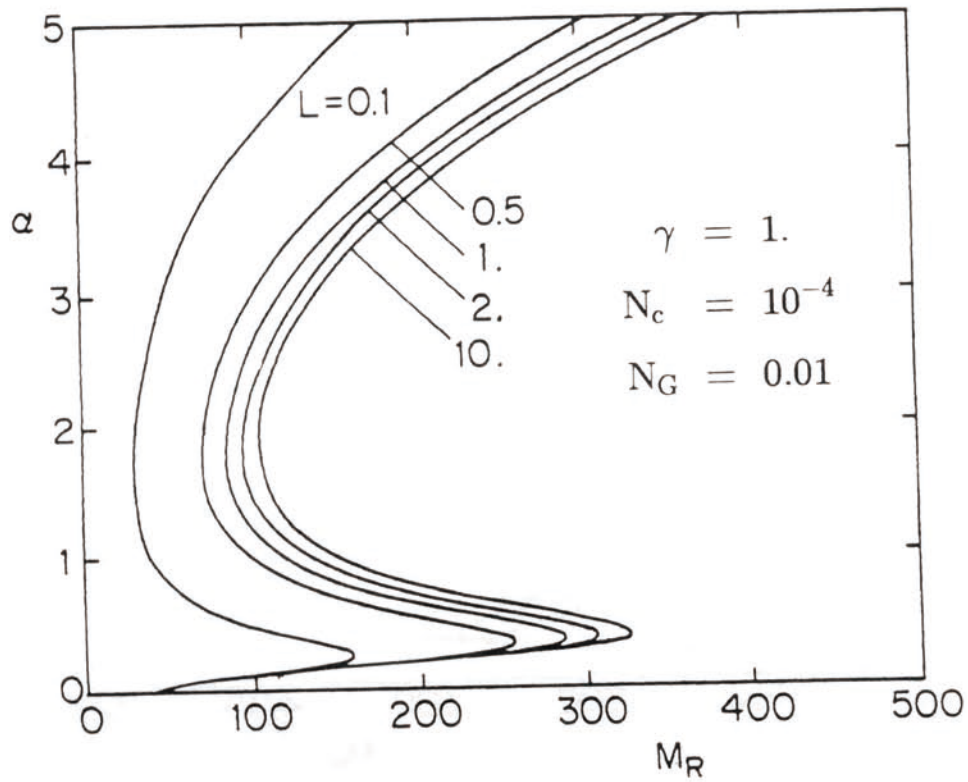
**Fig.2-9** Critical values  $M_{AC}$  and  $\alpha_C$  versus  $\gamma$  for various values of  $B$ : (a)  $M_{AC}$  and (b)  $\alpha_C$ .



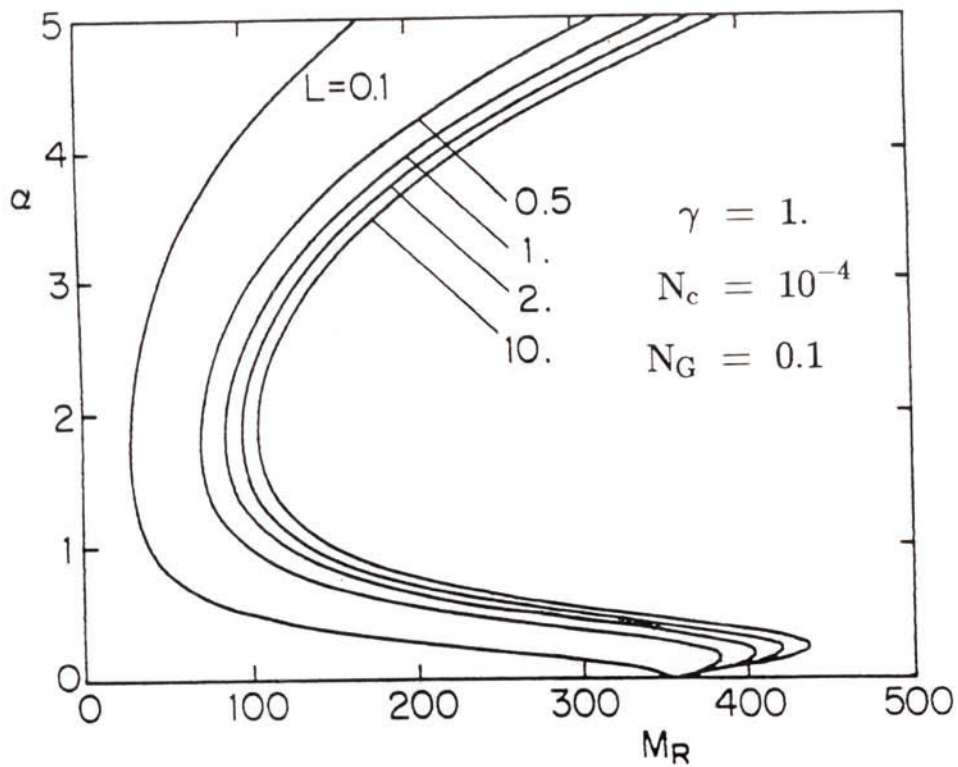
**Fig.2-10** Neutral stability curves of  $M_R$  with effect of surface deformation for  $B \rightarrow \infty$  and Case(i).



**Fig.2-11** Neutral stability curves of  $M_R$  with effect of surface deformation for  $B \rightarrow \infty$  and Case(i).



**Fig.2-12** Neutral stability curves of  $M_R$  with effect of surface deformation for  $B \rightarrow \infty$  and Case(i).



**Fig.2-13** Neutral stability curves of  $M_R$  with effect of surface deformation for  $B \rightarrow \infty$  and Case(i).

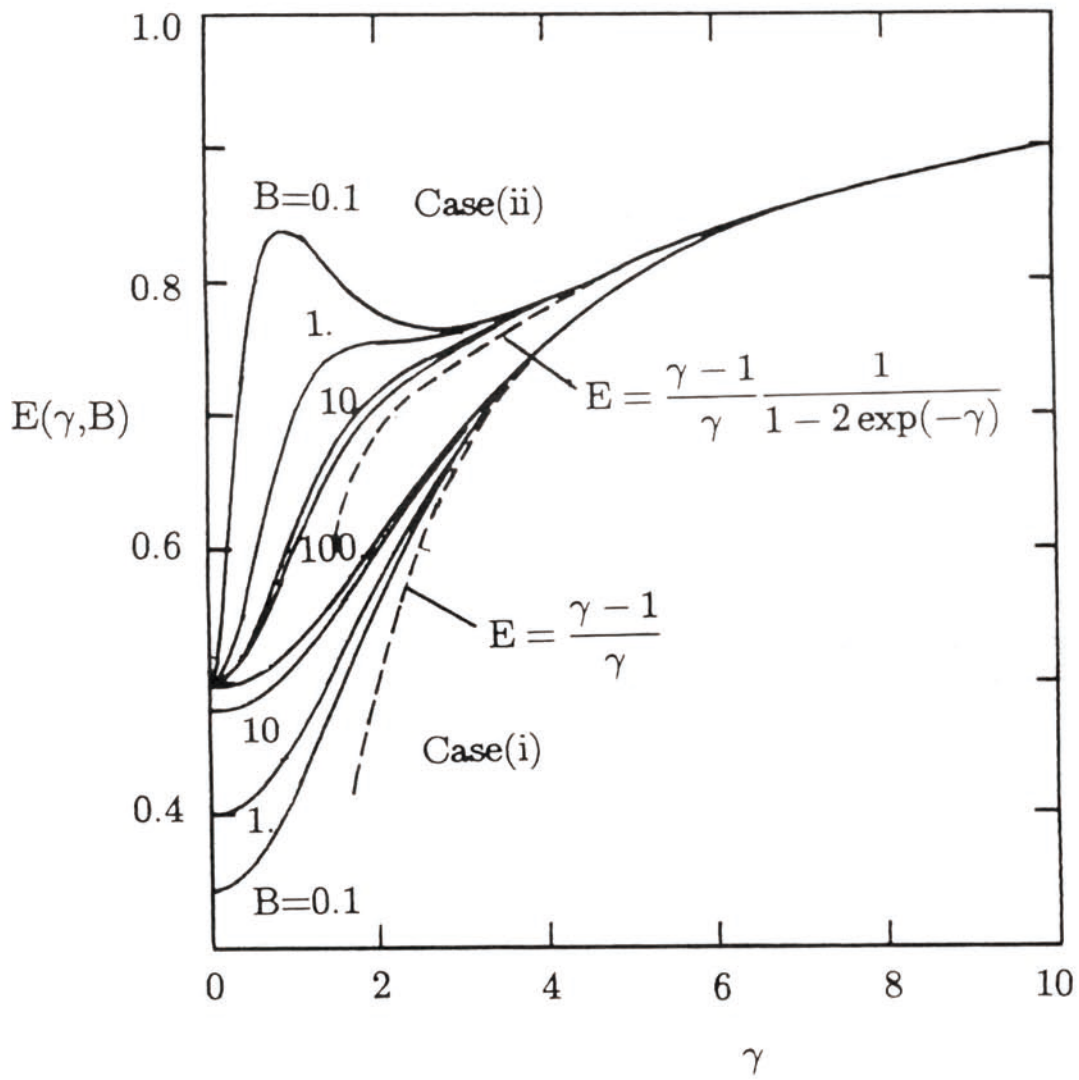


Fig.2-14 Function  $E$  vs.  $\gamma$ .

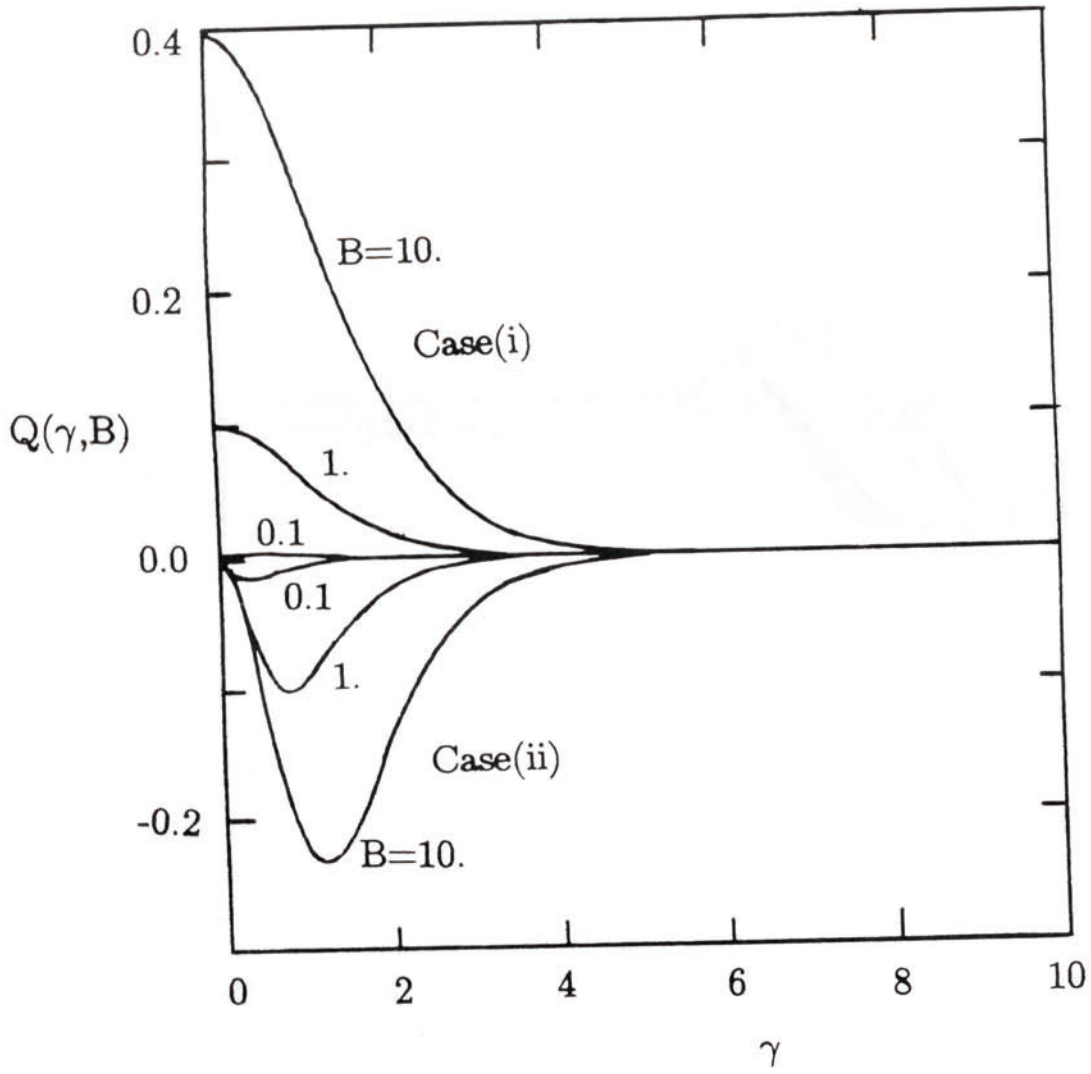
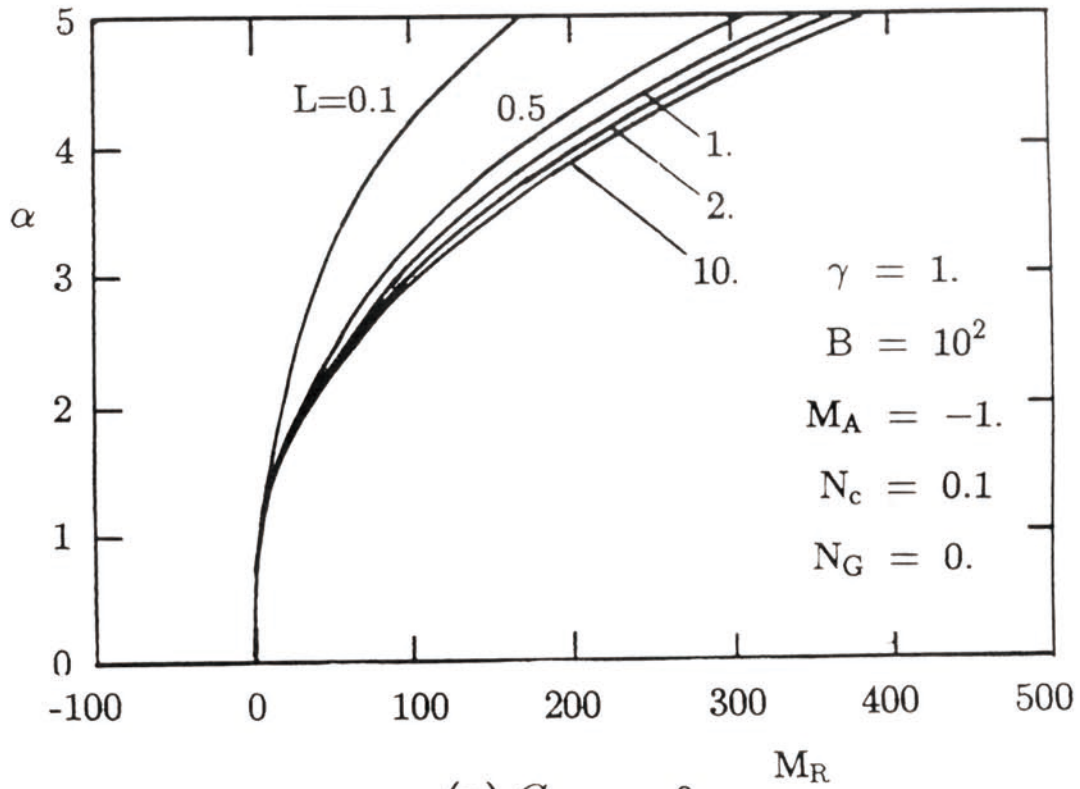
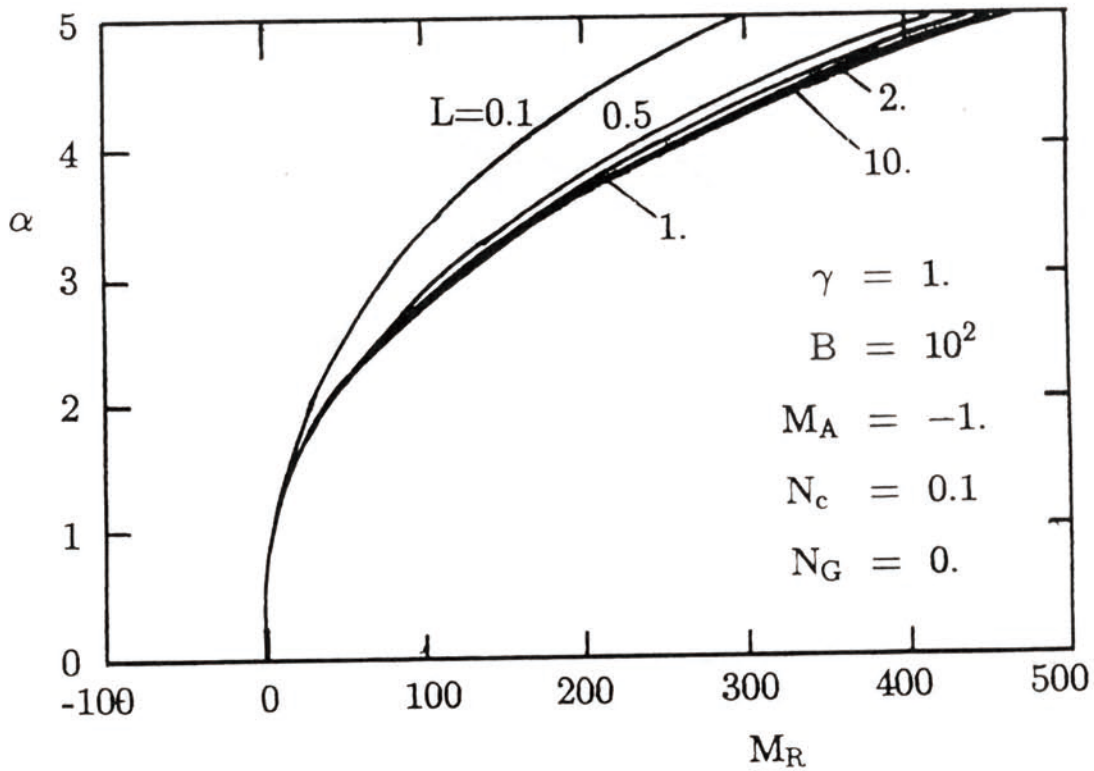


Fig.2-15 Function  $Q$  vs.  $\gamma$ .

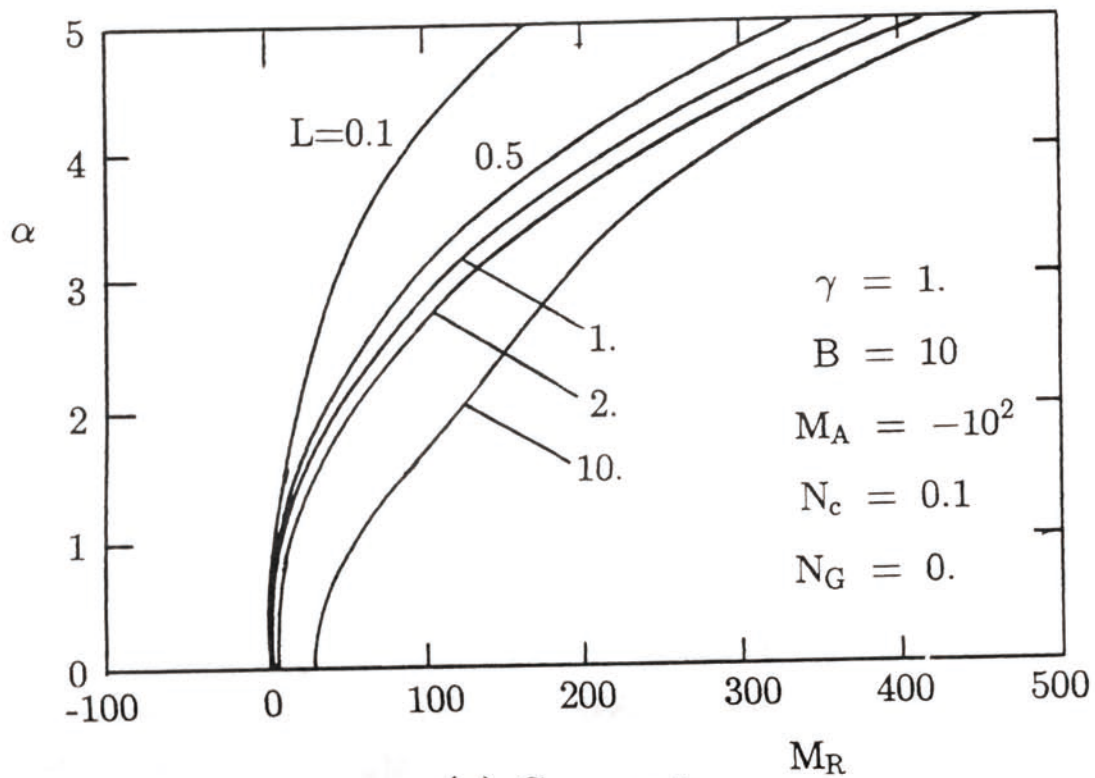


(a)  $C_{A,y=0} = 0$

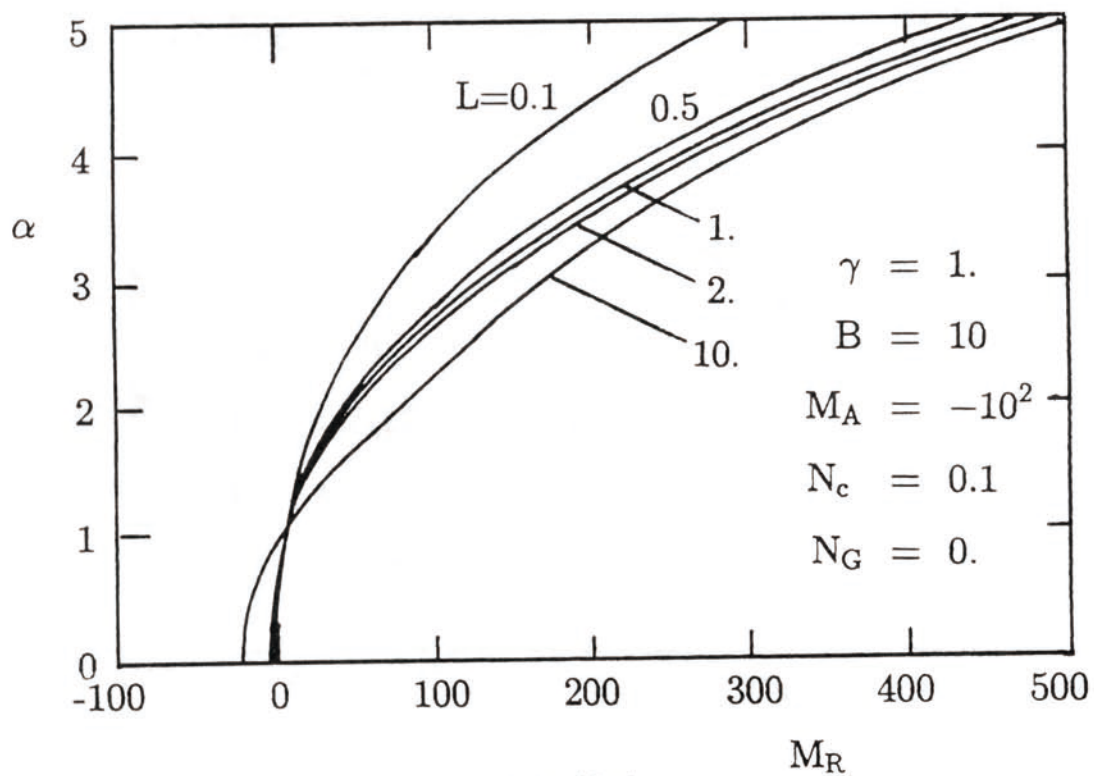


(b)  $(\partial C_A / \partial y)_{y=0} = 0$

**Fig.2-16** Neutral stability curves of  $M_R$  with effects of surface deformation on setting  $N_G = 0$ : (a) Case(i) and (b) Case(ii).



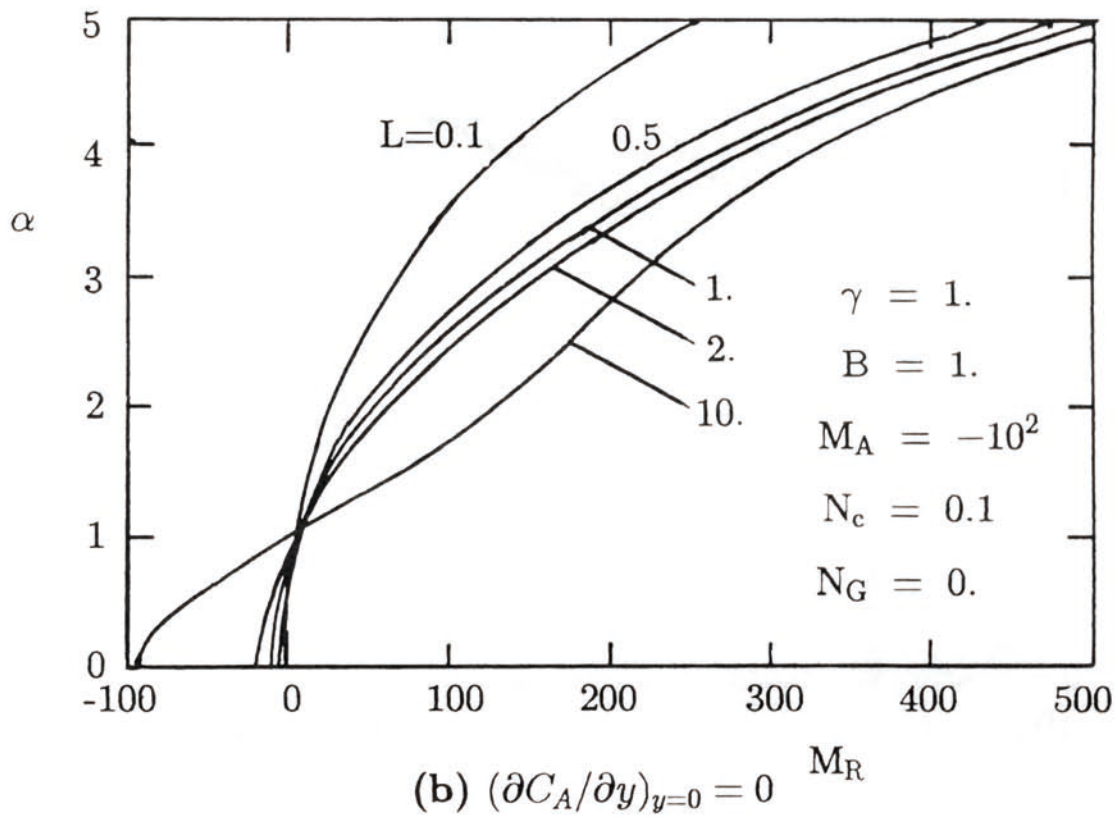
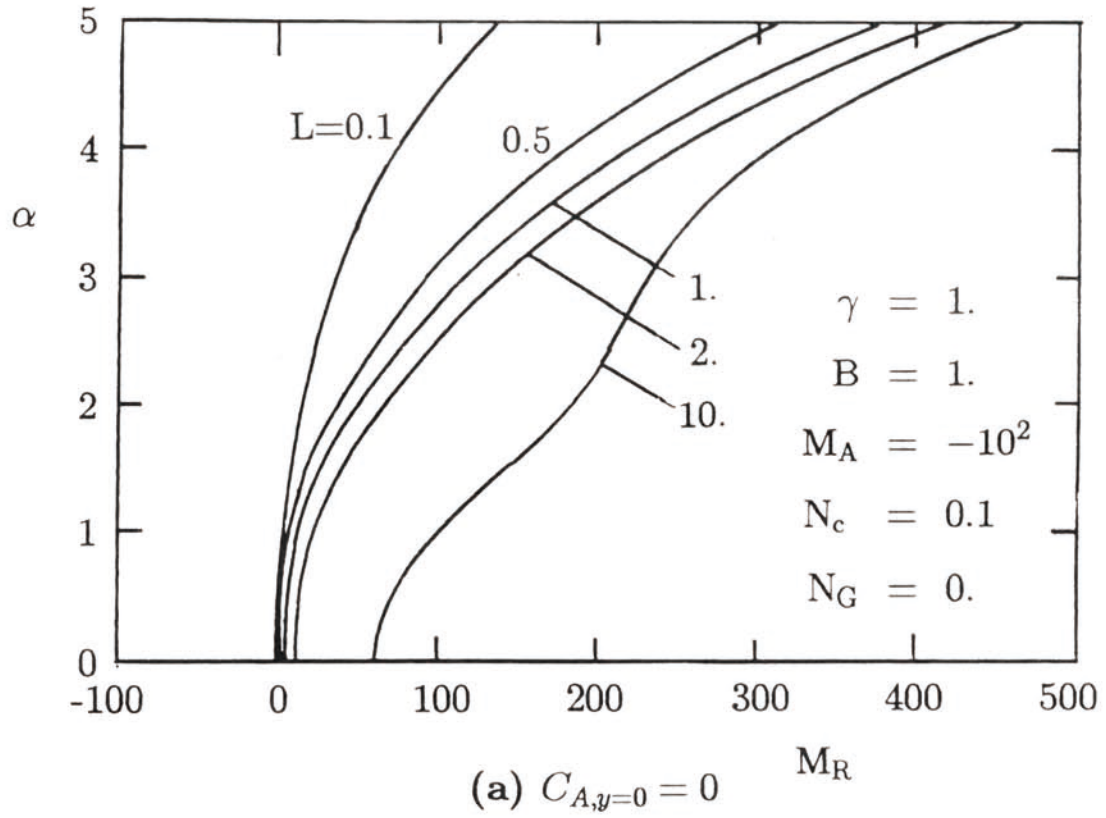
(a)  $C_{A,y=0} = 0$



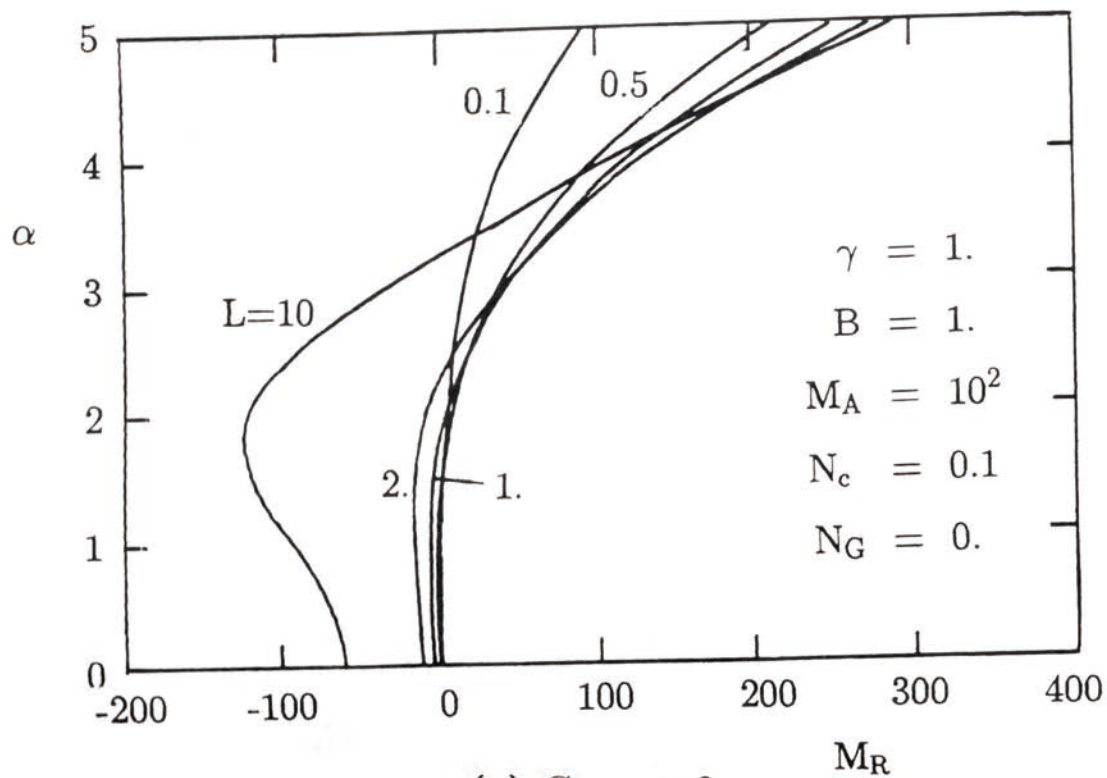
(b)  $(\partial C_A / \partial y)_{y=0} = 0$

Fig.2-17 Neutral stability curves of  $M_R$  with effects of surface deformation on setting  $N_G = 0$ : (a) Case(i) and (b) Case(ii).

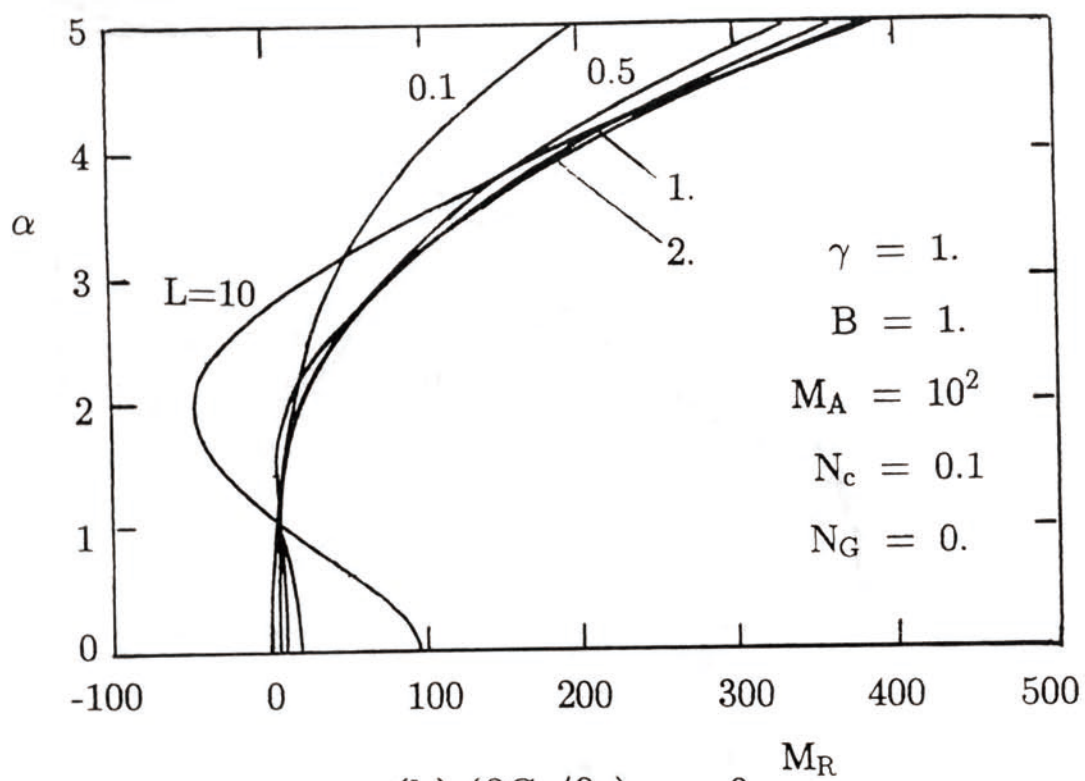




**Fig.2-18** Neutral stability curves of  $M_R$  with effects of surface deformation on setting  $N_G = 0$ : (a) Case(i) and (b) Case(ii).

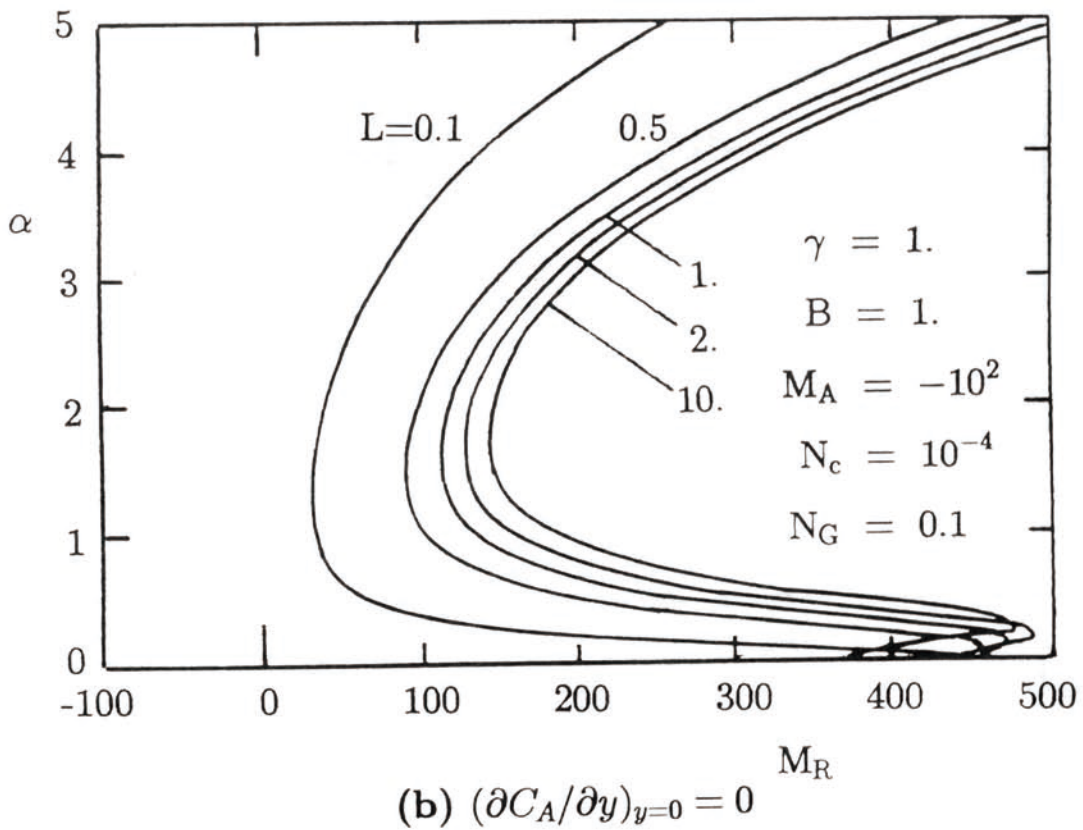
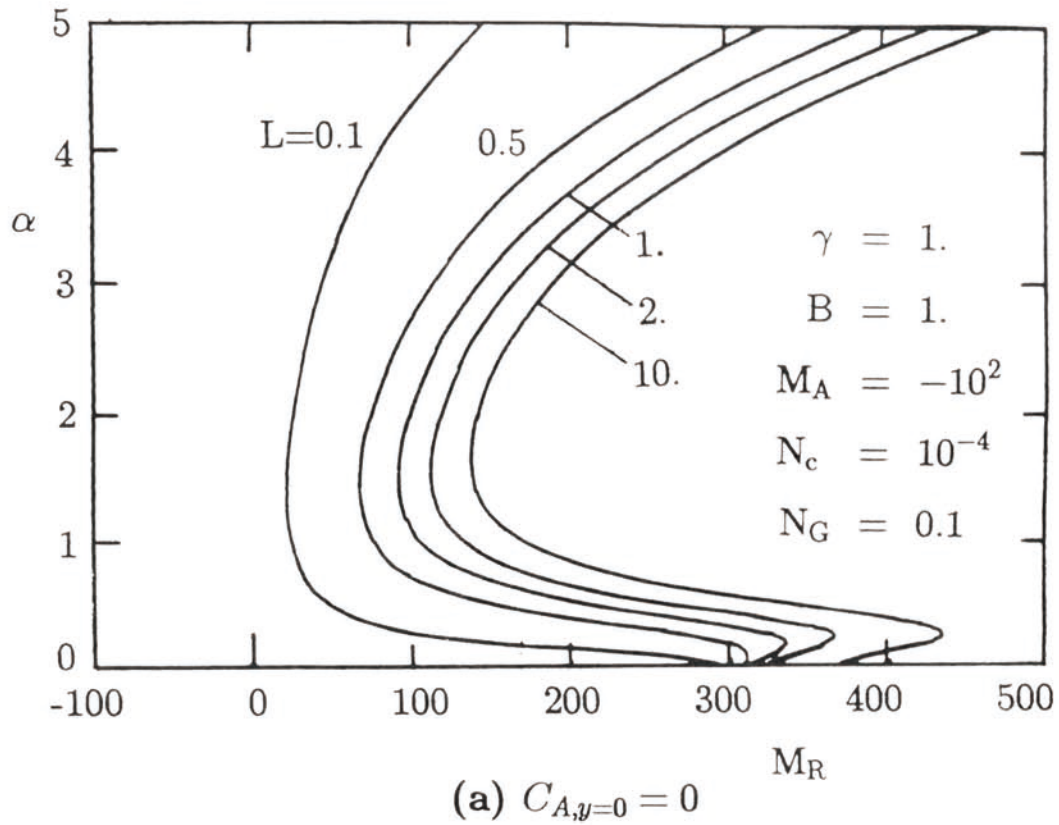


(a)  $C_{A,y=0} = 0$

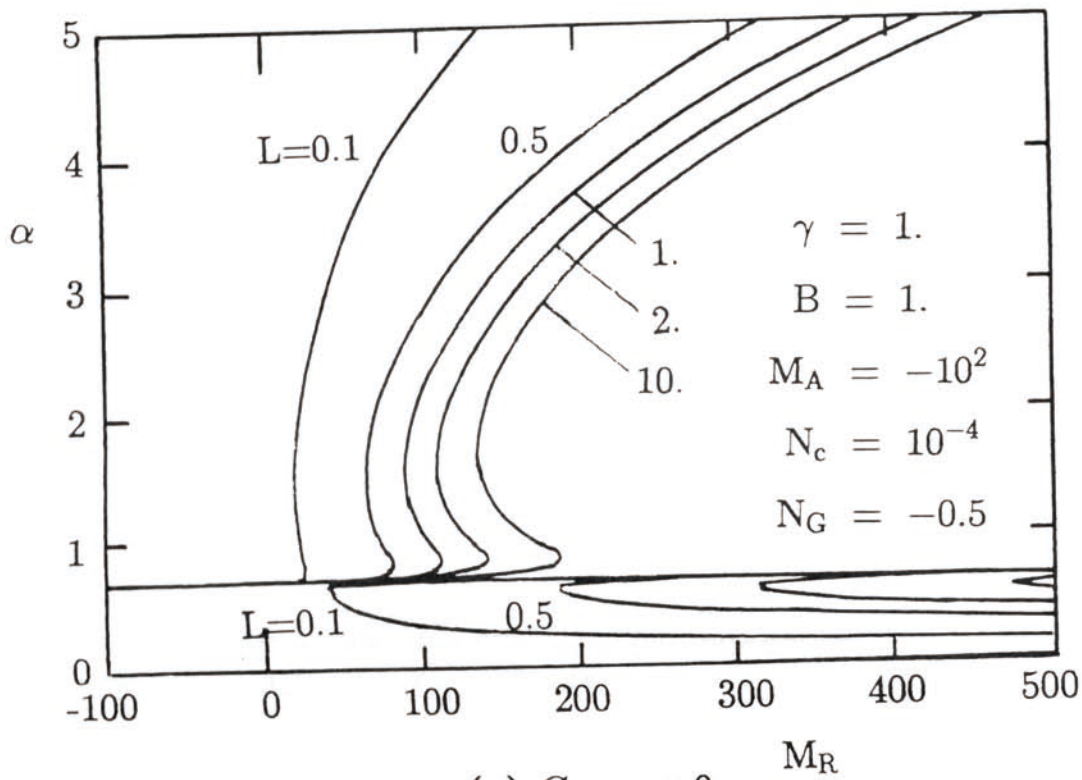


(b)  $(\partial C_A / \partial y)_{y=0} = 0$

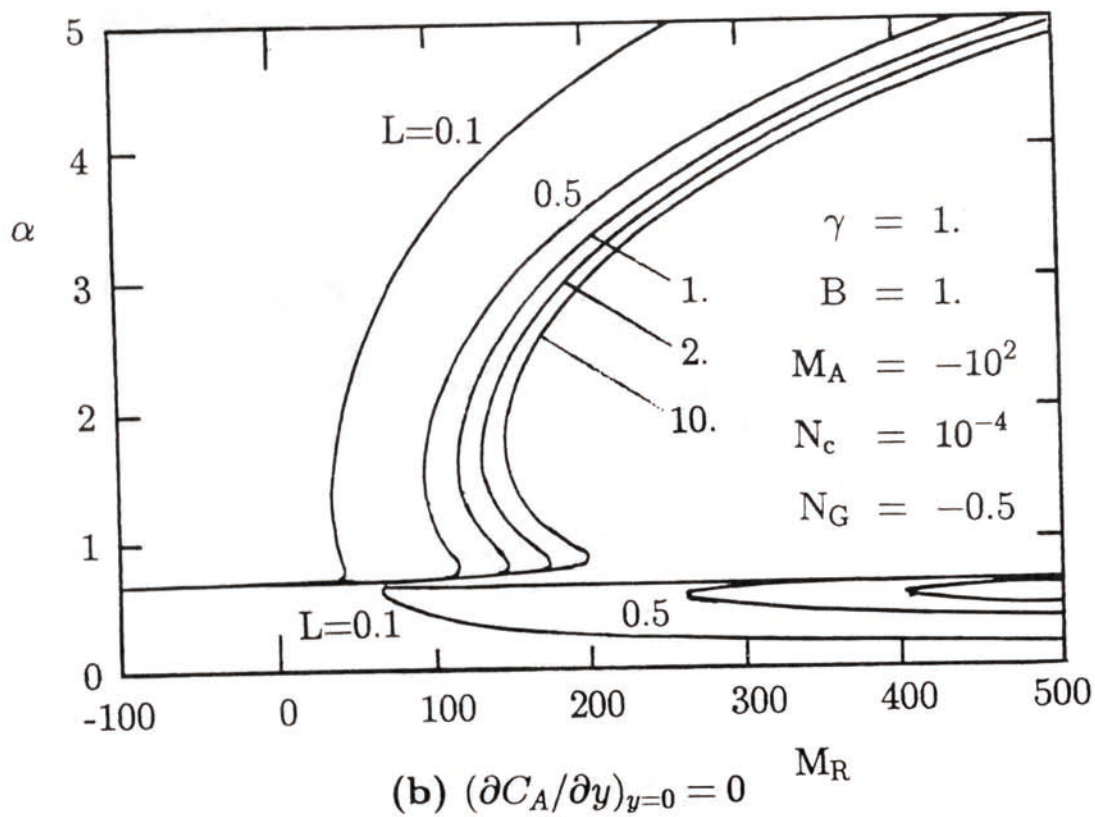
**Fig.2-19** Neutral stability curves of  $M_R$  with effects of surface deformation on setting  $N_G = 0$ : (a) Case(i) and (b) Case(ii).



**Fig.2-20** Neutral stability curves of  $M_R$  with effects of surface deformation on setting  $N_G = 0.1$  : (a) Case(i) and (b) Case(ii).

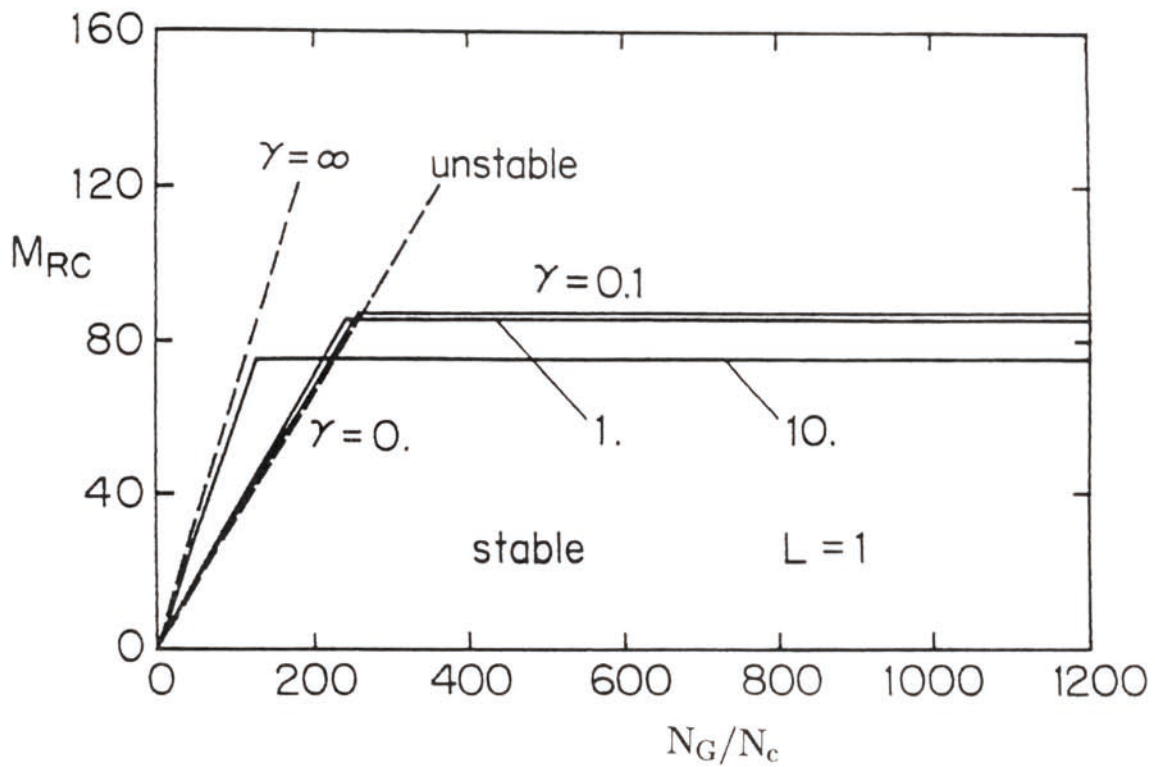


(a)  $C_{A,y=0} = 0$

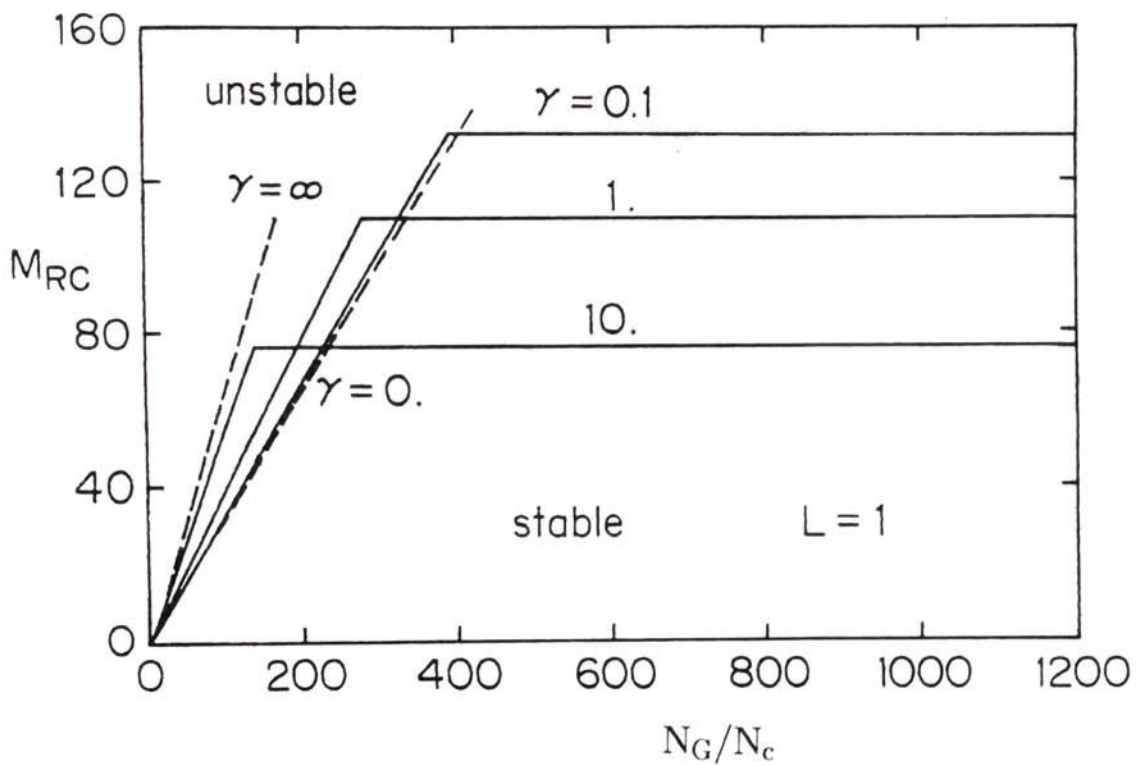


(b)  $(\partial C_A / \partial y)_{y=0} = 0$

**Fig.2-21** Neutral stability curves of  $M_R$  with effects of surface deformation on setting  $N_G = -0.5$ : (a) Case(i) and (b) Case(ii).

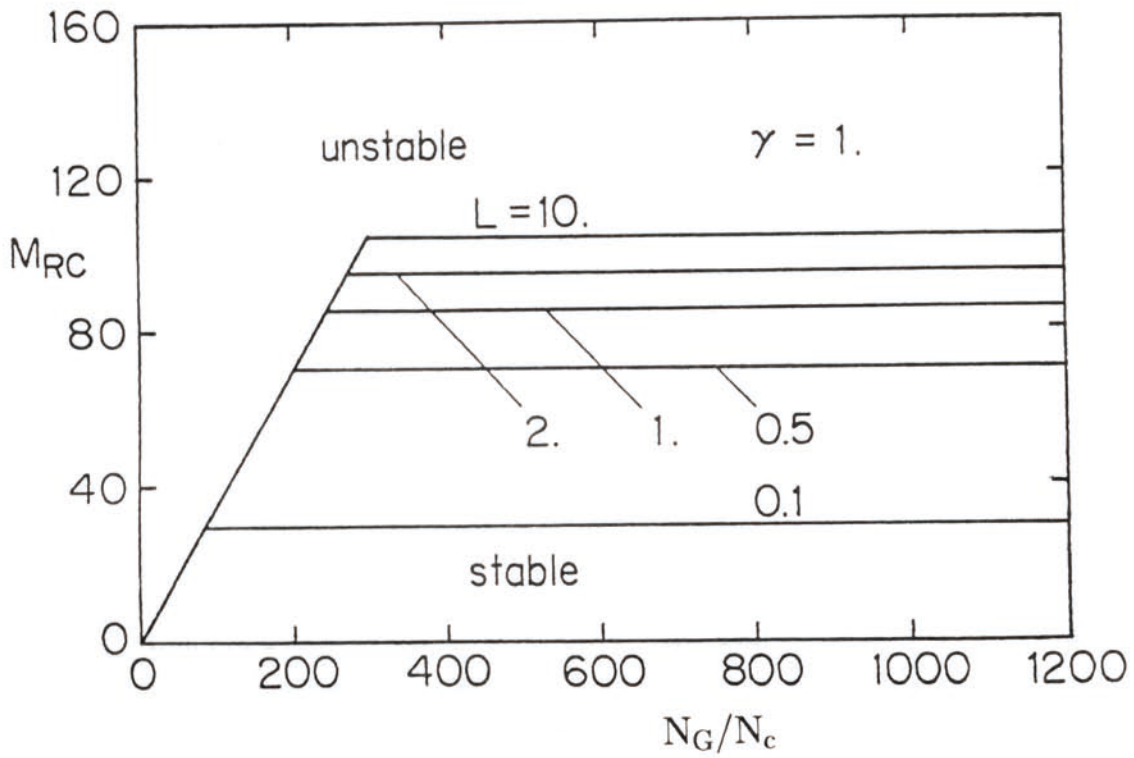


(a)  $C_{A,y=0} = 0$

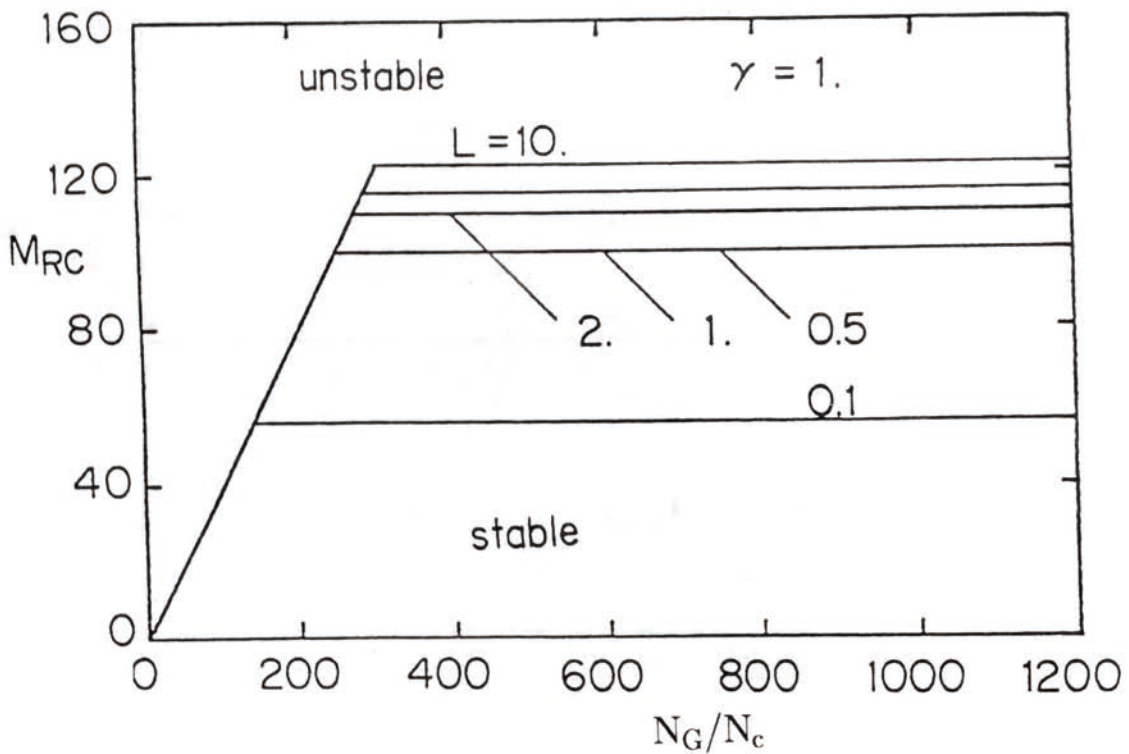


(b)  $(\partial C_A / \partial y)_{y=0} = 0$

**Fig.2-22** Critical Marangoni Number  $M_R$  vs  $N_G/N_c$  for various values of  $\gamma$  on setting  $B = \infty$ : (a) Case(i) and (b) Case(ii).



(a)  $C_{A,y=0} = 0$



(b)  $(\partial C_A / \partial y)_{y=0} = 0$

**Fig.2-23** Critical Marangoni Number  $M_R$  vs  $N_G/N_c$  for various values of  $L$  on setting  $B = \infty$ : (a) Case(i) and (b) Case(ii).

## 記号

$A$  : gas component

$B$  : Biot number

$C_A$  : gas concentration

$C_{A\infty}$  : a constant of gas concentration in gas phase

$C_P$  : product concentration

$C_{P1}$  : equilibrium value of product concentration at free surface

$D_A, D_P$  : diffusivity, respectively, of gas and product

$f$  : function of  $y$ , denoting disturbance of velocity  $v$

$g$  : function of  $y$ , denoting disturbance of  $C_A$

$g$  : acceleration due to gravity

$h$  : function of  $y$ , denoting disturbance of  $C_P$

$L$  : diffusivity ratio

$M_A$  : gas Marangoni number

$M_R$  : product Marangoni number

$m, n$  : stoichiometric factors

$N_c$  : Crispation number

$N_G$  : Weber number

$\mathbf{n}$  : unit normal vector

$P$  : product component

$p$  : pressure

$r$  : reaction parameter

$S$  : amplitude of surface deformation

$S_c$  : Schmidt number

$t$  : time variable

$\mathbf{v} = (u, v, w)$  : velocity vector

$x, y, z$  : variables in Cartesian coordinates

$\alpha$  : wave number

$\gamma$  : reaction parameter

$\delta$  : thinckness of liquid layer

$\mu$  : viscosity of liquid

$\nu$  : kinematic viscosity

$\rho$  : density of liquid

$\sigma$  : surface tension coefficient

$\psi$  : surface deformation



## 参考文献

1. P.L.T. Brian, J.E. Vivian and D.C. Matiatos: Interfacial Turbulence During the Absorption of Carbon Dioxide into Monoethanolamine. *AIChE J.*,13 (1967) 28-36.
2. 疋田晴夫, 浅井悟、日昔吉紀、石原立憲: アンモニアおよび苛性ソーダ水溶液による硫化水素の吸収. 化学工学,32 (1968) 278-285.
3. 疋田晴夫, 浅井悟、日昔吉紀: アンモニア水溶液による炭酸ガスの吸収. 化学工学, 35 (1971) 1021-1028.
4. E.Sada, H. Kumazawa, M.A.Butt and J.E. Lozano: Interfacial Turbulence Accompanying Chemical Absorption. *Can. J. Chem. Eng.*, 55 (1977) 293-296.
5. J.R.A. Pearson: On convection cells induced by surface tension. *J. Fluid Mech.*, 4 (1958) 489-500.
6. C.V. Sternling and L.E. Scriven: Interfacial turbulence: hydrodynamics instability and the Marangoni effect. *AIChE J.*, 5 (1959) 514-523.
7. E. Ruckenstein and C. Berbente: The occurrence of interfacial turbulence in the case of diffusion accompanied by chemical reaction. *Chem. Eng. Sci.*, 29 (1964) 329-346.
8. Y.T. Shah and A.Z. Szeri: Marangoni Instability in Non-Isothermal First Order Gas-Liquid Reactions-Evaluations of Cl<sub>2</sub>-Toluene and CO<sub>2</sub>-Sodium Hydroxide Systems. *Chem. Eng. Sci.*, 29 (1974) 2219-2228.
9. 今石宣之, 藤縄勝彦: 反応吸収時の界面攪乱の光学的観察. 化学工学論文集, 4 (1978) 484-489.
10. 今石宣之, 藤縄勝彦: 反応吸収時の Marangoni 不安定性. 化学工学論文集, 4 (1978) 490-495.

11. L.E. Scriven and C.V. Sternling: On cellular convection driven by surface-tension gradients: effects of mean surface tension and surface viscosity. *J. Fluid Mech.*, 19 (1964) 321-340.
12. K.A. Smith: On convective instability induced by surface-tension gradients. *J. Fluid Mech.*, 24 (1966) 401-414.
13. R.W. Zeren and W.C. Reynolds: Thermal instabilities in two-fluid horizontal layers. *J. Fluid Mech.*, 53 (1972) 305-327.
14. D.A.Nield: Surface tension and buoyancy effects in cellular convection. *J. Fluid Mech.*, 19 (1964) 341-352.
15. M.Takashima: Surface Tension Driven Instability in a Horizontal Liquid layer with a Deformable Free Surface. I Stationary Convection. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 50 (1981) 2745-2750.
16. M.Takashima: Surface Tension Driven Instability in a Horizontal Liquid layer with a Deformable Free Surface. II Overstability. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 50 (1981) 2751-2756.
17. 坂田光雄、舟田敏雄：反応吸収系における振動型 Marangoni 不安定について. 和歌山高専研究紀要、16 (1981) 17-21.

## 第3章

### 気泡塔内流れの遷移について

## 第3章 気泡塔内流れの遷移について

### 3.1 緒言

気泡塔は、気液を直接接触させ気液間の物質移動および伝熱を行う目的で液中に気泡を吹き込む化学装置である。気泡塔は古くから醗酵槽、反応装置、廃水処理装置あるいは液攪拌などに使われている。気泡塔における流動様式は、低ガス流速における均一気泡流動域と高ガス流速での乱流循環流動域に大別される<sup>12)</sup>。従来、高ガス流速での状態は合一大気泡上昇流動域<sup>9,10)</sup>とか(気泡)攪乱流動域<sup>4,6)</sup>とも呼ばれている。気液混相は乱流状態にあり、この流れを平均流と変動流とに分けて考えると、液については平均流としての大きいスケールの循環流の存在が観察されており<sup>1,3)</sup>、この意味で本報告では乱流循環流動域と呼ぶことにする。

均一気泡流動域はほぼ均一な直径の気泡が一様に液中を上昇しており、液の流れは隣接気泡の間を一様に降下し、半径方向の速度分布を持たない流動状態である。乱流循環流動域はガス流速の増大に伴って気泡の合一や流れの不安定が起こることによって大気泡を生成し、これらが主に塔中央部を上昇するため時間平均値としての液循環流が起こる。均一気泡流動域から遷移域を経て乱流循環流動域への流動状態の遷移<sup>1~3,11)</sup>は、実用上しばしば用いられるガス流速域にあり、かつどこでこの遷移が起こるのかは、ガス流速・ガスの分散方法などによって大きく影響される。二つの流動域は、流れの機構が著しく異なっていることを考えると、この遷移条件を明確にしておく必要があると考える。

本研究は、気泡分散に多孔板を用いた気泡塔における水-空気系に対して、気液混相の流動状態の観察および平均ガスホールドアップが空塔ガス流速にどのように依存

するかに基づいて、均一気泡流動域から乱流循環流動域への流動状態の遷移について考察した。次節では、実験装置および方法を概説し、3.3節の結果および考察において流動状態の観察と空塔ガス流速に対する平均ガスホールドアップの変化から流動状態の判別方法を提案する。多くの既報データに対して提案した判別方法を適用して均一気泡流から遷移域および遷移域から乱流循環流動域へ遷移する臨界ガス流速を求めた。さらに、臨界ガス流速に対する塔径および分散板の諸条件の効果を検討した。

## 3.2 実験装置および方法

多くの実験報告がなされているため、本実験は、均一気泡分散時の気泡塔内流れの基本的な流れの把握と空塔ガス流速に対する平均ガスホールドアップ分布変化を確認することを目的とする。

実験装置の概略を Fig.3-1(a) に示す。内径  $D_T = 8\text{cm}$  の透明アクリル樹脂製の塔を用いて、ガスとして空気を使いコンプレッサーにより供給する。ニードル弁によりガス流量は調節され、オリフィス計を用いてガス流量を測定した。液として水道水およびイオン交換水を用い、静止液層高  $L_0$  は  $150\text{cm}$  とした場合の液流速の無い液回分時について実験した。

気泡分散板は真鍮板（厚さ  $1\text{mm}$ ）を用い、孔は塔断面に均一に分布するように正三角形配置（ピッチ  $p = 1.6\text{cm}$ ）とし、孔径  $d$  は  $0.05\text{cm}$  および  $0.2\text{cm}$  の2種類を用いた。この孔径は、従来の研究報告から孔径が約  $d = 0.1\text{cm}$  を境に大きい場合と小さい場合ではガスホールドアップ特性が異なるとの指摘から選択した。尚、孔数  $n$  は  $19$  となる (Fig.3-1(b))。

空塔ガス流速  $V_G$  を変えたときのそれぞれのガスホールドアップ  $\varepsilon_G$  は塔全体の平均値のみを求めたため、通気時液層高  $L$  を測定し、

$$\varepsilon_G = \frac{L - L_0}{L} \quad (3.1)$$

によって算出した。また、空塔ガス流速  $V_G$  は、ガス流量  $Q$  から  $4Q/(\pi D_T^2)$  より算出される。

## 3.3 結果および考察

### 3.3.1 流動状態とガスホールドアップの変化

鉛直管での気液2相上昇流においては、液流速を一定に保ち、ガス流速を増加させると流動状態は、気泡流、スラグ流、フロス流、環状流の順に変化する<sup>14)</sup>。本実験において流動状態を観察すると、分散板の孔径 $d=0.05\text{cm}$ とした場合、低ガス流速では、気泡の合一・分裂は起こらず、生成した気泡が一様に液中を上昇する均一気泡流動域であった。空塔ガス流速 $V_G$ を徐々に増加させると、あるガス流速に達すると一部の気泡群にらせん状の速い速度で吹き抜ける攪乱が観察されるようになる(遷移域)。さらに $V_G$ を増すと、気液混相は白濁し、大気泡および塔径程度の不規則な渦が観察される(乱流循環流動域)。これらの流動状態を模式図として表すとFig.3-2のようになる。ただし、乱流循環流動域については、時間平均したときの気泡流れのイメージ図となっている。

分散板の孔径 $d$ が $0.05\text{cm}$ と $0.2\text{cm}$ に対するガスホールドアップ $\epsilon_G$ の空塔ガス流速 $V_G$ による変化をFig.3-3に示す。 $d$ が $0.05\text{cm}$ の場合、低ガス流速における $\epsilon_G$ は、水道水とイオン交換水に差はなく、 $V_G$ とともにほぼ直線的に増加する。この時の流動状態は、均一気泡流動域である。水道水の場合は $V_G$ が約 $3.5\text{cm/s}$ あたりから一部の気泡群にらせん状の速い速度で吹き抜ける攪乱が観察され、 $V_G$ の増加とともに急速に塔全体に攪乱が伝達され、 $\epsilon_G$ の低下が起こる。さらに $V_G$ を増すと、気液混相は白濁し、乱流循環流動域となる。イオン交換水の場合は、水道水と同じく $V_G=3.5\text{cm/s}$ あたりから塔頂部付近に観察された攪乱が $V_G$ の増加とともに徐々に塔全体へ伝達されるため、 $\epsilon_G$ の変化も水道水に比べなだらかである。水道水とイオン交換水とのこの差は、液物性(表面張力・粘度・不純物・イオンなど)による効果<sup>4,9)</sup>と考えられる。一方、孔径 $d=0.2\text{cm}$ の場合、 $V_G$ がおよそ $4\text{cm/s}$ 以下では分散板の全孔から発泡せず、また発生する気泡径も不均一である。このため、気泡群と液は共に不規則な偏流を起こす。さらに $V_G$ を増加させると全孔から発泡するが、流動状態は塔全体で攪乱状態であった。これは乱流循環流動域に相当する流れであり、 $\epsilon_G$ の変化は極大値を持たず $V_G$ の増加とともになだらかに増加し、水の種類にはあまり依存しない。

従来の研究においてもガスホールドアップ $\varepsilon_G$ は、空塔ガス流速 $V_G$ 、分散板の条件 $(d, p, n)$ 、塔径 $D_T$ および液物性によって変化することが知られている<sup>2,4,9,10,14</sup>。しかし、 $d$ が0.2cm以上になると $\varepsilon_G$ は、分散板の条件にはほぼ無関係となり、主に $V_G$ と $D_T$ のみの関数として相関される<sup>5,6,9,13</sup>。この状況下の $\varepsilon_G$ は、加藤ら<sup>5</sup>)によると次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\varepsilon_G &= \frac{V_G}{31 + \beta V_G^{0.8}(1 - e^\gamma)} \\ \beta &= 4.5 - 3.5e^{-0.064D_T^{1.3}}, \\ \gamma &= \frac{-0.18V_G^{1.8}}{\beta}\end{aligned}\tag{3.2}$$

Eq.(3.2)は、Fig.3-3に示した孔径 $d = 0.2\text{cm}$ のすべての実測値と $d = 0.05\text{cm}$ の乱流循環流動域に対する実測値によく一致している。さらに、Eq.(3.2)を $D_T$ の幅広い条件の実測値<sup>2,4,9,10,13</sup>と比較したところ良好に適合することがわかった。それゆえ、以下では乱流循環流動域における $\varepsilon_G$ としてEq.(3.2)による計算値を用いることとした。

### 3.3.2 流れの判別

河越ら<sup>6</sup>)は、気泡塔型気液反応装置内の気泡流動領域と気泡攪乱流動域とを区別するのに、それぞれの領域で $\varepsilon_G$ と $V_G$ 、あるいはそれらの逆数が直線関係にあるとして、これらの関係から偏倚し始める $V_G$ を限界ガス流速とした。しかし、分散板の構造の効果については、記述されていない。

ここでは、塔径に比べ液層高が十分大きい場合の水-空気系について報告された $\varepsilon_G$ の $V_G$ による変化から、 $D_T, d, n, p$ などが流動特性にどのように影響するかについて次のような整理を試みた。

前節に述べたように0.2cm以上の孔径を用いると、 $\varepsilon_G$ と $V_G$ の關係に分散板条件の影響が現れない。また流動状態は、たとえ低 $V_G$ であっても不均一な気泡発生のため偏流があることから、すべての $V_G$ に対して乱流循環流動であると考えられる。従って、この流動状態下の $\varepsilon_G$ を基準のガスホールドアップ $\varepsilon_G^*$ と考え、Eq.(3.2)より求められるものとする。



次に、 $\varepsilon_G/\varepsilon_G^*$ を縦軸に、 $V_G$ を横軸にとってデータをプロットした例をFig.3-4に示す。 $\varepsilon_G^*$ からのずれは、ほぼ2本の折線によって近似できる。このことと流動状態の観察と合わせ考えると、均一気泡流動域は、 $\varepsilon_G/\varepsilon_G^*$ が $V_G$ とともに直線的に増加している領域と考えられるので、 $\varepsilon_G/\varepsilon_G^*$ が $V_G$ の増加と共に減少し始める点を第1の臨界ガス流速 $V_{c1}$ と定義した。一方、乱流循環流動域では、 $\varepsilon_G^*$ の定義から $\varepsilon_G$ が $\varepsilon_G^*$ にほぼ一致する領域と考えられ、 $V_G$ とともに $\varepsilon_G/\varepsilon_G^*$ が減少することを示す直線と $\varepsilon_G/\varepsilon_G^* = 1$ の交点を第2の臨界ガス流速 $V_{c2}$ とした。 $V_{c1}$ と $V_{c2}$ の間は遷移領域に相当するものと考えられる。なお、図から均一気泡流動域が存在するのは $d$ が0.1cmより小さい場合であり、0.1cmでは明確な均一気泡流動域が見られず、 $V_G$ が小さいところでも遷移領域の性質を示している。

これまでに報告されている液回分時のデータを用いて、上記の作図を行って得られた $V_{c1}$ 、 $V_{c2}$ を各実験条件とともに整理した結果をTable 3-1に示す。 $d$ が0.1cmより小さい場合でも $n$ が10以下では均一気泡流動域は現れないことがわかる。この事は、塔径 $D_T$ に対して均一気泡分散条件としての孔数 $n$ の最少数が予想される。臨界流速 $V_c$  ( $V_{c1}$ と $V_{c2}$ の両者)は、 $d$ が小さいほど、また $n$ が大きいほど大きな値となっている。山下ら<sup>13)</sup>は、 $\varepsilon_G^*$ に対する孔ピッチ $p$ の効果を調べるため、分散板の孔間隔を種々に変えた実験を行っているが、この場合、 $d$ と $n$ を固定し $p$ を小さくすると、開孔が塔断面の中心に集まることになる。この時の $V_c$ は $p$ に比例しており、これは、 $p$ が小さくなると隣接発生気泡間の距離が縮まって、塔径に対し単一ノズルに近い発生状態になることが原因と考えられる。

均一な気泡流が乱流循環流動域へ遷移する不安定化の機構としては、気液混相流内での攪乱の増大あるいは減少を起こす原因を考察する必要がある。しかし、気泡群における気泡径分布、気泡形状、伴流、蓄気室からの圧力変動の伝播、気泡相互作用などが複雑に関係しているため十分な知見は得られていない。一方、 $\varepsilon_G$ と $V_G$ の関係は液層高の影響を受けない事<sup>13)</sup>を考えると、分散板ないしはその直上における流動状態が $V_c$ を決定する上での主な原因と考えられる。つまり、 $V_c$ は、孔から連続発生した気泡がその直上で不安定な流れになるとか、合一するか、あるいは隣接発生気泡の合一などに左右されていると考えられる。van Krevelenら<sup>7)</sup>は、単一ノズルからの気泡形成がガス流量が小さい時にはseparate bubbles (気泡径がガス流量に無関係)に、また、流

量がある値を超えると chainlike bubbles (孔径に無関係) に分類可能であるとして、その臨界流量について報告している。そこで、この臨界流量を多孔板に拡張し、孔 1 個あたりの流量をとって separate bubbles から chainlike bubbles へ遷移する臨界ガス流速を算出すると、ここで得られた  $V_{c1}$  の 10% 以下の程度となり、単一ノズルからの気泡形成状態の変化が  $V_{c1}$  を決定する原因とはなっていないことがわかる。そこで、隣接発生氣泡の相互干渉に関係すると考えられる因子 ( $p/d$ ) を取り、また孔 1 個あたりを通過するガス流量を決める因子として ( $D_T^2/n$ ) を考え、この両者によって  $V_c$  が決定されるとして装置条件だけから構成される因子 ( $np/dD_T^2$ ) を考える。この因子は、山下ら<sup>13)</sup>が  $\varepsilon_G$  の極大値の相関に用いたものと同一である。

Fig.3-5 に  $V_c$  を ( $np/dD_T^2$ ) に対してプロットした結果を示す。この図は、Table 3-1 に示した分散板の孔が三角形配置された場合のデータについてである。均一気泡流動域から遷移域への臨界ガス流速  $V_{c1}$  は、おおよそ傾き 1/2 の直線で、遷移域から乱流循環流動域への臨界ガス流速  $V_{c2}$  は傾き 1/3 の直線で近似される。本実験の水道水の場合 ( $np/dD_T^2 = 9.5\text{cm}^{-2}$ ,  $V_{c2} = 5.5\text{cm/s}$ ) を除くと、 $V_{c2}$  は比較的よく相関されているのに対し、 $V_{c1}$  は一定の傾向を示してはいるがばらつきが大きい。上記水道水の場合は、液物性によって  $V_{c2}$  に相当する流動状態の遷移条件が早められた結果と考えられる。また、 $V_{c1}$  におけるばらつきは、水の性質と操作条件によって、この遷移条件がかなり変動するためと考えられる。この図より、 $V_G$  が第 1 の臨界ガス流速  $V_{c1}$  以下では均一気泡流動域であり、第 2 の臨界速度  $V_{c2}$  を越えると、多孔板の孔径が小さくても乱流循環流動域に入ることがわかる。

### 3.4 結論

気泡塔における流動状態の流れの観察と空塔ガス流速に対するガスホールドアップ特性を調べ、均一気泡流動域と乱流循環流動域の遷移条件を推定する方法を提案した。その方法および遷移条件は、以下のとおりである。

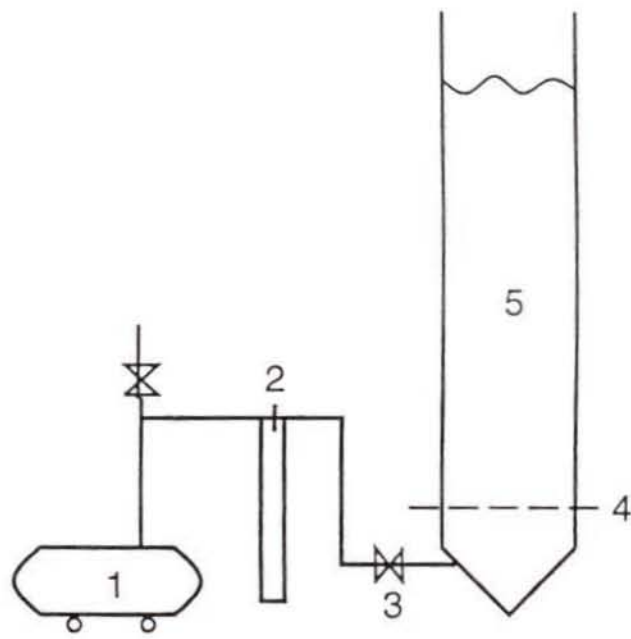
(1) ガスホールドアップ $\epsilon_G$ と空塔ガス流速 $V_G$ の関係は、孔径が $d \geq 0.2\text{cm}$ では分散板条件に無関係になることおよび低ガス流速では一部の孔からの気泡発生のため偏流を持つため循環流動域と考えられること、また高 $V_G$ ではすべての孔径に対して $\epsilon_G$ が同じとみなせることから、この状態を基準のガスホールドアップ $\epsilon_G^*$ と考えた。この $\epsilon_G^*$ に対する水-空気系の $\epsilon_G$ の比 $\epsilon_G/\epsilon_G^*$ を図示すると折線特性を示す。この折れ線特性は、気泡塔内の流動状態と対応しており、従来報告されている多くのデータに対して、この作図方法を適用して第1臨界ガス流速 $V_{c1}$ （均一気泡流動域から遷移域へ）および第2臨界ガス流速 $V_{c2}$ （遷移域から乱流循環流動域へ）を見いだした。

(2) 求めた臨界流速 $V_c$ は、装置条件だけから構成される因子 $(np/dD_T^2)$ の関数として、

$$V_{c1} \propto (np/dD_T^2)^{1/2}, \quad V_{c2} \propto (np/dD_T^2)^{1/3} \quad (3.3)$$

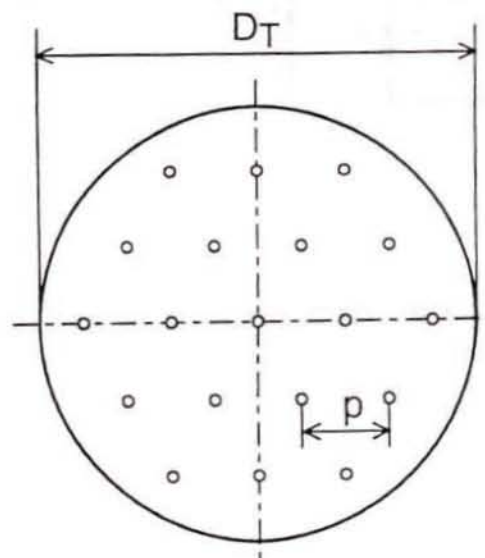
と近似されることがわかった。

この結果は、気泡塔設計に重要な知見を与えると考える。ただし、液物性や液の汚れ等の効果については今後の課題として残されている。



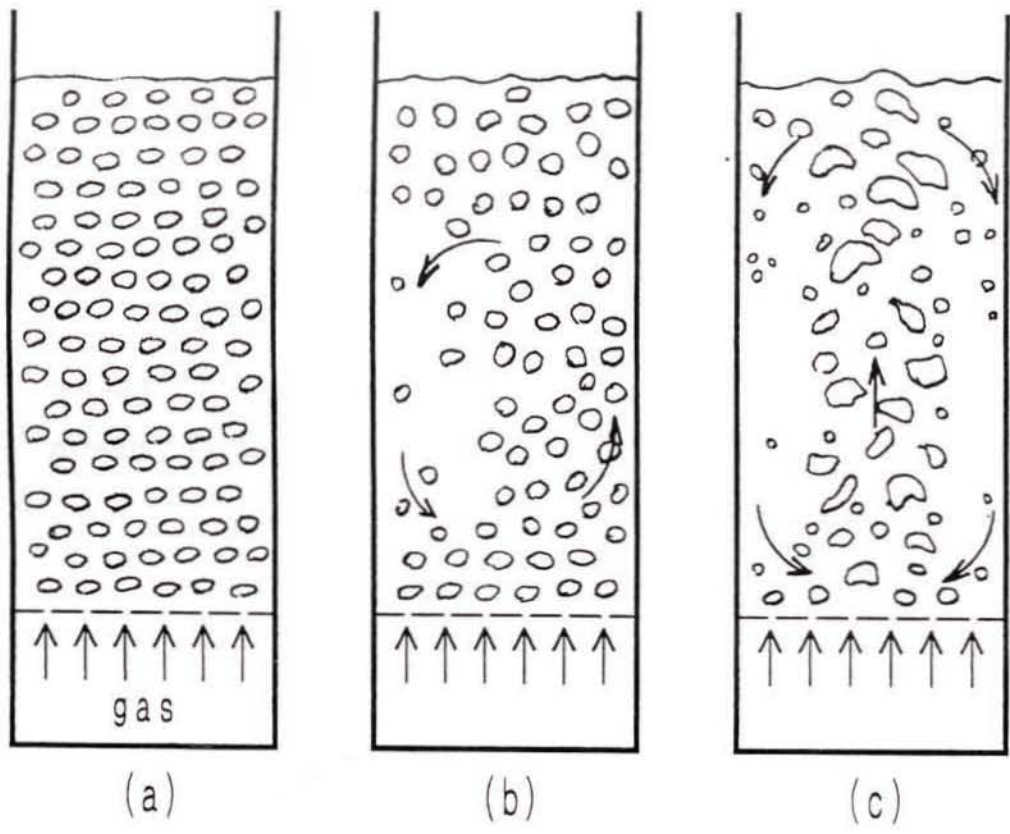
- 1: compressor                      4: gas distributor  
 2: orifice manometer            5: bubble column  
 3: needle valve

(a)



(b) Gas distributor

**Fig.3-1** Experimental apparatus



**Fig.3-2** Flow regimes in a bubble column.

- (a) uniform bubble flow, (b) transition regime,
- (c) turbulent recirculation bubble flow.

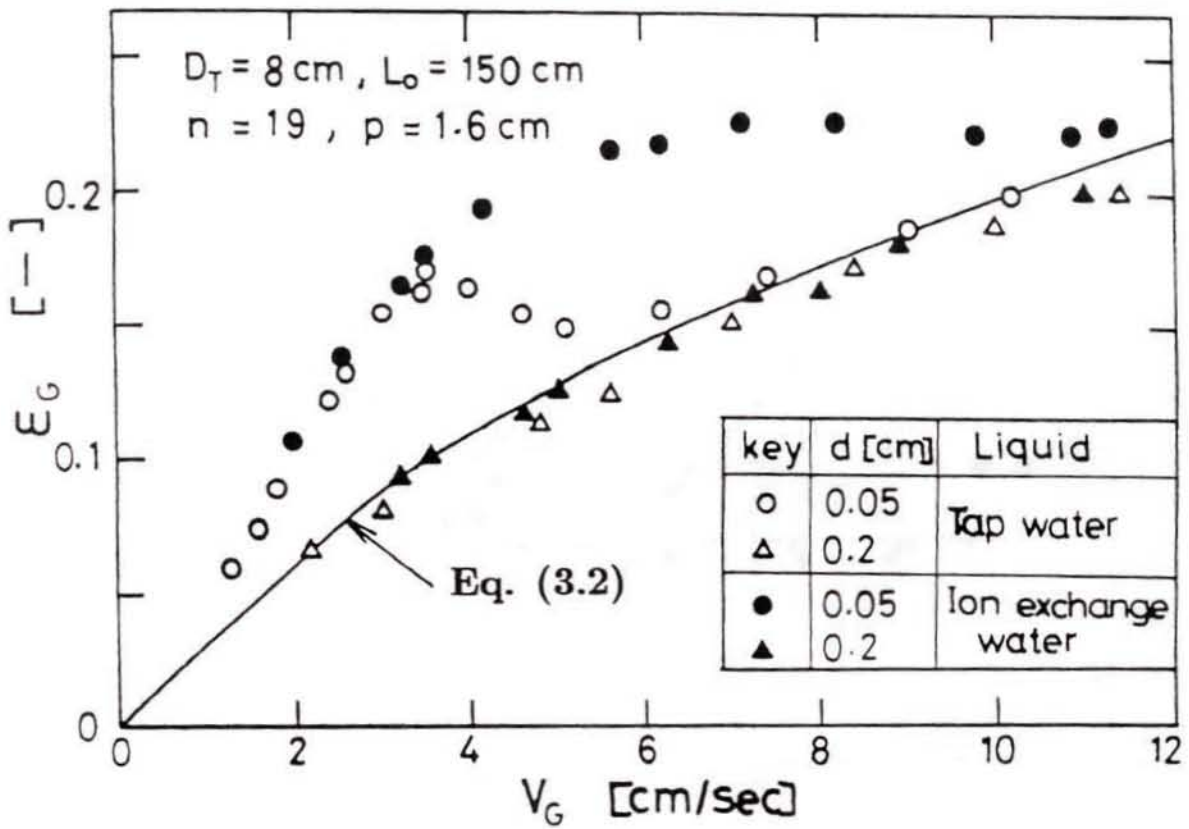


Fig.3-3 Variation of gas hold-up with gas velocity

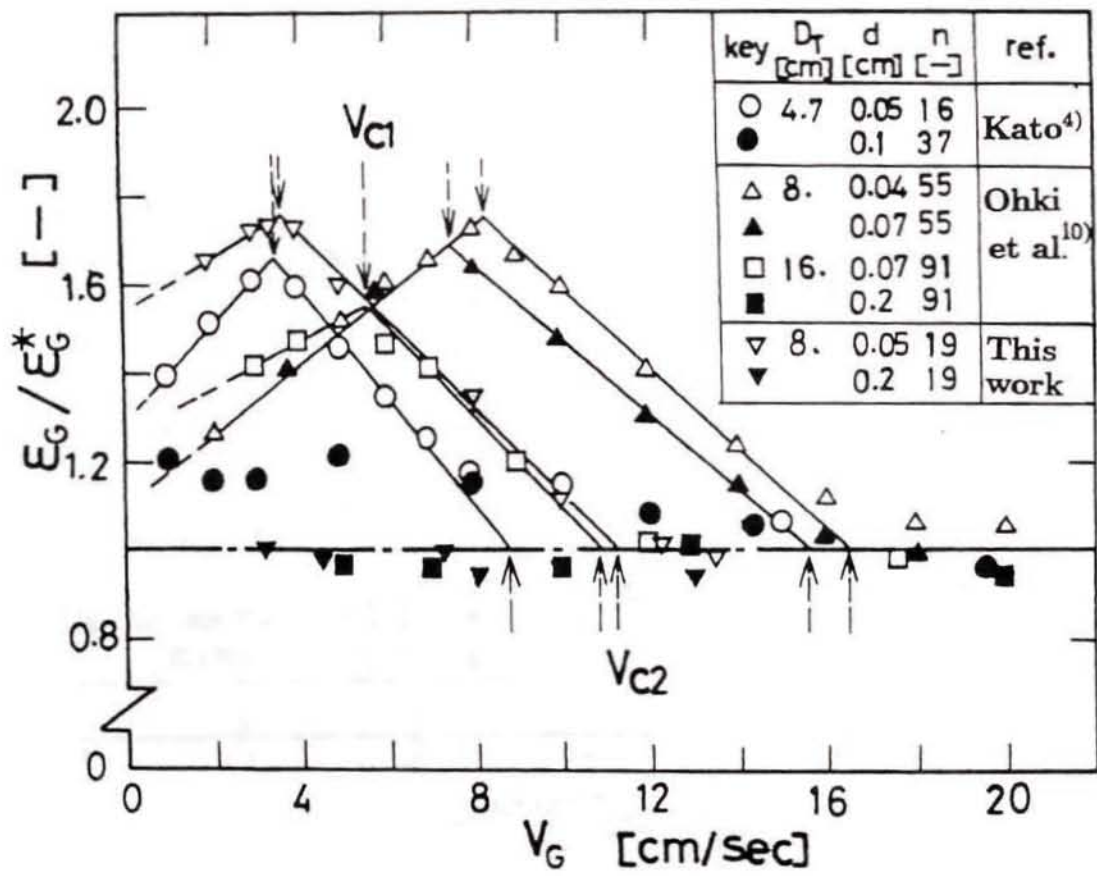


Fig.3-4  $\epsilon_G/\epsilon_G^*$  vs.  $V_G$  in bubble column with liquid batch

Table 3-1 Critical gas velocities obtained from the literature  
(air-water system, liquid batch)

$D_T$	$d$	$n$	$p$	$V_{c1}$	$V_{c2}$	Ref.
[cm]	[cm]	[-]	[cm]	[cm/s]	[cm/s]	
4	0.02	13	1.0	5.6	17.2	Ohki <sup>9)</sup>
		13	1.0	7.15	14.5	
		37	0.6	5.0	14.2	
		13	1.0	4.6	12.1	
		5	1.5	-	-	
4.7	0.05	16	0.7**	3.5	8.6	Kato <sup>4)</sup>
		37	0.7	-	-	
8	0.04	55	1.0	8.3	16.7	Ohki et al. <sup>10)</sup>
		19	1.5	6.6	13.3	
		55	1.0	7.6	15.5	
		19	1.5	4.3	11.6	
		7	2.5	-	-	
10.2	0.05	19	2.0	2.9	11.1	Yamashita et al. <sup>13)</sup>
			1.0	2.0	8.6	
			0.5	1.4	6.2	
			0.25	-	3.1	
16	0.04	91	1.4	6.0	12.6	Ohki et al. <sup>10)</sup>
			1.4	5.6	10.9	
			2.2	4.2	7.6	

\* Hole arrangement is triangle except below.

\*\* The arrangement is rectangle. Some of the holes are large (see type A in ref.4)).



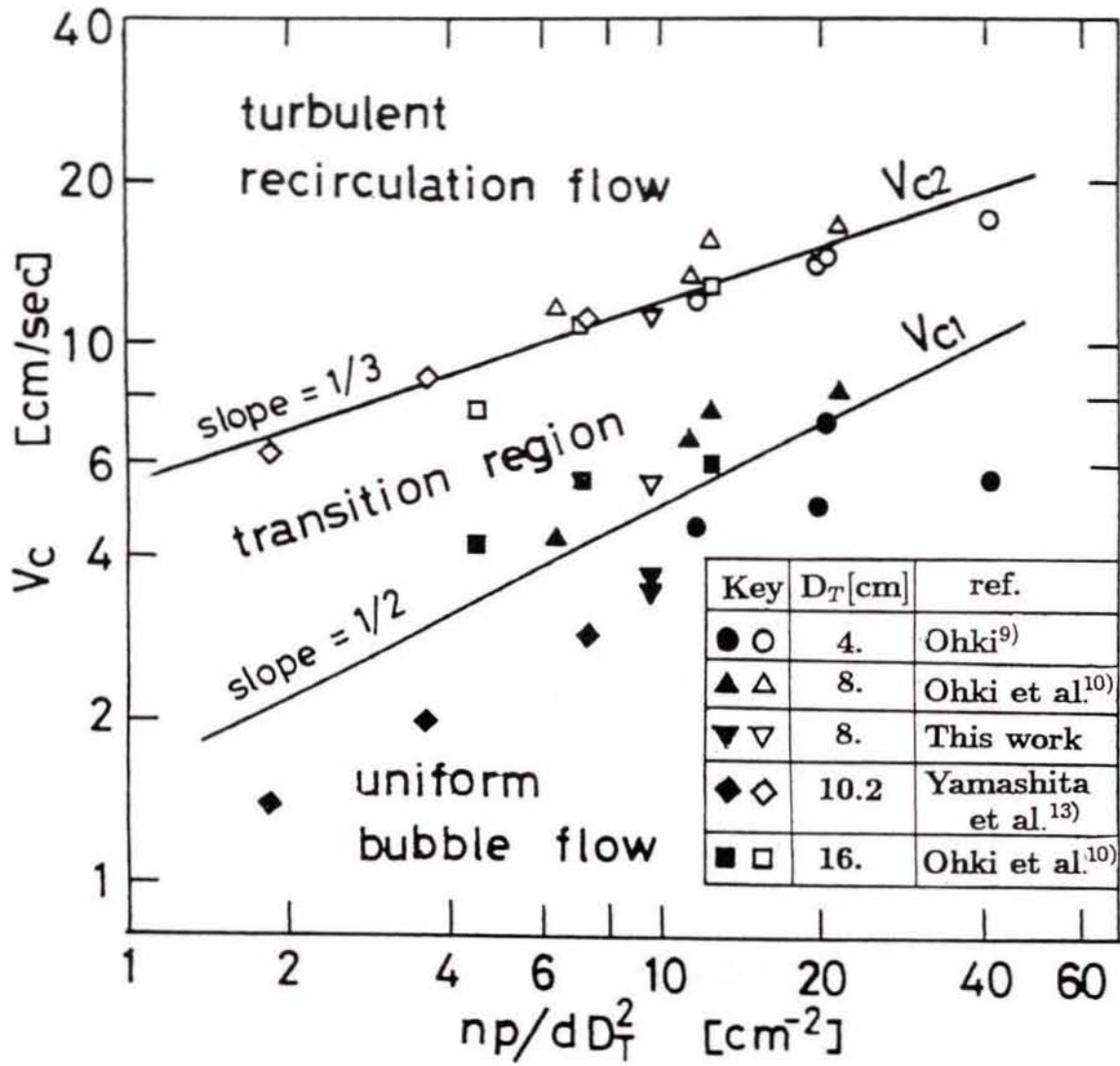


Fig.3-5  $V_c$  vs.  $\epsilon_G/\epsilon_G^*$

## 記号

$D_T$  : diameter of a bubble column

$d$  : diameter of holes

$L$  : bubbling height

$L_0$  : static height of liquid

$n$  : number of holes

$p$  : pitch of holes

$V_G$  : superficial gas velocity

$V_c$  : superficial critical gas velocity

$V_{c1}$  : superficial critical gas velocity for uniform bubble flow

$V_{c2}$  : superficial critical gas velocity for turbulent recirculation flow

$\beta, \gamma$  : parameter in Eq.(3.2)

$\varepsilon_G$  : gas holdup

$\varepsilon_G^*$  : standard gas holdup obtained when  $d \geq 0.2\text{cm}$

## 参考文献

1. N.De Nevers: Bubble Driven Fluid Circulations. *AIChE J.*, 14 (1968) 222-226.
2. W. Freedman and J.F. Davidson: Hold-up and Liquid Circulation in Bubble Columns. *Trans. Instn. Chem. Engrs.*, 47 (1969) T251-T262.
3. J.H. Hills: Radial Non-Uniformity of Velocity and Voidage in a Bubble Column. *Trans. Instn. Chem. Engrs.*, 52 (1974) 1-9.
4. 加藤康夫: 気泡塔内のガスホールドアップおよび気泡群の平均上昇速度. 化学工学, 26 (1962) 1068-1075.
5. 加藤康夫、西脇昭雄: 気泡塔内の液の混合拡散係数. 化学工学, 35 (1971) 912-916.
6. 河越幹男、井上徹、中尾勝実、大竹伝雄: 気泡分散型気液接触装置の流動特性. 化学工学, 38 (1974) 733-739.
7. D.W. van Krevelen and P.J. Hoftijzer: Studies of Gas-Bubble Formation. *Chem. Eng. Prog.*, 46, (1950) 29-35.
8. D.J. Nicklin: Two-Phase Bubble Flow. *Chem. Eng. Sci.*, 17 (1962) 693-702.
9. 大木善博: 気泡塔反応装置に関する研究. 博士論文 (東京大学), (1969)
10. Y. Ohki and H. Inoue: Longitudinal mixing of the liquid phase in bubble columns. *Chem. Eng. Sci.*, 25 (1970) 1-16.
11. H.L. Shulman and M.C. Molstad: Gas-Bubble Columns for Gas-Liquid Contacting. *Ind. Eng. Chem.*, 42 (1950) 1058-1070.
12. K. Ueyama and T. Miyauchi: Properties of Recirculating Turbulent Two Phase Flow in Gas Bubble Columns. *AIChE J.*, 25 (1979) 258-266.
13. F. Yamashita and H. Inoue: Gas Holdup in Bubble Columns. *J. Chem. Eng. Japan*, 8 (1975) 334-336.
14. 赤川浩爾: 気液二相流. コロナ社 (1947)、第2章.

## 第4章

# 鉛直側壁部分加熱による 円筒内熱対流の実験

# 第4章 鉛直側壁部分加熱による円筒内 熱対流の実験

## 4.1 緒言

原油の油層内三次回収やオイルサンド・ビチューメン油層内回収などに、火攻法、水蒸気圧入法などの熱攻法プロセスがある<sup>1,2)</sup>。これらのいずれの方法においても地層内の温度伝達変化を正確に知る必要がある。この温度伝達変化を測定する方法の一つが温度観測井である。温度観測井で測定した鉛直方向温度分布の解析から油層の位置や油層内温度を知ることができれば、熱攻法プロセスにとって意義あるものと考えられる。原油熱回収に関係した地層内熱移動の解析にはYortsosら<sup>3)</sup>の報告があるが、温度観測井内の自然対流による伝熱機構を詳しく論じた報告は見当たらない。

温度観測井は、蒸気等により加熱された油層に対応する一部環状側壁から加熱され、井戸内部に対流が発生する。そこで、温度観測井をモデル化した密閉鉛直円筒の環状側壁を部分的に加熱して円筒内部に対流を発生する装置を作り、対流の様子および温度分布の測定を試みた。この場合の対流発生は、水平方向の温度分布が一定でないため浮力の不均一性によって最初から対流が発生する。

熱対流の典型的なレイリー・ベナール系は、流体層の不安定性の結果として発生するもので本研究対象の場とは異なるが、定常熱伝導から規則振動流、準振動流そしてカオスへと遷移する幾つかの道筋が明らかになっている<sup>4~6)</sup>。本研究対象は、与えられた外部条件のもとに最初から存在する対流としての典型的例である鉛直二平板間の自然対流<sup>13,14)</sup>に近いと言えるが、水平方向の温度分布が空間的に異なる分布を持つため、

かなり複雑な機構が予想される。また、ガスタービン回転羽根の冷却等に応用される熱サイフォンとよく似た加熱条件を与える<sup>7~10)</sup>。熱サイフォンの実験においても規則的あるいは不規則な振動流が報告されている。密閉容器内の側面を部分的に加熱した系においても振動流の報告があり<sup>11)</sup>、一連の振動流発生は層流から乱流に遷移する段階で必然的にみられると考えられる。本研究は、鉛直円筒側壁を部分加熱したときの内部に発生する熱対流の状態の変化を明らかにする事が主目的であり、伝熱工学の基礎的知見を得る意味からも、温度観測井の伝熱的特性を把握する意味からも重要と考える。本章では温度観測井モデルの流れの観察および温度測定の結果を述べる。第5章はより詳細に調べるため有限差分法を用いた数値計算の結果を述べる。

実験は、まず加熱層に比べ十分な長さを持つ円筒を用いて、温度観測井の基本的対流特性を把握するための流れの様子および中心軸上の温度分布測定を行った<sup>12)</sup>。内部流体に液体を用いると測定可能な小さな温度差であっても、加熱層および上部の冷却層が乱流状態になる。そこで、対流の遷移過程を明確にするため、水よりも動粘度が大きくプラントル数が温度に対してほぼ一定の空気を用い、また、円筒が長いと過渡的状態の時間が長く、測定点も多くしなければならないため、基本特性を把握するためアスペクト比を小さくしたモデル装置で温度振動の測定を行った<sup>15)</sup>。次節において、実験装置および方法を説明する。3節の結果および考察は、まず円筒が直径に比べ十分に長い場合の液体に対する流れの観察および温度分布を概説する。次に、基礎的な遷移過程を明確にするため、アスペクト比（円筒長さ／直径）を約4から9程度の円筒を用いて空気に対する温度の時間変化を測定し、定常流から振動流への変化を詳細に考察する。

## 4.2 実験装置および方法

温度観測井モデルとして鉛直円筒の環状側壁を部分的に加熱して、円筒内部に発生する対流を調べる。用いた実験装置は、種々の直径や長さについて試みたが、基本的にはFig.4-1に示す構造とした。二重管は流れの可視化のためパイレックスガラスで作成し、その環状壁を部分的に加熱および冷却するため二重管環状部を仕切板で三重に仕切った。図の下から第一層および第三層の環状部に恒温槽により一定温度に保たれた冷却水を、第二層には一定温度の加熱水を流すことにより、内管側壁を加熱冷却させて円筒内部の流体に自然対流を発生させた。装置の大きさは、直径に比べ十分に長いと考えられる円筒長さ3mの場合と、測定しやすさから円筒長さを短くした場合について実験した。まず、円筒内部に液体（水、シリコン油、グリセリン水溶液）を入れた場合の対流の観察を行った。流れの可視化は、トレーサーとしてアルミ粉末を用い、スリット光反射による写真撮影で行った。

温度測定は、それぞれの装置において行ったが、温度の時間変動を調べた場合について説明する。4.3.2節で詳細に述べる空気に対する温度変動を測定したときの装置をFig.4-1に示す。円筒内径 $d = 32.2\text{mm}$ で下部冷却層の長さ $L_{C1}$ は45mm、加熱層 $L_H = 40\text{mm}$ とし、上部冷却層 $L_{C2}$ は200mmまで変えることができるようにした。これは、本研究の対流が側壁温度条件に応じて三つの基本的なセルが発生する。そのうち下部冷却層は安定成層場であるため、そこにできるセルは、きわめて弱い流れである。したがって、興味の対象は、加熱層と上部冷却層に起こる対流と考えられる。空間の大きさが対流に及ぼす効果を調べるため、本装置は冷却水を循環させたステンレス製の円筒（外径32mm）を二重管内部に上から挿入して、その位置を変えることにより上部冷却層の長さを自由に換えられるようにした。

温度測定は、T熱電対（素線径0.1mm、分解能0.1℃）を用い、円筒中心軸上に極細のハリスを通し、そのハリスに熱電対を支持して軸上を移動させることにより、円筒内部の温度を測定した。各点の温度データは、温度計（デジタルマルチメーター）を用いて12bitAD変換器を通してパソコン（NEC PC-9801）に転送し格納した。データ量、サンプリング時間間隔はBASICプログラムにより自由に設定できるようにした。

操作は、加熱冷却水の温度差 $\Delta T$ を変えることによりレイリー数 $Ra$ を変えること、および上部冷却層の長さ $L_{C2}$ を変えた。

今後、以下の無次元パラメータで整理する。

$$Ra = \frac{g\beta\Delta T d^3}{\alpha\nu} \quad (\text{Rayleigh number}) \quad (4.1)$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (\text{Prandtl number}) \quad (4.2)$$

ここで、 $g$ は重力加速度、温度差 $\Delta T$  ( $= T_H - T_C$ 、 $T_H$ :加熱壁面温度、 $T_C$ :冷却壁面温度)、 $\beta, \alpha, \nu$ はそれぞれ流体の熱膨張係数、熱拡散係数、動粘度である。空間の大きさは、

$$A = \frac{\text{上部冷却層長さ } (L_{C2})}{\text{加熱層長さ } (L_H)} \quad (\text{形状パラメータ}) \quad (4.3)$$

とおき、Fig.4-1に示す装置の場合、 $A$ は1～5まで変えた場合について実験した。尚、他の空間を規定する量、直径に対する加熱層幅 ( $L_H/d$ ) および加熱層幅に対する下部冷却層幅 ( $L_{C1}/L_H$ ) は、各々1.242と1.125に固定されている。また、アスペクト比 (円筒長さ $L$ /直径 $d$ ) は、 $A = 1$ に対して3.882から $A = 5$ の8.851まで変わる。

具体的に温度の経時変化を測定した位置は、Fig.4-1の円筒中心軸上に示す7個の代表点とした。加熱層中央を鉛直方向の原点とした時、下部冷却層の代表点として $z = -4\text{cm}$ 、加熱層は $z = 0\text{cm}$ 、上部冷却層は $z = 4\text{cm}$ ,  $8\text{cm}$ ,  $12\text{cm}$  ..と $A$ に応じて測定点が増加する各点の温度を測定した。



## 4.3 結果および考察

### 4.3.1 液体における流れの観察および温度分布

温度観測井のモデルとして円筒長さを十分に長くした場合の代表的な実験結果をまず紹介する。2重管円筒装置の環状部に加熱・冷却水を循環させ、3mの円筒内部に対流を発生させた場合の対流運動の可視化写真と軸上温度分布測定の結果をFigs.4-2, 4-3に示す。

Fig.4-2は、円筒直径8cm、加熱層を底部より40cmの位置から幅20cmの間を加熱させ、他の環状部を冷却させた場合に円筒内部の水に発生した対流をアルミ粉末法で可視化したものである。この時の加熱壁と冷却壁の温度差は50℃、プラントル数 $Pr = 4$ 、レイリー数は $Ra = 1.9 \times 10^9$ （代表長さは直径）である。トレーサーの軌跡から流体は、穏やかに流動している部分と激しく乱れている部分とに区別できる。底から40cmの下部冷却層では、高さ方向に温度が上昇する安定な密度成層になっているため、ほとんど流体の動きは認められない。流体の動きは、加熱層とその上部冷却層に認められる。加熱層と上部冷却層の約2.0mまでは不規則で激しい乱れがあり、その上部は穏やかな軸対称流れを示す。

円管内の中心軸上の鉛直方向温度分布をFig.4-3に示す。縦軸の温度は加熱壁と冷却壁の温度差を用い無次元化し、横軸の鉛直方向の距離は水については円筒半径で、他は直径で無次元化している。流体は水（図中の記号W,  $Pr = 7$ ）、シリコンオイル（S,  $Pr = 361$ ）および85%グリセリン水溶液（G,  $Pr = 980$ ）の3種類の結果を示す。用いた円筒の直径は、水の実験について $d = 8\text{cm}$ 、シリコンオイルとグリセリン水溶液の実験に $d = 3.5\text{cm}$ を用いている。また、加熱幅は、水に対して10cm、シリコンオイルとグリセリン水溶液は20cmとし、加熱層長さに対する上部冷却層長さの比（形状パラメータ）は、水 $A = 25$ 、他は $A = 12.5$ である。加熱幅は図中にAおよびBで示す。レイリー数は、水、シリコンオイルおよびグリセリン水溶液に対してそれぞれ $Ra = 5 \times 10^8, 1.3 \times 10^7, 2 \times 10^6$ である。

流体の温度は、乱れによる変動を示すため水については最高温度と最低温度の幅と平均温度を示し、他は平均温度を示す。温度変動は、加熱層と上部冷却層で大きく、流れの

観察結果の乱流域と対応する。温度分布の形状は、プラントル数およびレイリー数が異なるため、それぞれ違う特性を示すが、最高温度を示す位置はいずれの条件においても加熱部上端よりわずかに上の位置に現れる。シリコンオイルとグリセリン水溶液における極小極大を示す理由は、物性値の温度依存性や対流の三次元性に因るものと考えられる。これらの結果から、加熱層と加熱層に近い上部冷却層では、乱流状態であること、また流体物性値や空間の大きさに依存し極めて複雑な動きを示すことがわかる。また、円筒内温度分布からその最大値を示す位置は、加熱壁のほぼ上端に現れることがわかった。

本研究は、自然対流の基本的特性の把握を目的としており、以下のモデル化した場合についてまず層流から乱流への変化を明らかにする。高さ方向が長いと対流の過渡的变化がかなり長時間になると考えられることや場全体の測定も困難になることから、鉛直方向を極端に短くした場合の対流パターンの変化を調べる。

次節以降に温度測定について述べるが、ここでまず単純化した場での流れを Fig.4-4 に示す。円筒直径を4cm、高さ16cm（加熱層長さ:4cm、下部冷却層:4cm、上部冷却層:8cm）とし、流体は、水 ( $Pr = 5.4$ ) の場合である。加熱冷却の温度差 $\Delta T$ は $7^{\circ}\text{C}$ で、レイリー数は約  $Ra = 10^7$  である。写真は、それぞれ5秒間露光し、20秒間あけて撮影した一連の結果を示す。流れは、Fig.4-2の場合と比較すると  $Ra$  を  $1/200$  に下げ、また空間を小さくしたため壁面粘性効果が強くなり穏やかになっている。加熱層では壁面を上昇し、円筒中心を下降する流れを示し、上部冷却層では逆に壁面を下降し中心を上昇する流れを示す。下部冷却層では、加熱層内流れが影響して上部に流れが入り込む様子が観察されるが、全般的にはわずかな動きとなっている。流れは、全体として軸対称に近いが、Fig.4-3(c)に見られるように加熱および上部冷却層の右側のセルが強くなっており、変化は非軸対称で三次元的な変動を示す。図の(a)と(d)が比較的良好な流れパターンを示し周期性を持つことがわかる。しかし、温度差が比較的小さいにもかかわらず、 $Ra$ は依然大きな値であり、複雑な流れとなっている。空気の場合の可視化実験は、煙等のトレーサーが拡散しやすく十分な結果が得られていない。

### 4.3.2 空気における温度測定

前節で調べたように、液体を用いた場合測定可能な  $Ra$  は約  $10^6$  以上の大きい場となり不規則な運動を示す。液体（特に水）を用いた場合、低  $Ra$  の実験を行うためには、温度差を  $1^\circ\text{C}$  以下とするか円筒直径をかなり細くする必要がある。そこで、流体を空気に変えると動粘度が水の約15倍でしかもプラントル数が0.71と温度に対して一定である。以下、空気に対する  $Ra = 10^4$  以上の場合について温度時系列データの測定結果について報告する。

#### 4.3.2.1 温度分布

対流場の温度の時間変化を調べる前に、高さ方向の全体の温度分布図の一例を示す。 $Ra = 4.05 \times 10^4$ （温度差  $\Delta T = 15^\circ\text{C}$ ）としたとき、上部冷却層の長さを変えた場合の円筒中心軸上の温度分布図を Fig.4-5 に示す。各点の温度は約100秒間の平均温度を示す。温度は  $(T - T_c)/\Delta T$  により無次元化した値を示す。図の  $-2\text{cm} \leq z \leq 2\text{cm}$  の区間が加熱層である。温度分布は熱伝導場から推測すると、加熱層中心  $z = 0$  付近で最高値を示し上下方向に単調に減少する曲線を示すものと予想されるが、対流により最高温度点は加熱部中央より多少下方に位置し、上方に極大極小を示している。円筒長の長い場合の Fig.4-3 の結果では、加熱層と上部冷却層の境近くに最高温度点を示した。この差は、 $Ra$  の値に大きな違いがあり流動状態の違い、乱流と層流の違いと考えられる。また、極小極大が現れる理由は、温度境界条件が完全な軸対称性を保証していないため三次元流れとなっていると思われる。図から特に  $A = 1$  の空間が小さい場合、軸対称性からのずれやセル構造の違いが生じているように見える。

#### 4.3.2.2 レイリー数の効果

形状パラメータを  $A = 3$ 、つまり加熱層長さの3倍の上部冷却層とした場合に対して、加熱冷却の温度差を変えることにより  $Ra$  の種々の値に対する温度変化の様子を調べた。測定点は、中心軸上の  $z = 0, \pm 4, 8, 12\text{cm}$  の各点について温度の時間変化を実測し考察する。

温度差  $\Delta T$  が小さい  $Ra = 3.0 \times 10^4$  以下ではすべて定常状態であった。Fig.4-6 に

$Ra = 3.04 \times 10^4$  の場合の温度時系列を示す。尚、各点の測定は別々に行っているため、各波形の位相は時間的に揃えていない。上部冷却層の  $z = 4\text{cm}$  と  $12\text{cm}$  に小さい振幅の振動が観察されるが、温度差  $\Delta T$  に対して数%以下の変動は無視し、この場合定常状態とみなす。

$Ra$  を大きくすると上部冷却層のみに振動が観察されるようになる。そして、 $Ra = 3.51 \times 10^4$  の時系列は、Fig.47(a) に示すように正弦波的規則振動となった。振幅は加熱層 ( $z = 0\text{cm}$ ) で最も大きく、加熱層から離れるに従って小さくなっている。図の  $z = 0$  のデータを高速フーリエ変換 (データ数  $2^{11}$ 、最小周波数  $2.42 \times 10^{-3}\text{Hz}$ 、Nyquist 周波数  $2.48\text{Hz}$ ) して求めたパワースペクトル  $P$  を Fig.47(b) に示す。温度変動の周期は  $16.53\text{s}$  で、スペクトルはその逆数の基本振動数  $f_1 = 0.0605\text{Hz}$  とその整数倍の振動数にピークを持つことが分かる。

更に温度差を大きくして  $Ra = 4.17 \times 10^4$  の場合の結果を Fig.48(a) に示す。図から  $z = 0$  の温度時系列が4個の極大値を含む変動が規則的に繰り返されていることが分かる。一方、上部冷却層では、間欠的に大きな変動を含む不規則な変動を示している。 $z = 0\text{cm}$  のデータのパワースペクトルを Fig.48(b) に示す。最大ピークを示す基本周波数は、 $f_1 = 0.0242\text{Hz}$  (周期  $41.3\text{s}$ ) にある。また、 $f_1$  の整数倍にピークを持つが、 $2f_1$  より  $3f_1$ 、 $4f_1$  より  $5f_1$  の振動数の方が大きなピーク値を持つ。 $Ra$  が小さい Fig.47 の結果と比較すると、周期が長くなったことになるが、 $Ra$  増加による現象の連続性を考えると、 $3 \times f_1 = 0.0726$  が基本振動数となるべきところを、第2の Hopf 分岐 (分調波分岐) が起こり3倍周期特性を示していると考えられる。

更に  $Ra$  を上げ、 $Ra = 7 \times 10^4$  の場合はどの測定点においても不規則振動を示す (Fig.49)。パワースペクトルも鋭いピークを持たず連続スペクトルに近い特性を示す。この状態は、軸対称振動に周方向攪乱が加わり3次元の流れで、乱流状態といえるか疑問ではあるが、それに近い状態と思われる。

以上のように  $Ra$  の値と共に定常状態から上部冷却層のみ振動する部分振動状態、更に規則振動状態、不規則振動状態と移り変わることがわかった。

#### 4.3.2.3 空間の効果

上部冷却層長さを種々変えた場合の温度変動を実測することにより空間の効果調べた。加熱層と上部冷却層の幅が等しい  $A = 1$  の場合、およそ  $Ra$  が  $5.7 \times 10^4$  以下ではどの測定点の結果も一定の温度を示し、対流は定常状態であることを示した。 $Ra$  を上げて  $Ra = 6.14 \times 10^4$  の結果を Fig.4-10 に示す。このとき、上部冷却層 ( $z = 4\text{cm}$ ) に規則的な温度振動が現れ、加熱層や下部冷却層は定常と見なされる結果が得られた。更に  $Ra = 6.95 \times 10^4$  に上げると、どの場所においても温度は規則的に振動する (Fig.4-11)。ただし、この時の規則振動は、Fig.4-8 の  $z = 0$  と同様低振動数成分を含む振動に対応している。また、下部冷却層 ( $z = -4\text{cm}$ ) は安定成層であるため振幅は小さい。

$Ra = 7.38 \times 10^4$  の場合、下部冷却層 ( $z = -4$ ) に規則的な振動が観察されるが、他の場所では間欠的に大きな振幅を持つ不規則な振動を示す (Fig.4-12)。

$A = 5$  と空間が大きい場合においても  $Ra$  の増加とともに定常対流、加熱層と下部冷却層において規則振動状態、すべての点で不規則状態と変化する結果を示す。代表的な結果を Figs.4-13~15 に示す。空間の小さい場合と比較して加熱層内の平均温度が相対的に高いことが特徴と言える。このことは軸対称性が  $A$  が大きいほど保証されているように思われる。Fig.4-14 の  $Ra = 4.64 \times 10^4$  の場合、加熱層および下部冷却層に Fig.4-7 と同様な規則振動が確認され、上部冷却層では不規則振動を示す。

以上のように温度時系列変化を検討した結果、 $Ra$  の値と共に対流は、定常状態から上部冷却層のみ振動し加熱層内では定常状態 (部分定常)、規則振動状態、加熱層と下部冷却層が規則振動で上部冷却層では不規則振動状態 (部分規則振動)、すべての点で不規則状態の 5 種類に大別されることがわかった。

ここで、振動流発生について考えると、2つの機構が想像される。1つは、上部冷却層のみに比較的小さな振幅の振動が現れ主対流である加熱層に変動が見られない場合や上部冷却層は不規則振動を示すが加熱層は規則振動である場合は、上部冷却層の不安定性に起因していると考えられる。一方、Fig.4-7 や Fig.4-11 に見られる加熱層の振動が最も大きい場合は、加熱壁から流体に伝達されたエネルギーを上下の冷却層に伝達するとき定常流れではもはや伝達しきれなくなったため振動流が発生すると考えられる。つまり、高温流塊 (サーマル) を周期的に上部冷却層に吐き出すことになる。第

5章において数値計算の結果を述べるが、その時現れる振動流はこの機構である。

ここで、5種類の状態が形状パラメータ  $A$  と  $Ra$  に対してどのように関係するか調べる。しかし、1つの測定点でみると定常、規則振動、不規則振動と分けられ、部分定常や部分規則振動とは複数の測定点を見たときの空間的違いを示す状態である。そこで、加熱層の  $z = 0$  における温度変動の状態から、定常○、規則振動△、不規則振動×としてFig.4-16に整理する。規則振動には分調波分岐モードも含まれているがデータ不足のため、それらを区別して考察することは出来なかった。加熱層で定常あるいは規則振動状態であっても上部冷却層では別の温度変動を示すときは、それぞれの記号を塗りつぶすことにより違いを示す。

図から空間が小さい  $A = 1$  の場合、定常状態の領域が広く、大きな  $Ra$  で振動現象が発生しており、空間が小さいほど安定であることがわかる。 $A$  が2から5まではほぼ同程度の  $Ra$  から振動流の発生を示すが、 $A = 3$  付近がもっとも低  $Ra$  で振動発生が見られ、不安定であると言える。図中の実線は振動流発生の臨界レイリー数 ( $Rac$ ) を推測したものである。

北村ら<sup>11)</sup>は、長方形断面の一方の側壁部分加熱による対流における振動流を報告しており、加熱層幅を代表長さとしたレイリー数で振動発生は約  $Rac = 10^4$  であった。加熱条件とレイリー数の定義に違いがあるが、本実験結果とほぼ同程度と考えられる。

## 4.4 結論

鉛直円筒の一部環状壁を加熱したときの円筒内に発生する自然対流について、円筒が十分長い場合の内部流体に液体を用いた場合の流れの観察と温度分布測定、および円筒を短くしたモデル装置を用い空気の温度測定を行った。円筒が十分に長い液体を用いた場合、加熱層と上部冷却層で乱流状態になっており、温度分布の最高点は加熱層上端近くに現れることがわかった。

低  $Ra$  からの遷移過程を調べるため、空気 ( $Pr = 0.71$ ) の場合の温度の時系列測定から対流状態の変化を調べた。また、空間の大きさの効果を調べるため、 $A = (\text{上部冷却層長さ}) / (\text{加熱層長さ})$  として、 $A = 1 \sim 5$  まで変え、温度測定を行った。対流は、下部安定成層、加熱層、上部不安定層と分けることが出来るが、加熱層と上部不安定層に特徴的な変化が見られた。しかし、空間的に同一の変動を示さないこともあり、主として加熱層の変動を中心に考察した。その結果、以下のことが明らかになった。

- (1)  $Ra$  の増加と共に温度の時間変動は、定常、周期振動、分調波周期振動、不規則振動と状態が変わることがわかった。
- (2) 温度変動は、加熱層より上部冷却層の方が低  $Ra$  から規則振動あるいは不規則振動へと変化する。
- (3) 定常から周期振動流発生の臨界  $Ra$  を  $R_{ac}$  とすると、 $A = 1$  の空間が小さいほど  $R_{ac}$  は大きく、 $A$  を増加すると  $A = 3$  付近に最小の  $R_{ac}$  が現れる。更に  $A$  を増すと  $R_{ac}$  は増加する。

実験では、軸対称条件を保証する努力をしたが十分ではなかったこと、中心軸上の特定点のみの測定であることから空間的特性の検討が不十分であり、今後更に検討する必要があると思われる。

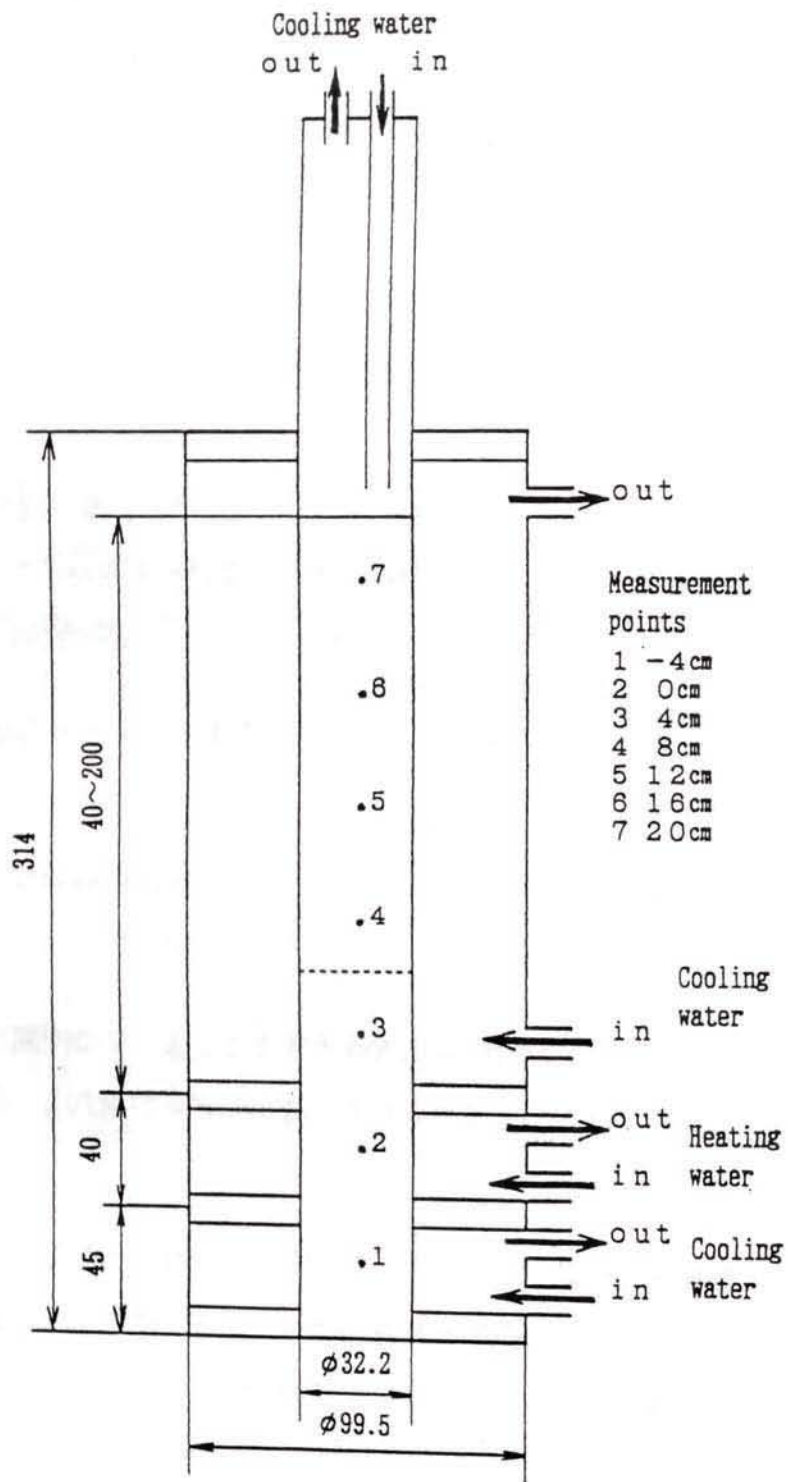


Fig.4-1 Experimental apparatus.



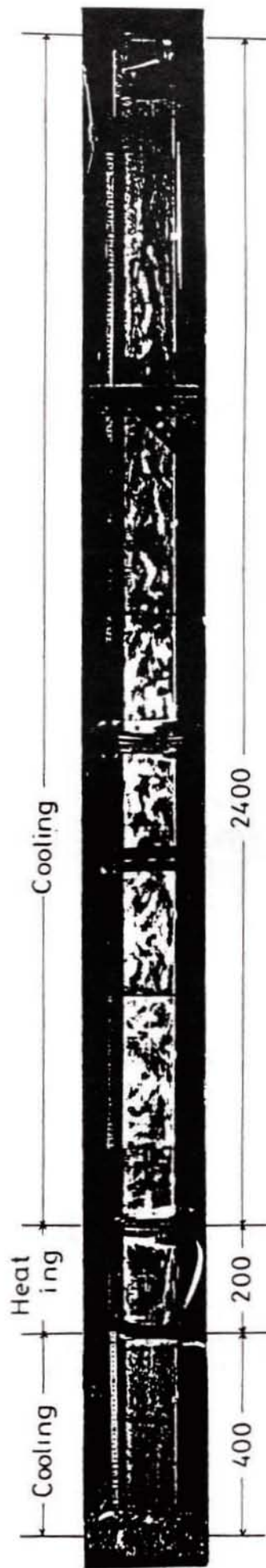


Fig.4-2 Photograph of tracer in the long vertical cylinder.

( $d = 8\text{cm}$ ,  $Pr = 4$ ,  $Ra = 1.9 \times 10^9$ )

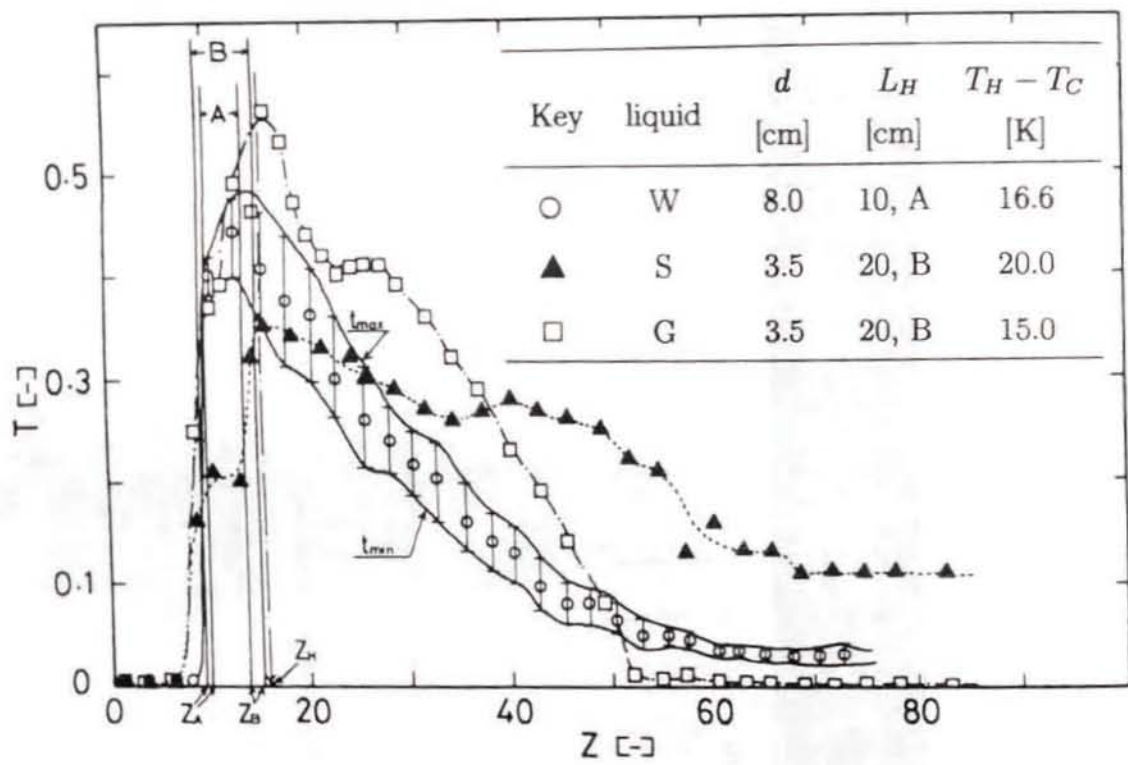
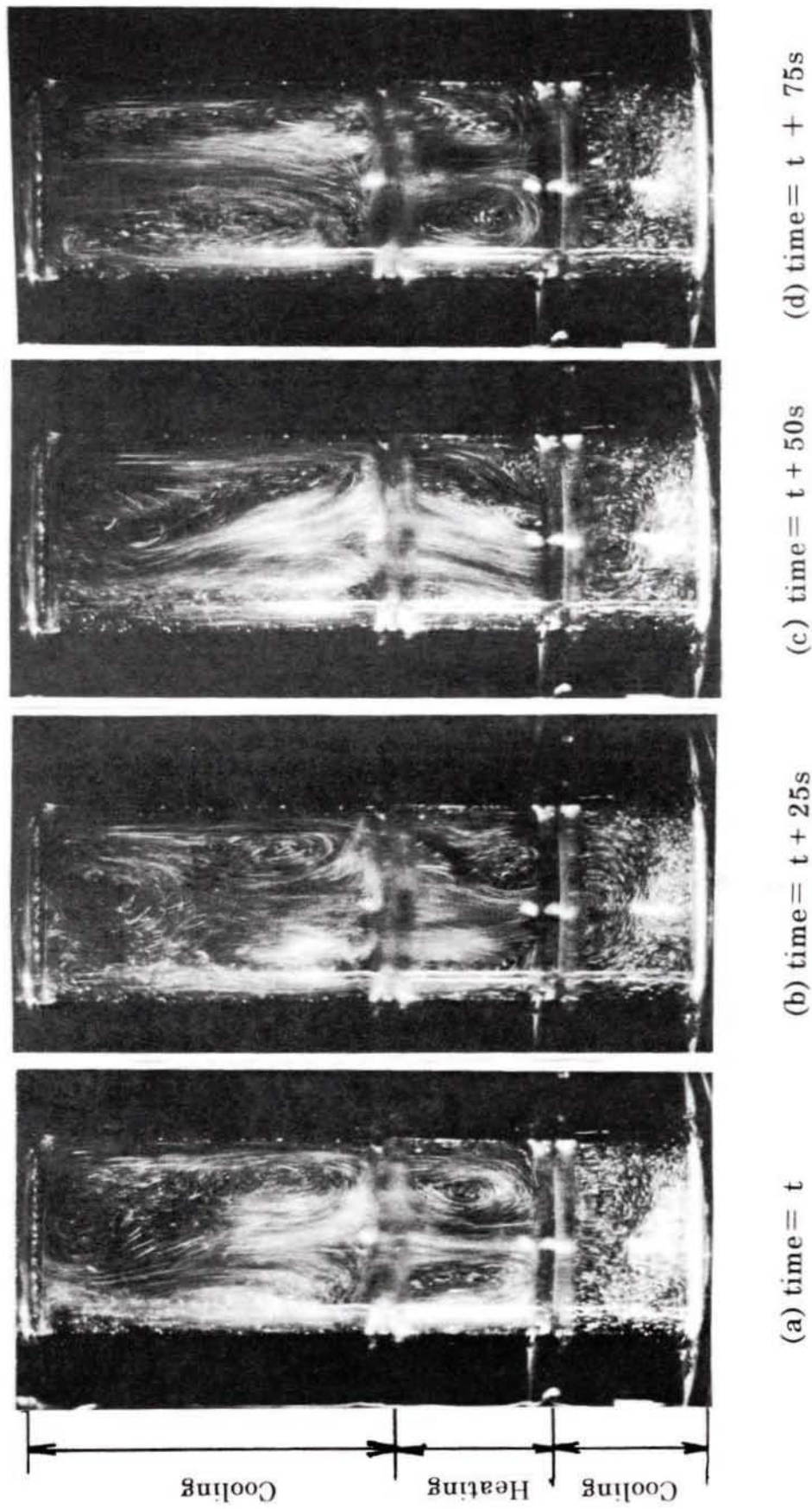


Fig.4-3 Typical examples of temperature distributions for various kinds of liquids. (W: water, S: silicon oil, G: 85% glycerine solution)



**Fig.4-4** Photographs of the flow pattern. Time interval between two photographs is 20s, with exposure time 5s. ( $d = 4cm, Pr = 5.4, Ra = 10^7$ )

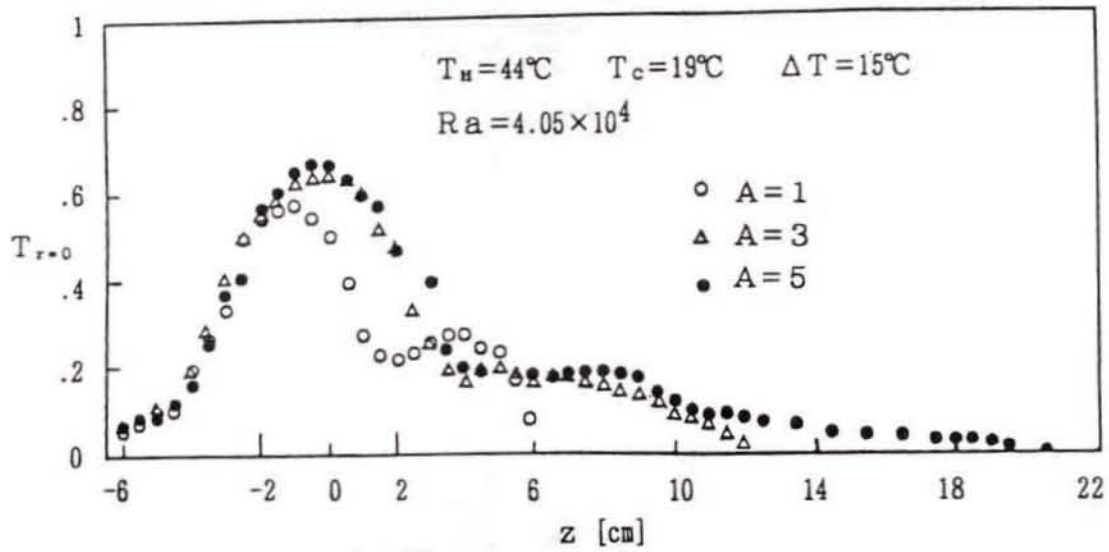


Fig.4-5 Vertical mean temperature profiles on the center line of cylinder

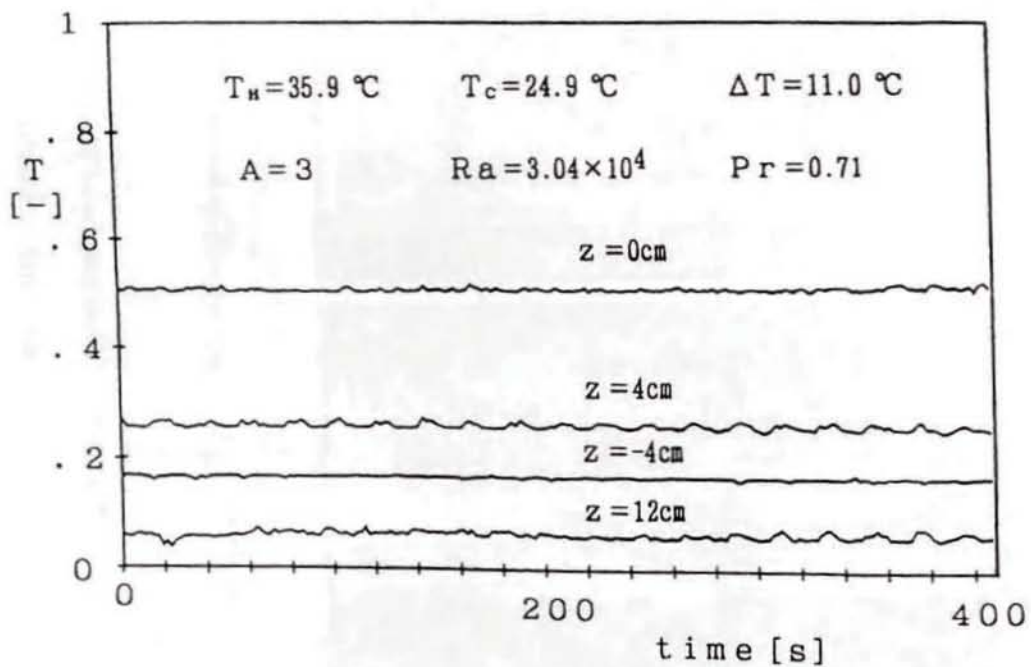
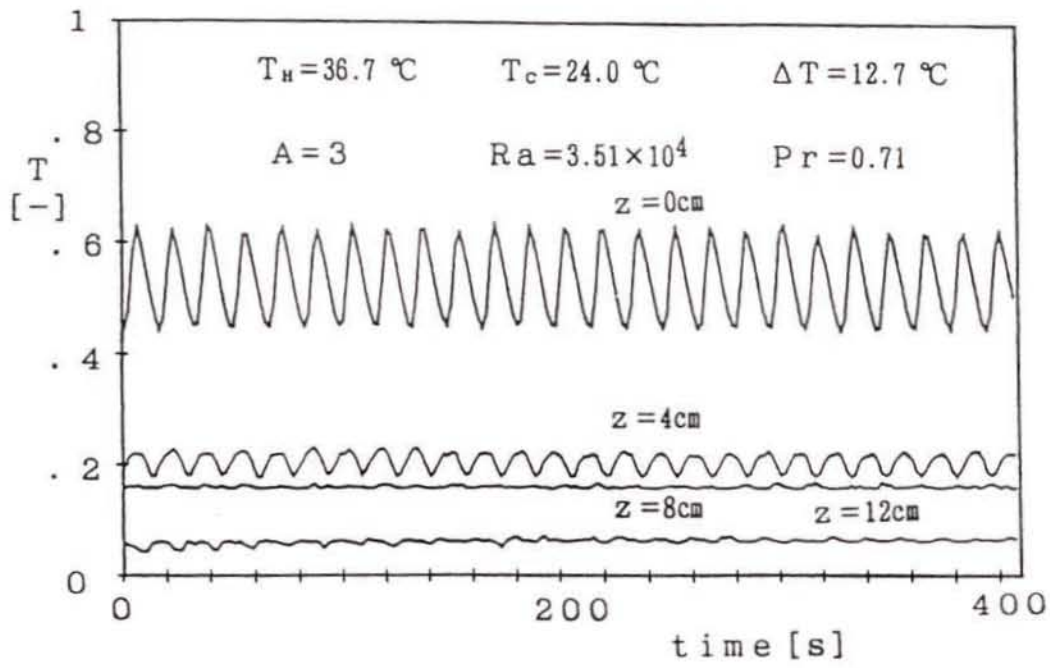
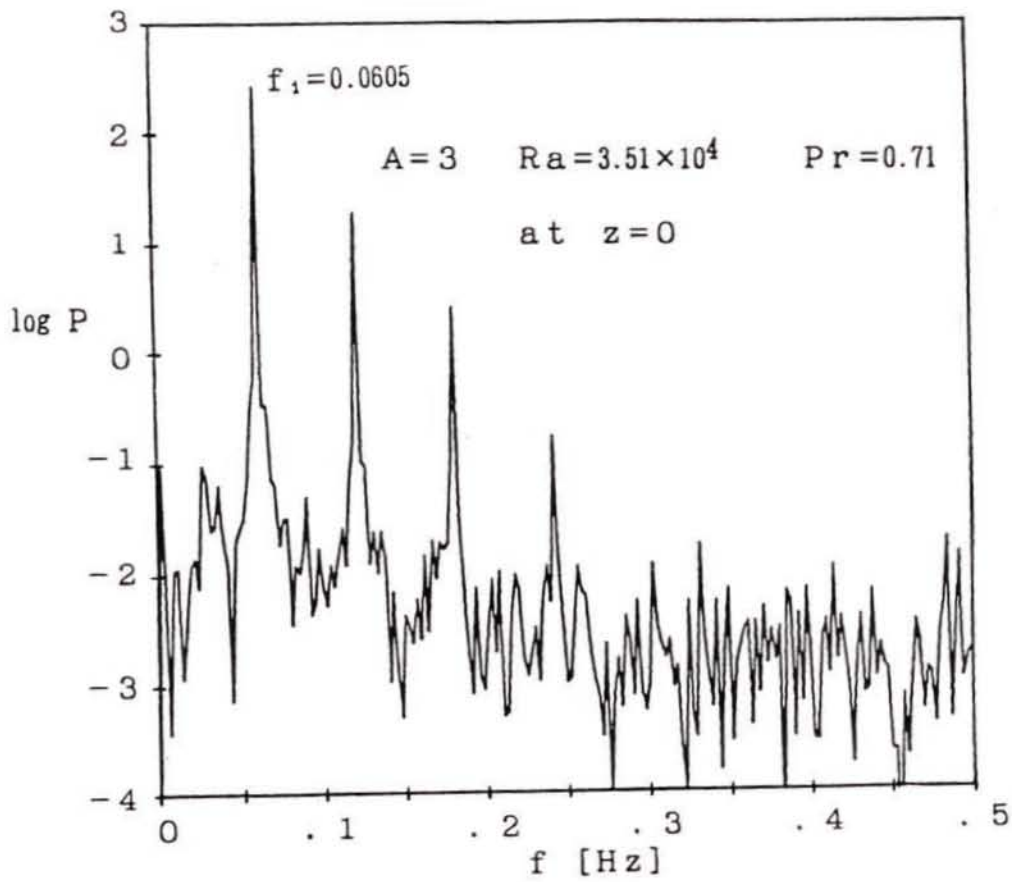


Fig.4-6 Time series of temperature at typical points for  $A = 3$  and  $Ra = 3.04 \times 10^4$ .

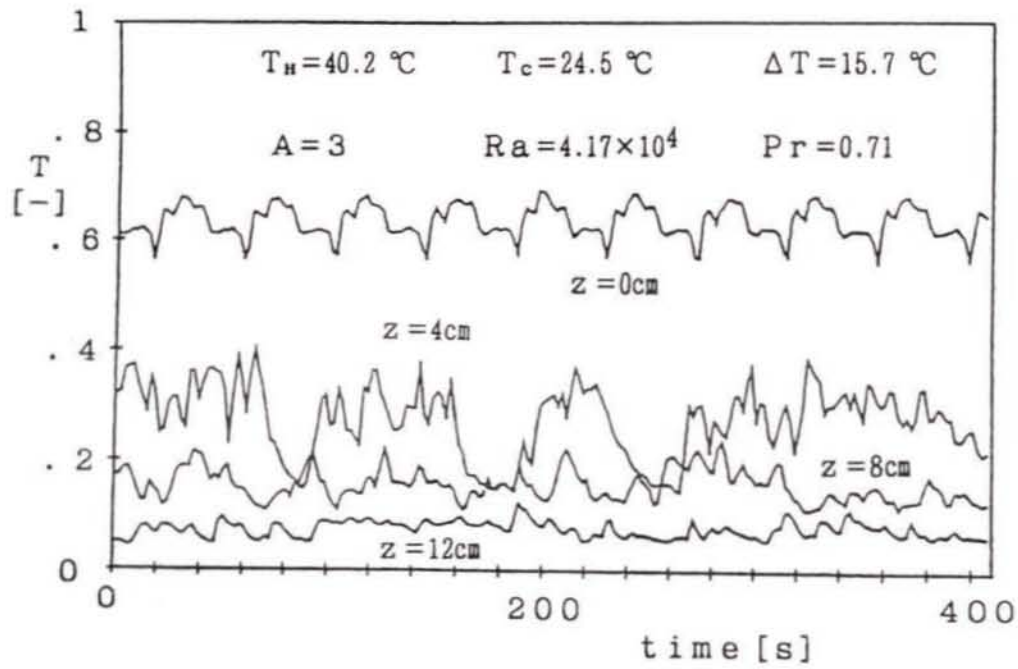


(a)

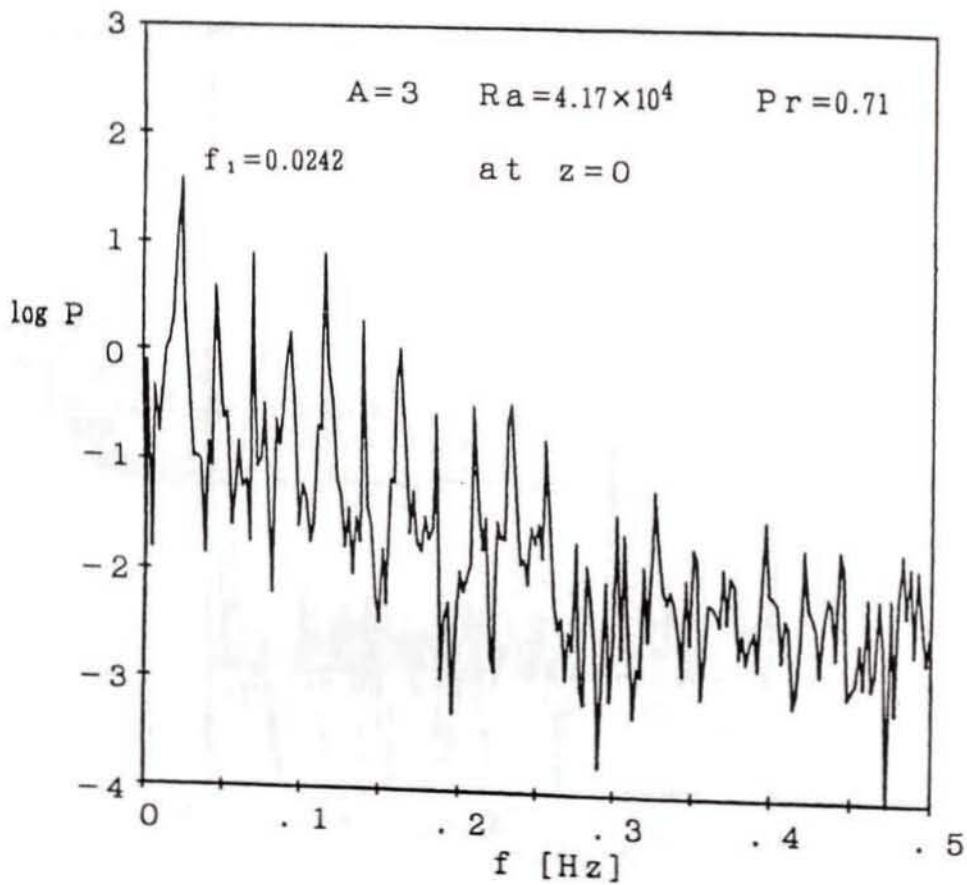


(b)

**Fig.4-7** (a) Time series of temperature, and (b) power spectrum of temperature at  $z = 0$  for  $A = 3$  and  $Ra = 3.51 \times 10^4$ .

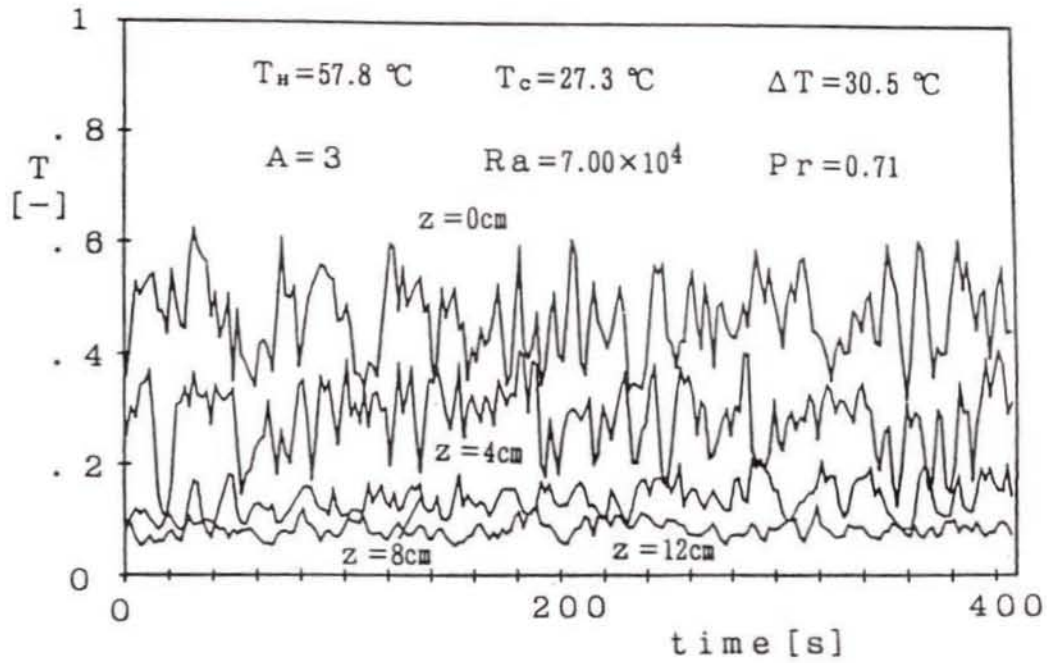


(a)

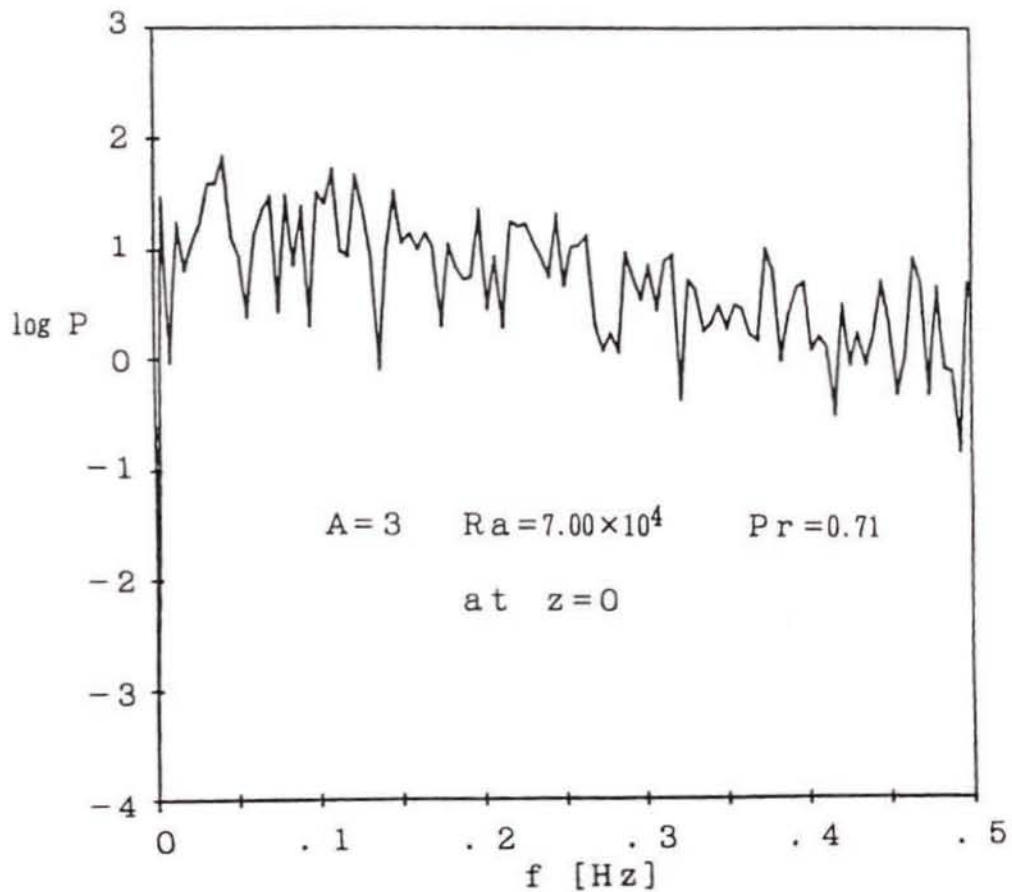


(b)

**Fig.4-8** (a) Time series of temperature, and (b) power spectrum of temperature at  $z = 0$  for  $A = 3$  and  $Ra = 4.17 \times 10^4$ .



(a)



(b)

**Fig.4-9** (a) Time series of temperature, and (b) power spectrum of temperature at  $z = 0$  for  $A = 3$  and  $Ra = 7.0 \times 10^4$ .

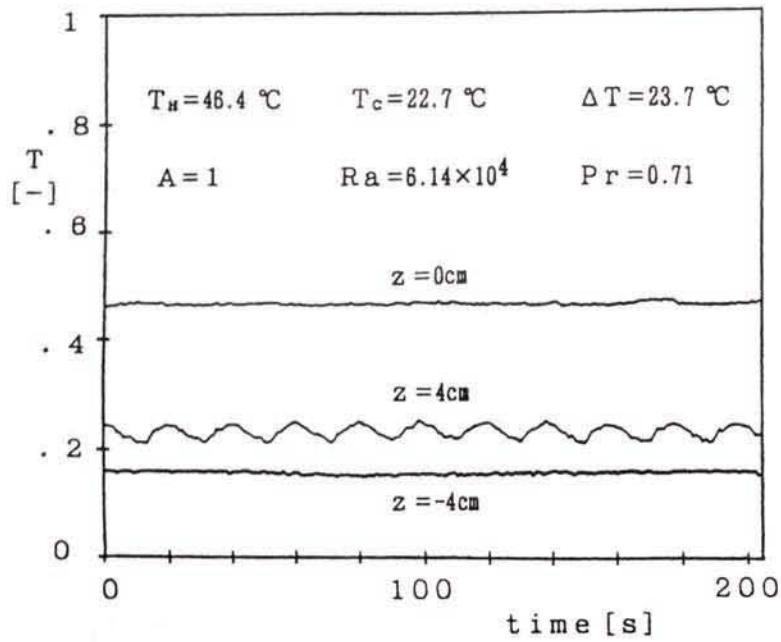


Fig.4-10 Time series of temperature for  $A = 1$  and  $Ra = 6.14 \times 10^4$ .

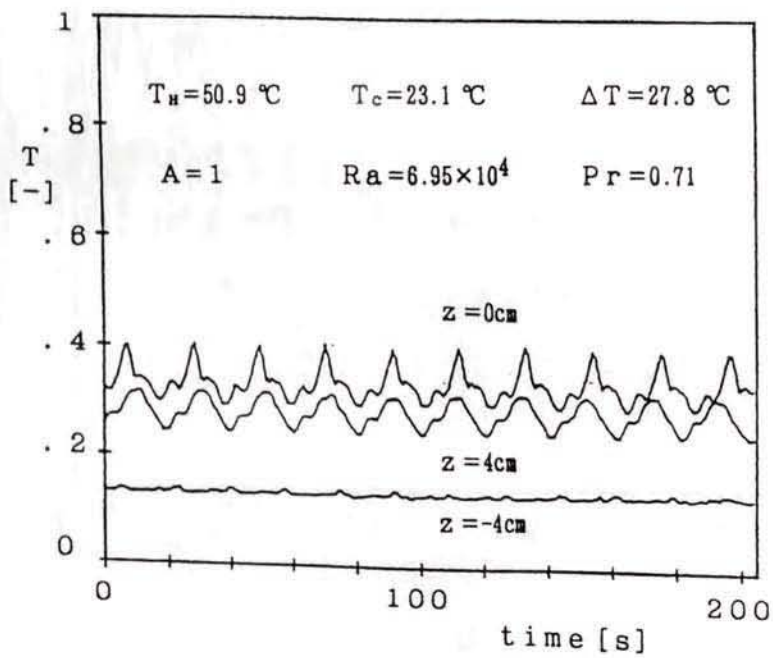
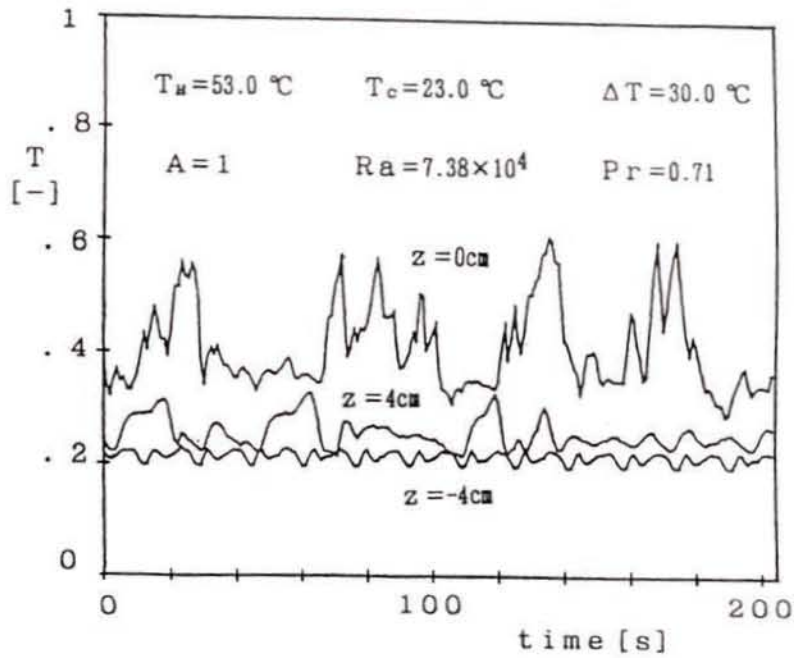
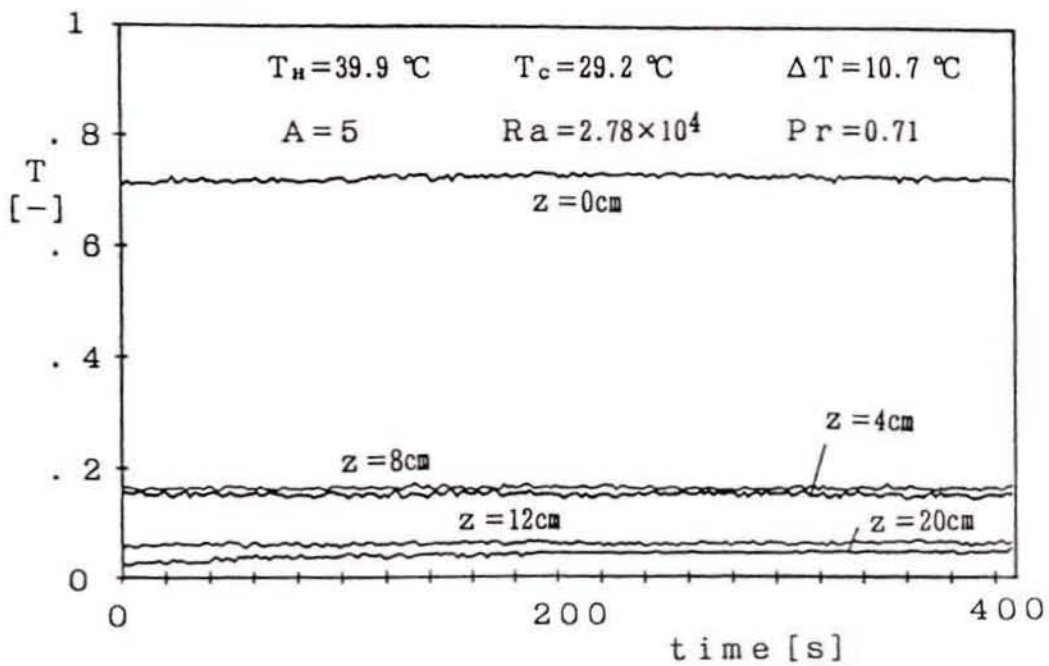


Fig.4-11 Time series of temperature for  $A = 1$  and  $Ra = 6.95 \times 10^4$ .





**Fig.4-12** Time series of temperature for  $A = 1$  and  $Ra = 7.38 \times 10^4$ .



**Fig.4-13** Time series of temperature for  $A = 5$  and  $Ra = 2.78 \times 10^4$ .

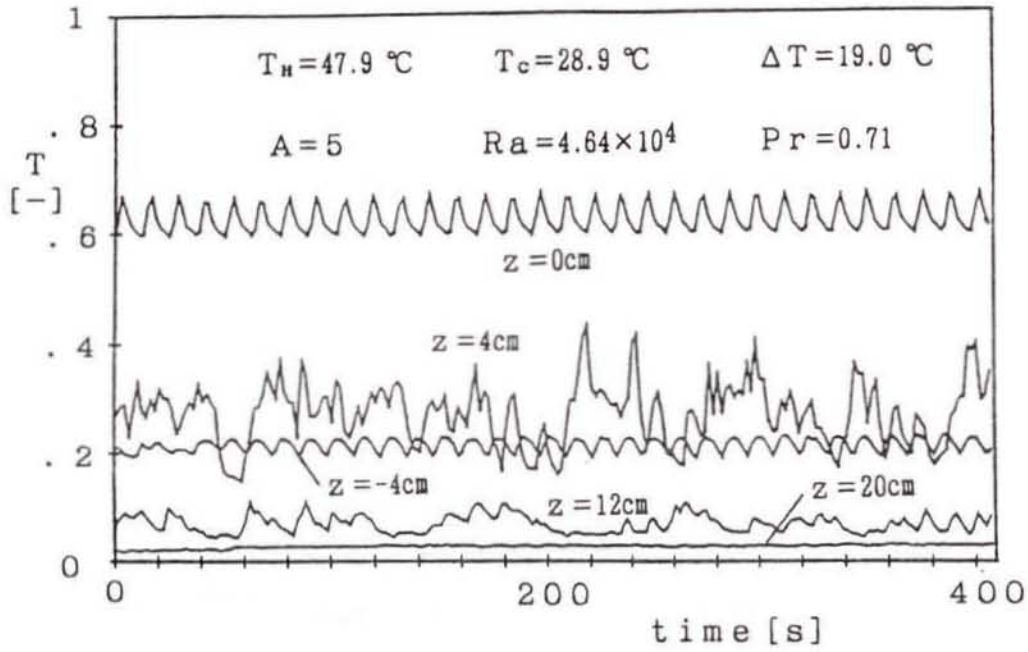


Fig.4-14 Time series of temperature for  $A = 5$  and  $Ra = 4.64 \times 10^4$ .

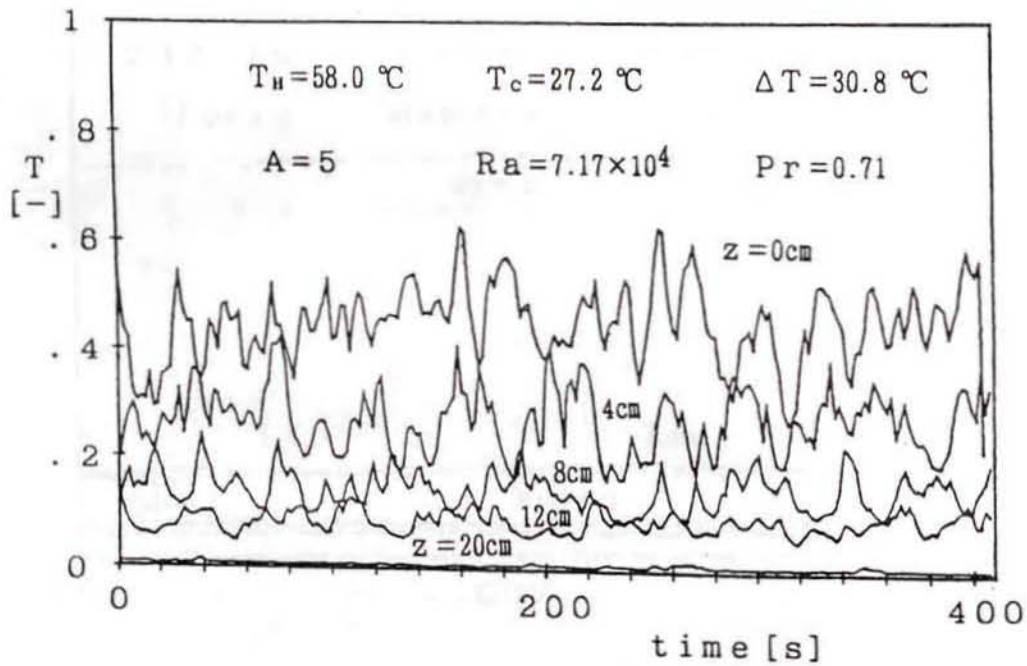
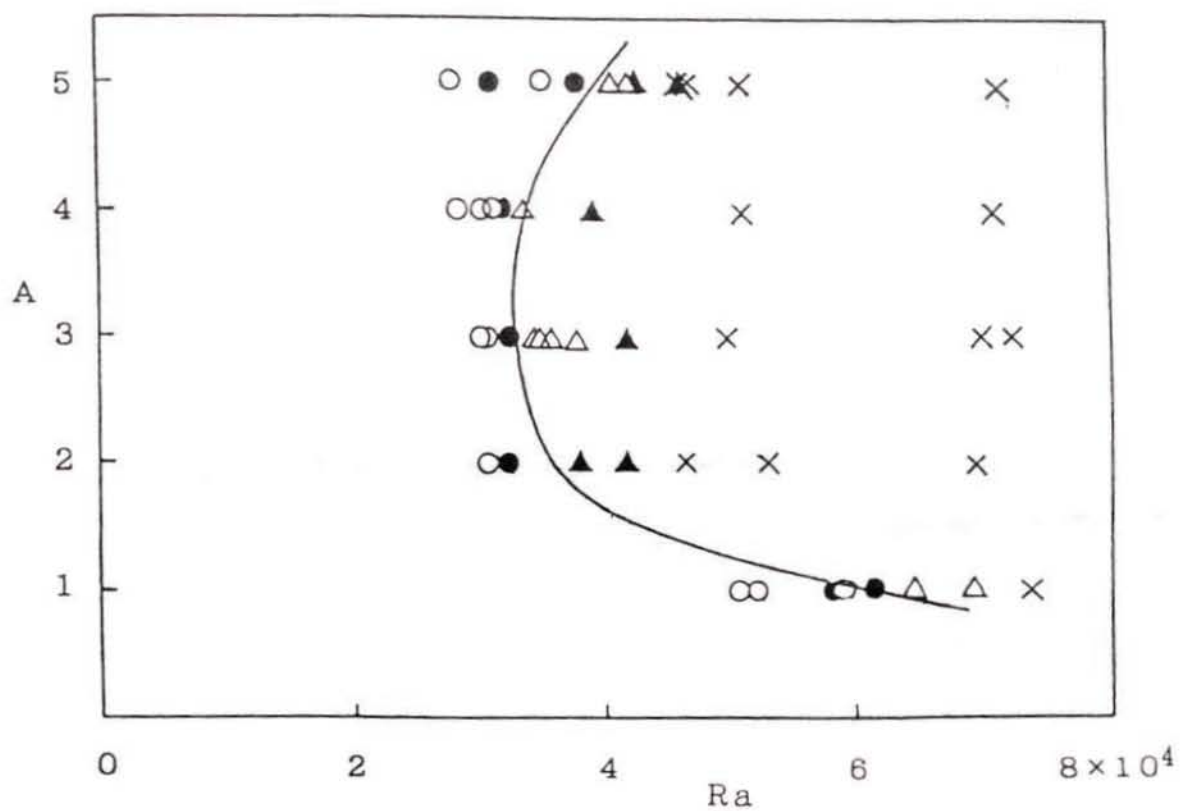


Fig.4-15 Time series of temperature for  $A = 5$  and  $Ra = 7.17 \times 10^4$ .



**Fig.4-16** The dependence of the geometry parameter on Rayleigh number for the onset of oscillations: ○; steady-state, ●; partial steady-state, △; periodic, ▲; partial periodic, ×; non-periodic motion

## 記号

$A$  : geometry parameter ( $=L_{C2}/L_H$ )

$d$  : diameter

$f$  : frequency

$g$  : acceleration due to gravity

$L$  : length of vertical cylinder

$L_{C1}$  : length of the lower cooling zone

$L_{C2}$  : length of the upper cooling zone

$L_H$  : length of the heating zone

$P$  : frequency power spectrum of temperature

$Pr$  : Prandtl number ( $=\nu/\alpha$ )

$Ra$  : Rayleigh number ( $=g\beta\Delta Td^3/\alpha\nu$ )

$T$  : temperature

$\Delta T$  : temperature difference between hot and cold walls ( $=T_H - T_C$ )

$z$  : vertical coordinate

$\alpha$  : thermal diffusivity

$\beta$  : coefficient of thermal expansion

$\nu$  : kinematic viscosity

## 参考文献

1. 鷺見弘一：オイルサンドーその回収と改質技術の現状ー。化学工学 10 (1979) 155-168.
2. J.M. Dealy: Rheological properties of oil sand bitumens. *Can. J. Chem. Eng.*, 57 (1979) 677-683.
3. T.G. Yortsos and G.R. Gavalas : Heat transfer ahead of moving condensation fronts in thermal oil recovery processes. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 25 (1982) 305-316.
4. J.P. Gollub and S.V. Benson : Many routes to turbulent convection. *J. Fluid Mech.*, 100 (1980) 449-470.
5. H. Yahata : Transition to turbulence in the Rayleigh-Bénard convection. *Prog. Theor. Phys.*, 68 (1982) 1070-1081.
6. 巽友正編：乱流現象の科学、東京大学出版会(1986)
7. M.J. Lighthill : Theoretical considerations on free convection in tubes. *Quart. Journ. Mech. and Applied Math.* 6-4 (1953) 398-439.
8. 長谷川修、山県清、西川兼康：開放形熱サイフォンにおける熱伝達（第1報、流動状態の観察結果）日本機械学会論文集（B編）28, 192 (1962) 930-939.
9. 長谷川修、森末道忠：開放形熱サイフォンにおける熱伝達（第2報、円管による熱伝達の実験結果）日本機械学会論文集（B編）28, 192 (1962) 940-946.
10. 長谷川修：開放形熱サイフォンにおける熱伝達（第3報、伝熱機構について）日本機械学会論文集（B編）28, 192 (1962) 947-960.
11. 北村健三、込山公一、斉藤武：密閉容器内自然対流の振動現象について。日本機械学会論文集（B編）50, 451 (1984) 845-851.
12. 香川詔士、野田清、坂田光雄、今里博教、宮内照勝：原油熱回収プロセスにおける温度観測井の実験的解析。石油学会誌、35,1 (1992) 56-64.

13. Y. Oshima : Experimental studies of free convection in a rectangular cavity, *J. Phys. Soc. Jpn.*, 30 (1971) 872-882.
14. J. Mizushima: Equilibrium solution of the secondary convection in a vertical fluid layer between two parallel plates, *Fluid Dynamics Res.*, 5 (1990) 289-299.
15. 坂田光雄、中筋広順、南博之：側壁部分加熱による鉛直円筒内熱対流の温度変化、和歌山高専研究紀要、28(1993) 19-24.

## 第5章

# 鉛直側壁部分加熱による 円筒内熱対流の数値計算





# 第5章 鉛直側壁部分加熱による円筒内 熱対流の数値計算

## 5.1 緒言

熱対流の研究は様々な系に対して数多く報告されているが、特にレイリー・ベナール対流系において対流発生、振動流の発生、準振動流、乱流と変化する幾つかの遷移過程が明らかになり、カオス研究として注目され活発に研究されている<sup>1~5)</sup>。また、ベナール対流系と加熱条件が異なった密閉容器内熱対流においても振動現象が報告されている<sup>6,7)</sup>。

本研究は、鉛直円筒の一部環状壁を加熱したときの内部に発生する対流を考える。前章で述べたように当初、原油熱回収時における監視用としての温度観測井の伝熱特性の解明を目的とした。オイルサンド等の流動性を失った油回収に水蒸気圧入法、火攻法、熱水圧入法などの熱的回収法がある。これらの方法において、地層内の温度伝熱変化を測定して油層位置を特定するための一つの方法として温度観測井が用いられる。温度観測井は、蒸気等により加熱された油層が井戸の一部側壁を加熱するため内部に対流が発生する。従って、鉛直方向の壁温分布と内部温度分布の関係を明確にする必要がある。このためには、円筒内に発生する対流運動の理解が必要であるが、多くの複雑な問題がある。つまり、この場合の対流は、時間依存性、レイリー数  $Ra$ 、プラントル数  $Pr$ 、アスペクト比、2次元または3次元現象、および流体物性値の温度依存性等、種々の因子に関係するためである。前章の実験においても複雑な振動特性を示すことがわかったが、実験条件の不備等が結果に反映していることが考えられる。そこ

で、モデルに対する数値実験から本質的な対流機構を考える。直径に比べ高さ方向の長さを短くし、軸対称ブジネスク流体と仮定した場合の解析を行う。従って、本研究は、密閉鉛直円筒の環状側壁を部分的に加熱した場合の円筒内部に発生する対流の基礎的特性— $Ra$  と共に対流の時間的空間的変化—を明らかにすることを目的としている。この場合の対流発生は、水平方向の温度分布が一定でないため浮力の不均一性によって対流が発生する。レイリー・ベナール系における流体層の不安定性の結果として発生する対流とは異なり、鉛直二平板間の自然対流に近い<sup>8,9)</sup>。しかし、水平方向の温度分布も空間的に異なる分布を持つため、かなり複雑な機構が予想される。

解析は、この種の問題に対してしばしば用いられる有限差分法を採用した。有限差分法は、時間項に対して前進差分を、拡散項に対して中心差分を用いた。非線形現象に対して、非線形項である対流項の取り扱いが特に重要と考えられる。そこで、対流項を2次精度の風上差分法<sup>11)</sup>と4次精度のArakawa差分法<sup>10)</sup>を用い、差分法の比較、 $Ra$ の効果、 $Pr$ の効果、上部冷却層長さを変えたときの空間の効果について明らかにした。

次節において、モデルと基礎方程式を記述する。5.3節では、差分法と計算手順を述べる。計算結果は、5.4節で2次精度の風上差分法の場合について簡単に述べ、Arakawa差分法を用いた結果を5.5節以降詳しく述べる。まず、プラントル数  $Pr = 0.72$  (空気) に対する結果として、 $Ra$ の増加と共に振動流が発生して、それが2<sup>n</sup>分岐特性を示しながら複雑化することを示す。5.6節では、 $Pr = 1, 5, 10$  と変えた場合の対流に対するプラントル数の効果を議論する。5.7節では、空間効果、特に不安定となる上部冷却層の長さを加熱層に比べて1, 3, 5, 10 と変えた場合の対流特性を議論する。5.8節では加熱壁から円筒内部への伝熱量をヌッセルト数  $Nu$  として評価し、 $Ra$ の効果、 $Pr$ の効果、空間効果の依存性を議論する。最後に、本章で得られた結果を整理する。

## 5.2 モデルと基礎方程式

Fig. 1 に示す鉛直円筒側壁の一部環状壁を加熱した密閉系を考える。この場合の対流場の大きさを規定する因子は、高さ  $L$ 、半径  $R$ 、加熱層長さ  $L_H$ 、上下冷却層長さ  $L_{C1}$  および  $L_{C2}$  がある。まず、基本モデルとして、加熱壁の長さは半径  $R$  の 2 倍とし、その上下に  $4R$  の長さの冷却壁を配置した場合を考える。頂部、底部の壁面も冷却されているものとする。従って、円筒のアスペクト比（高さ／半径）は 10 である。座標系は、加熱部中央の中心軸上に原点を置いた円柱座標系  $(z, r, \theta)$  を用いる。尚、5.7 節で議論する対流に及ぼす空間の大きさの効果に対するモデルは、後で述べる。

解析にあたって次の仮定をおく。

- (1) 流れおよび温度分布は軸対称である。
- (2) Boussinesq 近似が成立し、動粘度  $\nu$ 、熱拡散係数  $\alpha$ 、体積膨張係数  $\beta$  等の物性値は一定とみなす。
- (3) 加熱側壁の温度  $T_H$  および冷却側壁と頂部および底部壁面の温度  $T_C$  はそれぞれ一定に保たれている。

ここで時間  $t$ 、座標  $(z, r, 0)$ 、速度  $(u, v, 0)$  および温度  $T$  に対して以下の無次元数を導入する。

$$\left[ \frac{t\nu}{R^2}, \frac{z}{R}, \frac{r}{R}, \frac{uR}{\nu}, \frac{vR}{\nu}, \frac{T - T_C}{T_H - T_C} \right] \quad (5.1)$$

仮定 (1) から連続の式は、流れ関数  $\psi$  を導入することにより自動的に満足される。また、ナビエ・ストークス方程式から圧力を消去して得られる渦度  $\omega$  に対する方程式とエネルギー方程式が基礎方程式となる。従って、無次元基礎方程式は、次式となる。

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (5.2)$$

$$\omega = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(u\omega)}{\partial z} + \frac{\partial(v\omega)}{\partial r} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r\omega}{\partial r} \right) - \frac{Ra}{Pr} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rvT)}{\partial r} = \frac{1}{Pr} \left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right\} \quad (5.5)$$

数値計算法として有限差分法を用いた。風上差分法<sup>11)</sup>と Arakawa の方法<sup>10)</sup>の 2 種類を用い、特に Arakawa の方法の場合、非線形項は以下のようにヤコビアンに書き換え

られる。

$$\frac{\partial(u\omega)}{\partial z} + \frac{\partial(v\omega)}{\partial r} = J\left(\frac{\omega}{r}, \psi\right) \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial(uT)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rvT)}{\partial r} = \frac{1}{r} J(T, \psi) \quad (5.7)$$

ここで、 $J$ は、 $\omega/r$ または $T$ を $p$ とし、 $\psi$ を $q$ とすると次式で表される。

$$J(p, q) = \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial q}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial q}{\partial z} \quad (5.8)$$

式中の無次元パラメータは、以下のとおりである。

$$Ra = \frac{g\beta\Delta TR^3}{\alpha\nu} \quad (\text{Rayleigh number}) \quad (5.9)$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (\text{Prandtl number}) \quad (5.10)$$

鉛直方向の全領域を $-5 \leq z \leq 5$ とし、加熱巾は $-1 < z < 1$ である。境界条件は、壁でnonslip条件、中心軸上で軸対称条件を用いる。壁の無次元温度は、加熱壁で1、他の冷却壁はすべて0となる。尚、加熱壁と冷却壁の境は、0.5とした。

### 5.3 差分方程式と計算方法

計算方法は有限差分法（時間微分は前進差分、空間微分については中心差分）を用いた。本研究において振動流に注目していることから、速度および温度が大きくなった場合数値計算上非線形項（対流項）が重要となると考えられる。そこで、対流項に対して Torrance ら<sup>11)</sup>が用いた2次精度の風上差分（ドナー・セル法とも呼ばれる）の計算を行い、次いで4次精度の Arakawa 差分法<sup>10)</sup>を用いた計算を行った。

風上差分法は、(5.4)式と(5.5)式の対流項の代表項をとって説明すると、以下のよう  
に近似する。

$$\left(\frac{\partial u f}{\partial z}\right)_{i,j} \approx \frac{1}{\Delta z} \left( \frac{u_{i+1,j} + u_{i,j}}{2} f_{i,j} - \frac{u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2} f_{i-1,j} \right) \quad (5.11a)$$

$$\text{if } \frac{u_{i+1,j} + u_{i,j}}{2}, \frac{u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2} > 0$$

$$\approx \frac{1}{\Delta z} \left( \frac{u_{i+1,j} + u_{i,j}}{2} f_{i+1,j} - \frac{u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2} f_{i,j} \right) \quad (5.11b)$$

$$\text{if } \frac{u_{i+1,j} + u_{i,j}}{2}, \frac{u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2} < 0$$

ここで、添字  $i$  は、 $z$  方向の格子点、 $j$  は  $r$  方向の格子点を示し、 $\Delta z$  は  $z$  方向の刻み幅を示す。上式で仮に  $f$ （渦度  $\omega$  または温度  $T$ ）が一定の場合、中心差分近似と同形となり近似的に2次精度を与える。

Arakawa 差分法の場合は、(5.8)式のヤコビアンに対して以下の差分化を行う。

$$J_{i,j}(p, q) = \left( \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial q}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial q}{\partial z} \right)_{i,j}$$

$$\approx -\frac{1}{12\Delta z\Delta r} [(q_{i,j-1} + q_{i+1,j-1} - q_{i,j+1} - q_{i+1,j+1})(p_{i+1,j} + p_{i,j})$$

$$- (q_{i-1,j-1} + q_{i,j-1} - q_{i-1,j+1} - q_{i,j+1})(p_{i,j} + p_{i-1,j})$$

$$+ (q_{i+1,j} + q_{i+1,j+1} - q_{i-1,j} - q_{i-1,j+1})(p_{i,j+1} + p_{i,j})$$

$$- (q_{i+1,j-1} + q_{i+1,j} - q_{i-1,j-1} - q_{i-1,j})(p_{i,j} + p_{i,j-1})$$

$$+ (q_{i+1,j} - q_{i,j+1})(p_{i+1,j+1} + p_{i,j})$$

$$- (q_{i,j-1} - q_{i-1,j})(p_{i,j} + p_{i-1,j-1})$$

$$+ (q_{i,j+1} - q_{i-1,j})(p_{i-1,j+1} + p_{i,j})$$

$$- (q_{i+1,j} - q_{i,j-1})(p_{i,j} + p_{i+1,j-1})], \quad (5.12)$$

ここで、添字  $i, j$  は、上記風上差分時と同じであり、 $\Delta z, \Delta r$  はそれぞれの方向の刻み幅を示す。

計算手順は、まず、ある初期条件（等温静止流体層またはすでに得られた定常解）から時間  $\Delta t$  後の各格子点の渦度  $\omega$  と温度  $T$  をそれぞれ(5.4)式と(5.5)式から求める。ただし、壁面上の渦度は除く。次に、得られた  $\omega$  を楕円方程式(5.3)式に代入し、流れ関数  $\psi$  を逐次過緩和法を用い繰り返し計算から求める。最後に、流れ関数から壁面上の渦度と速度を求める。これらの計算を  $\Delta t$  進めるごとに繰り返し、最終的に定常状態または十分に発達した振動状態まで求める。

差分法において計算精度を上げるためには、格子点数を多くとる必要がある。しかし、格子点数を多くすると連立方程式の元数が増すだけでなく数値計算の安定性から時間刻みを大幅に小さくしなければならず<sup>11)</sup>、非常に多くの時間が掛かる事になる。以下の計算での代表的な刻み幅は、高さ方向を  $\Delta z = 0.1$ 、半径方向を  $\Delta r = 0.05$  として実行した（格子点数  $101 \times 21$ ）。時間刻み幅の例として、 $Ra = 10^4$  に対して  $\Delta t = 10^{-5}$  とした。レイリー数  $Ra$  の値が大きい場合は  $\Delta t$  を小さくして実行した。

以下、過渡的な変化については省略し、十分に発達した場合の代表的な結果について報告する。

## 5.4 風上差分近似による結果

まず、2次精度の風上差分法の結果を概説する。 $Pr = 0.72$ として $Ra$ を大きくしたとき、対流は、以下のTable 1のように変化した。つまり、 $Ra$ の増加と共に、対流の時間的空間的特性は、側壁温度条件に対応した3セル構造を持つ定常流→規則振動流→倍周期振動流→頂部に新たに安定なセルを加えた4セル構造の規則振動流→一部2つの異なる基本振動数を持つ準振動流が観察され、その後は4セル構造を持った規則振動を示した。

Table 1 Types of motion for  $Pr = 0.72$   
(Upwind method)

state	range
steady with 3 cells	$Ra < 8.7 \times 10^3$
simply periodic	$8.7 \times 10^3 \leq Ra < 10^5$
doubly periodic	$1.008 \times 10^5 \leq Ra \leq 3.6 \times 10^5$
simply periodic with 4 cells	$Ra = 7.2 \times 10^5$
quasi-periodic	$Ra = 1.44 \times 10^6$
simply periodic	$Ra \geq 7.2 \times 10^6$

対流項に対して精度を上げたArakawa差分の結果を次節以降において詳細に議論するため、ここでは風上差分法を用いて得られた特徴的な状態変化について説明する。

円筒内流体の初期条件として等温静止状態を用い、壁面温度がステップ状に上昇した時の非定常計算を実施し、定常状態まで続ける。次のパラメータに対しては、前の定常解を初期条件として経時変化を追跡した。興味の対象は定常状態にあるので、過渡的な変化は省略する。

本問題の加熱条件では、レイリー・ベナール対流系とは異なり、たとえ僅かでも水平方向に温度差があるため対流が発生する。 $Ra$ が小さい領域では、やがて定常状態に

達する。定常流における代表的な計算結果として、 $Ra = 7.2, 1.44 \times 10^3, 8.64 \times 10^3$ の等温線と流線を Fig.5-2 に示す。この計算では、グラスホフ数  $Gr (= Ra/Pr)$  を基準にしたため、 $Ra$  に変換した場合には数値に端数がでている。図の左側(a)は等温線図を、右側(b)に流線を示す。(A) $Ra = 7.2$ の場合、等温線は加熱壁( $-1 \leq z \leq 1$ )から内部へ上下対称に伝熱していることがわかる。特に  $z = \pm 1$  の加熱層と上下冷却層の境界において半径方向に一定温度 ( $T = 0.5$ ) を持つ。また、右側に示す流線から、流れは  $z = \pm 1$  を境に分離された逆向きの3セルが形成されている。加熱層内の流線は、負の値を持ち、加熱壁面で加熱された流体が上昇し円筒中心部を下降する流れを示し、上下冷却層内の流線は正の値を持ち、側壁で冷却され密度が大きくなるため下降する流れで、加熱層内とは逆向きの流れである。セルの中心は、それぞれ、およそ  $z = \pm 0.45, \pm 1.5$  にある。しかし、流れ関数の値は小さいことから伝熱は、対流効果が僅かであり、熱伝導のみによる場と近似されることがわかる。

$Ra$  を大きくした場合 (Fig.5-2(B),(C))、流れは、徐々に強くなり、加熱層内のセル中心位置に特徴的な変化が見られる。低  $Ra$  では加熱層に対して上下対称から、まず上方のみとなり、引き続いてその位置が下方に下がる。下部冷却層は上方ほど温度が高く密度が小さい安定成層であるため、温度分布も流れも大きな変化はないが、不安定層である上部冷却層内の流れはますます速くなり、頂部まで熱伝達が行われるようになる。

更に  $Ra$  を増加させると、振動流が発生する。 $Ra = 8.787 \times 10^3$  の結果は規則振動を示すが、振幅がきわめて小さいことから振動流発生臨界  $Rac$  と考えられる。振動流は  $Ra$  の値と共に Table 1 に示した時間的空間的な変化を示す。それらの代表的な結果の例として、円筒中心軸上の代表点における温度と軸速度の時系列を示す。規則振動時 ( $Ra = 1.008 \times 10^4$ ) の例を Fig.5-3 に、倍周期振動時 ( $Ra = 1.008 \times 10^5$ ) の時系列を Fig.5-4 に、4セル構造を持つ規則振動を示した  $Ra = 7.2 \times 10^5$  における時系列を Fig.5-5 に示す。Fig.5-3 は、一部過渡的变化から規則振動に移行する様子が理解される。下部冷却層の代表点  $z = -2$  は、ほとんど変化がなく、加熱層 ( $z = 0$ ) と上部冷却層 ( $z = 2, 4$ ) に大きな変動が存在している。これらの振動は、加熱層から上部に周期的にサーマルを吐き出すためである。Fig.5-4 は、温度および軸速度ともに大きな変動の後



に小さい変動が繰り返される倍周期振動を示す。更に  $Ra$  を大きくした  $Ra = 7.2 \times 10^5$  の場合、Fig.5-5 に示すように規則振動に戻った特性を示した。ただし、上部冷却層の  $z = 4$  における軸速度が、負の値を示している。この事は、対流構造が変わったため、一周期の代表的な時間における等温度線と流線の変化を Fig.5-6 に示す。加熱層からサーマルを吐き出し、それに伴って変化する流れがわかるが、頂部の中心軸から下降し  $z = 2$  付近から反転して半径  $r = 0.5$  付近を上昇する安定な第4番目のセルが存在している。更に、 $Ra$  を大きくした場合も対流構造は、基本的に4セルであった。

要約すると、 $Ra$  の増加と共に、近似的な熱伝導場 (Fig.5-2(A)) から加熱層と上部冷却層の流れが強くなり、それに伴って温度上昇が起こる定常対流場に変化する。更に  $Ra$  の増加により振動流が発生し (Fig.5-3)、それが周期倍分岐を起こす (Fig.5-4)。高  $Ra$  域では、頂部の冷却効果のため、頂部から中心軸を含む内部に新しいセルが発生し、時間特性は規則振動に戻る特性を示した (Figs.5-5,5-6)。

ここで、風上差分法の結果を考える。 $Ra > 10^7$  においても時間刻み  $\Delta t$  を小さくすれば、計算は発散することなく実行できた。しかし、従来報告されている自然対流や前節の実験結果において、 $Ra > 10^6$  では乱流状態にあると考えられる<sup>1</sup>。一方、一般に1次の風上差分法は、人工粘性を導入することにより数値計算の安定性を高めている。ここで用いた近似的に2次精度を持つ方法においても人工粘性を含む。そのため、 $Ra$  と共に人工粘性効果が増大し、高  $Ra$  での計算結果は、実質的にはかなり高粘度、つまり小さい  $Ra$  の場合に相当すると考えられる。また、規則振動から倍周期振動への分岐は非線形効果が重要な役割を持つため、対流項の差分精度の向上が必要と考えられる。

そこで、人工粘性効果はないと報告<sup>12)</sup>されている4次精度のArakawa差分法<sup>10)</sup>を用いて計算した。その結果は次節以降に述べる。

<sup>1</sup>前章の実験ではレイリー数  $Ra$  は円筒直径を基準としており、軸対称を仮定した本計算では半径を基準としている。従って、前章の  $Ra$  の  $1/8$  がここでの  $Ra$  に対応する。

## 5.5 $Pr = 0.72$ の場合の対流変化

Arakawa 差分法を用いて非定常軸対称の数値計算を  $Ra = 10^3 \sim 10^5$  の範囲において実行した。まず、前節の風上差分と同じくプラントル数  $Pr = 0.72$  (空気) と固定した場合について考察する。計算で得られた温度および軸速度の時間特性は、フーリエ変換して周波数パワースペクトル<sup>13)</sup>を求め評価し、また固定点の温度と軸速度の相図からも評価した。対流の空間的な特性は、等温度線と流線から評価した。

得られた解の流動状態は、Table 2 に要約される。対流は、レイリー数  $Ra$  が小さい場合、加熱層および上下冷却層にそれぞれセルを持つ 3 セル構造を示す定常解を持つ。この状態は、 $Ra$  を増加させると、規則的振動流が発生する。その時の臨界レイリー数は約  $6.9 \times 10^3$  に存在する。更に  $Ra$  の増加と共に振動流は、規則振動 → 倍周期振動 → 4 倍周期振動 → 8 倍周期振動 → カオス的状態へと  $2^n$  分岐特性に従い変化することがわかった。つまり、低  $Ra$  域では風上差分の結果と同様の結果が得られたが、振動流発生時の臨界レイリー数  $Rac$  は風上差分のときの約  $8.7 \times 10^3$  から  $6.9 \times 10^3$  に低下し、更に高  $Ra$  域では、まったく異なる結果を与える。

Table 2 Types of motion for  $Pr = 0.72$

(Arakawa method)

state	range
steady	$Ra \leq 6.8 \times 10^3$
simply periodic	$6.9 \times 10^3 \leq Ra \leq 2.2 \times 10^4$
doubly periodic	$2.3 \times 10^4 \leq Ra \leq 5.5 \times 10^4$
quadruply periodic	$Ra = 5.8 \times 10^4$
eight-fold periodic	$Ra = 6 \times 10^4$
chaotic	$Ra \geq 6.5 \times 10^4$

### 5.5.1 定常対流

$Ra$  が小さい場合の定常対流特性は、前節の風上差分の結果とよく一致する。それは流れが弱い場合、非線形の対流項は拡散項に比べ小さくなるため本質的に差は生じない。従って、定常対流の上限値に興味がある。風上差分では、 $Ra = 8.64 \times 10^3$ まで定常解を示し、本計算のArakawa差分では、 $Ra = 6.8 \times 10^3$ まで定常解を示した。つまり、定常解の範囲が約80%に低下したことになる。このことは、風上差分において導入される人工粘性効果によるものと理解される。

$Ra = 6.8 \times 10^3$ の場合の等温度線と流線をFig.5-7に示す。この結果とFig.5-2(C)の結果を比較すると、きわめてよく似た状態であることがわかる。定常解を示す $Ra$ の範囲が多少狭まったが、流れの変化は、前節の結果と同様である。つまり、定常解を示す範囲において、 $Ra$ が小さい時の $z = 0$ に対して上下対称な熱伝導場から側壁温度条件に対応した3セル構造をもつ対流が $Ra$ の増加と共に強くなり上下対称性が崩れていく。加熱層内では壁面から熱が流入し上方に運ばれ、 $z = 1$ で上部セルと熱交換して中心部を下降するため内部温度は相対的に低下する。 $Ra = 6.8 \times 10^3$ の時、中心軸上の最高温度点は約 $z = -0.7$ と中央より下がっている。上部冷却層内のセル中心は、約 $z = 2.6$ にあり、流れは加熱層より強く、頂部まで温度上昇がみられる。下部冷却層内温度は、安定成層のためほとんど変化が無いが中心部を上昇する対流のため伝熱が抑制される。つまり、 $Ra$ の増加と共に定常解は、加熱層に対して上下対称から加熱層と上部冷却層の境界 ( $z = 1$ ) に対する局所的対称場へと変化するといえる。

### 5.5.2 周期振動流の発生（分岐1）

次に $Ra = 6.8 \times 10^3$ の定常解を初期条件として $Ra = 7.0 \times 10^3$ を計算すると、Fig.5-8に示す規則振動現象が現れる。Fig.5-8(a),(b)は、円筒中心軸上の代表的な場所における温度と軸速度の時系列を示す。また、 $Ra = 6.9 \times 10^3$ の場合も同様に振動が確認されたが、振幅はきわめて小さい。この事から、ホップ分岐を起こす振動流発生の臨界レイリー数 $Rac_1$ は約 $6.9 \times 10^3$ に存在することがわかる。尚、風上差分を用いた場合、振動流発生の臨界レイリー数は、 $Rac_1 = 8.7 \times 10^3$ と評価された。この差分法による臨界

$Ra$ の低下は、風上差分における人工粘性のため安定化したと考えられ、Arakawa差分にはLeeとKorpela<sup>12)</sup>が指摘するように人工粘性効果はないと思われる。

本計算では、単純な規則振動は $Ra = 6.9 \times 10^3 \sim 2.2 \times 10^4$ の範囲において確認された。風上差分でも規則振動は確認できたがその範囲は、 $Ra = 8.7 \times 10^3 \sim 10^5$ であり、高 $Ra$ 域では大きな差が現れる。規則振動の代表的な例として $Ra = 10^4$ と $2.2 \times 10^4$ の結果をFigs.5-9,10に示す。 $z = 0$ と2における振動は同程度の振幅を示し、 $Ra$ の増加と共に周期を短くしながら振幅は大きくなる。一方、 $z = 4$ の振動は、 $Ra = 10^4$ において相対的に大きな振幅を示すが、 $Ra = 2.2 \times 10^4$ では振動幅が抑制されている。この振幅減少は、 $Ra$ の増加と共に頂部まで対流が達するため温度上昇が起こり、そのための浮力効果による安定化と考えられる。下部安定層の $z = -2$ における温度および速度は振動振幅は小さい。図の(c)の軸速度対温度の相図は、1本のリミットサイクルを示し、 $z = 0$ と2のそれは $(T, u) = (0.5, 0)$ の点に対して回転対称となっている。

### 5.5.3 分岐2 ( $2^1$ 分岐)

$Ra = 2.2 \times 10^4$ から更に大きい $Ra = 2.3 \times 10^4$ とした場合、Fig.5-11(a)の相図は、Fig.5-10(c)とは僅かではあるが異なり、2重ループを示す。2重ループは $z = 2, 4$ で顕著である。一般に $Ra$ の増加と共に振動周期は短くなる。 $Ra = 2.2 \times 10^4$ のとき、周期は0.0528で振動数はその逆数の $f_1 = 18.94$ であった。 $Ra = 2.3 \times 10^4$ の温度変動の時間的特性を調べるため、フーリエ変換する。 $z = 4$ の温度時系列に対する周波数パワースペクトルをFig.5-11(b)に示す。図から $f_1 = 19.61$ とその高調波にピークを持ち、さらに $f_1/2$ に小さいがピークを持つことがわかる。つまり、2つの周期を持つ周期倍化現象が起こったことを示し、臨界 $Rac_2 = 2.3 \times 10^4$ であることが分かる。更に、2重ループは $z = 2, 4$ で顕著であることから、上部冷却層の上部からの不安定性による2次分岐が起きると考えられる。

$Ra = 2.3 \times 10^4 \sim 5.5 \times 10^4$ の範囲で周期倍化振動を示した。代表的な例として $Ra = 2.4 \times 10^4$ と $5.5 \times 10^4$ の結果をFigs.5-12,13に示す。いずれの点における温度と軸速度の時系列も大きな変動の後に小さな振幅を持ち、それらが規則的に繰り返される分調波分岐(周期倍化)特性を示している。単純な規則振動を示す領域では $Ra$ と共に

$z = 4$ の軸速度の変動が、徐々に縮小傾向を示してきたが、周期倍化振動になって再び大きな変動を示す。この理由は、 $z = 4$ における振動が $f_1/2$ のゆっくりした振動数に支配されるためと考えられる。分調波流れの特徴は、軸速度と温度の相図から、 $z = 0$ と2の回転対称性の消失とみることもできる。

Fig.5-14に $Ra = 5.5 \times 10^4$ の場合の特徴的な等温度及び流線を示す。(a)は加熱層から上方にサーマルが吐き出され状態を示す。 $z = 2$ における軸速度が負の値を示す場合で、上部冷却層の中心軸近くに第4番目のセルが起こる。これは、サーマルの前面に冷たい流体が残されているため発生し、さらにサーマルの上昇速度を抑える働きをする。このセルは間もなく消失する。(b)は加熱層内中心の流れが強い状態で、活発に円筒内に伝熱されている。(c)は加熱層中心の軸速度が正を示す時の流れ状態で加熱層内の中心軸付近に別のセルが発生している。これは(a)のとき発生したセルとは逆に中心軸付近に熱い流体が残されているために起こる。これら2次流れによって倍周期振動は特徴づけていることがわかる。つまり、加熱層からサーマルは、振動数 $f_1$ によって吐き出されるが、引き続いて吐き出された2つのサーマルの一方には過渡的なセルが発生し、他のサーマルにはセルの発生がない。過渡的なセルが発生すると上部冷却層を上昇するサーマルの速度が抑えられるため、倍周期振動特性を示すものと考えられる。

#### 5.5.4 分岐3 ( $2^2$ 分岐) およびカオスの振動

$Ra = 5.8 \times 10^4$ の相図は、2重ループから異なった結果を示した。温度および軸速度の時系列のパワースペクトルは、 $f_1, f_1/2$ とその高調波にピークを持ち、更に $f_1/4$ とその高調波に弱いピークが観察される。ここで、基本振動数 $f_1$ は、加熱層の $z = 0$ のデータに対するパワースペクトルの最大ピークを示す振動数と定義する。 $f_1/4$ にピークが存在することから $Ra = 5.8 \times 10^4$ において $2^2$ -(4倍周期)分岐が起こったと考えられる。

$Ra = 6 \times 10^4$ の場合、Fig.5-15に示す時系列より4倍周期的振動状態を示すことがわかる。つまり、温度と軸速度の時系列は、4個の極大および極小値が規則的に繰り返す振動である。しかし、その時の相図(Fig.5-15(c))は、基本的には4重ループを示

すが更にそのまわりに変動が見られる。そこで、この時のパワースペクトルを調べる(データ数  $n = 2^{12}$ 、サンプリングタイム  $\Delta t = 2 \times 10^{-4}$ )。その結果は、Fig.5-16に示されるようにすべての観測点  $z = 0, 2, 4$  において  $f_1/4 = 9.288$  とその高調波にピークを持っている。しかし、場所によってパワースペクトルの特徴が異なる。つまり、 $z = 0$  における最大ピークは基本振動数  $f_1 = 37.15$  に観測され、他の場所では、最大ピークは  $f_1/2$  に現れる。そして、 $f_1/8$  の高調波が、上部冷却層の上方ほど、また高振動数域ほど明確に現れる。従って、 $Ra = 6 \times 10^4$  において  $2^3$  分岐が現れていると思われる。

$Ra = 7.2 \times 10^4$  の結果は、Fig.5-17に示す。この場合、基本的に4倍周期的振動を示す頻度が高いが同時に間欠的な大きな乱れも含まれている。特に安定層である  $z = -2$  に特徴的な間欠的乱れが起こる。また、相図(Fig.5-17(c)) はカオスの特徴を示すことが分かる。

ここで、計算精度のチェックのため、差分メッシュを倍 ( $201 \times 21$ ) にして計算を行い、( $101 \times 21$ ) メッシュの結果と比較する。 $Ra = 7.2 \times 10^4$  の温度および軸速度の時系列変化は、ほとんど同じで間欠的変動を含む特性を示した。パワースペクトルから基本振動数  $f_1$  を比較すると、( $101 \times 21$ ) メッシュで  $f_1 = 41.02$ 、( $201 \times 21$ ) では  $f_1 = 40.83$  とよく一致していた。

更に高  $Ra$  に対する計算は、 $Ra = 10^5$  を実行した。結果は、 $Ra = 7.2 \times 10^4$  と類似で基本的には周期振動特性を持ちながらも間欠的な大きな乱れの出現頻度が増加してくる。この事から  $Ra = 10^5$  程度以上では乱流として取り扱う必要があると思われる。

前節の風上差分では頂部付近に安定な第4番目のセルが出現する構造上の遷移が現れたが、本計算では確認できなかった。これは、風上差分に必然的に導入された人工粘性効果によるものと考えられ、プラントル数が大きい場合に起こると考えられる。事実、次節において  $Pr \geq 5$  ではセル構造の遷移が現れる。Arakawa 差分は4次精度の正確度を持ち人工粘性効果はないと考えられ、そのため  $2^n$  分岐特性が確認できたと考えられる。 $2^n$  分岐は、ベナール対流系において、実験的、理論的に観察されている<sup>2,4)</sup>。また、4章で述べた実験に対しても、風上差分の結果より Arakawa 差分の方がより定性的に近い臨界  $Rac$  を与える。

## 5.6 プラントル数の効果

プラントル数  $Pr = 0.72$  の場合について前節でみたように、 $Ra$  の値と共に、定常対流から振動流が発生して、更に2<sup>nd</sup>分岐過程を示した。ここでは、プラントル数が対流に及ぼす影響を調べるため、 $Pr$  を 1, 5, 10 と変えた場合について計算を行い、考察する。

その計算結果の概要を  $Pr = 0.72$  の場合も含めて Fig.5-18 に示す。対流運動の状態は、前節でみたように定常対流 (S)、規則振動 (S P)、倍周期振動 (D P)、4 倍周期振動 (Q P)、8 倍周期振動 (E P)、カオス的不規則振動 (C) に加えて、3 倍周期振動 (T P) や基本振動数  $f_1$  とその高調波を含む振動状態から新たな振動数  $f_2$  ( $f_1$  と  $f_2$  は実数比) が加わった準振動 (q P) が観察された。また、前節で観察されたセル構造は、高  $Ra$  で過渡的なセルの生成消滅を観察したが、平均場としては3セル構造であった。プラントル数を5以上にすると高  $Ra$  で新たに安定なセルが円筒頂部付近に発生する4セル構造を示す。この状態の時間特性は、3倍周期振動や準振動であることから  $TP_4$  あるいは  $qP_4$  として図中に示す。尚、数値計算は典型的な  $Ra$  の値について計算を実行しているため、分岐点は明確な値ではなく、おおよその値を示している。

図から振動流は、 $Pr$  の値と共に、より小さいレイリー数で発生すること、また規則振動の領域が拡大することがわかる。また、 $Pr = 1$  の場合、 $Pr = 0.72$  同様2<sup>nd</sup>分岐過程を示すが、 $Pr \geq 5$  ではおおよそ規則振動流からセル構造の遷移とほぼ同時に時間特性も変わることがわかる。以下、特徴的な  $Pr$  依存性について述べる。

### 5.6.1 振動流発生

定常解を示した各  $Pr$  に対する上限と思われる場合の等温度線と流線を Fig.5-19 に示す。 $Pr = 0.72$  の場合の Fig.5-7 も含め比較すると、左側の等温度線は、 $Pr$  の増加と共に多少温度上昇の範囲が減少しているが、よく似た分布を示している。一方、右側の流線は、 $Pr$  と共に流れ関数の最大値が小さくなり穏やかな流れを示す。このことは、温度分布がほぼ同じと考えると、エネルギー方程式の拡散項は対流項に  $Pr$  を掛けた値とバランスするため、流速が  $Pr$  に反比例することになり、流線の値が低下すると考えられる。加熱層内のセル中心位置は、 $Pr = 0.72$  で加熱層中央より下方に位置していたもの

が  $Pr$  と共に、また  $Ra$  の低下に伴いその位置を上方に変える。定常解は、 $z = 0$  に対して上下対称な近似的な熱伝導場から  $z = 1$  に対する局所反対称場になると考えられ、各  $Pr$  に対しても言える。

各々の  $Pr$  に対して、Fig.5-19 に示した値より  $Ra$  を大きくすると、振動流が発生する。これは、等温度線の  $z = 1$  でほぼ一定の  $T = 0.5$  と  $T = 0.3$  をみると、どの  $Pr$  についてもよく似た分布を示しており、加熱層から上部冷却層への定常対流場での伝熱量がある限界値を持ち、それ以上の  $Ra$  では不安定になると思われる。

振動流発生の臨界  $Rac$  は、 $Pr$  に対して大略以下の相関式に近似され、

$$Rac = 6.3 \times 10^3 Pr^{-0.28} \quad (5.13)$$

$Pr$  と共に低下する。確認のため、 $Pr = 20$  と  $100$  の場合の振動流発生条件を調べたところ、いずれの場合も  $Rac \approx 3.1 \times 10^3$  で  $Pr$  が大きい場合一定値に近づく傾向を持ち、上式は  $Pr$  が  $10$  程度までの適合性を持つと考えられる。本研究対象の円筒部分加熱における振動流発生条件については、ほとんど研究報告が見当たらない。鉛直方向に長い二平板間や二重管環状路の対流研究<sup>14~16)</sup>が参考となる。この時のプラントル数依存性はかなり複雑で、 $Pr$  が小さい場合熱せん断不安定、 $Pr$  が大きい場合は浮力不安定を示し、 $1 < Pr < 15$  の中間領域は両者の不安定性が関係して、十分には解明されていないように思われる。

Rogers ら<sup>16)</sup>は、密閉鉛直二重管環状路の外管を断熱し、内管から一定熱流束で加熱した場合の対流に対して、線形安定論により流れが不安定化する臨界グラスホフ数  $Gr_c$  を求めている。環状路の隙間に大きく影響され、円筒の内半径  $r_i$ 、外半径  $r_o$  としたとき、 $r_i/(r_o - r_i) = 0.6$  の場合、 $Pr < 0.4$  ではせん断不安定を示し  $Gr_c$  は約  $1.4 \times 10^4$  とほとんど変化せず、 $Pr > 0.4$  では浮力不安定が支配的となり、 $Gr_c$  は  $Pr$  の値と共に急速に低下して  $Pr > 50$  で約  $700$  の一定値を示す結果を得ている。これらの結果は、本研究対象と比較した場合、加熱層内の流れが多重セル化またはそれらが時間変動を起こす臨界点を調べていることに対応しており、本現象の加熱層から上部冷却層への伝熱不安定とは異なると考えられる。振動流発生条件に対する  $Pr$  の効果や加熱層長さの効果は、更に検討する必要があると思われる。



## 5.6.2 分岐過程

振動流発生後の  $Ra$  を増加させたときの流れの分岐過程は、 $Pr$  の値により異なる経過を辿る。 $Pr$  が小さい  $Pr = 1$  の場合は、前節の  $Pr = 0.72$  とよく似た  $2^{\text{nd}}$  分岐過程を示す。しかし、各分岐点の  $Ra$  の値は異なる。振動流発生は、 $Ra \approx 6.3 \times 10^3$  と  $Pr = 0.72$  の場合に比べ 91% に低下するが、倍周期分岐は  $Ra \approx 2.4 \times 10^4$  とほぼ同じ値において観察された。更に、4 倍周期分岐は、 $Ra = 7 \times 10^4$  において観察され、 $Pr = 0.72$  の  $5.8 \times 10^4$  よりはるかに大きい。また、 $Ra = 1.2 \times 10^5$  においても 8 倍周期振動を示した。つまり、振動流は  $Pr = 0.72$  より低い  $Ra$  から観察されるが、 $Ra$  が大きい領域では比較的穏やかな流れを示し、高  $Ra$  域においても層流的流れを示す。 $Pr = 1$  の代表的な例として、倍周期および 4 倍周期特性を示した  $Ra = 5 \times 10^4$  と  $10^5$  の結果を Figs.5-20,21 に示す。

プラントル数を大きくした場合、 $Ra$  の増加に伴う分岐過程は、 $2^{\text{nd}}$  分岐は現れない。 $Ra = 5 \times 10^4$  の場合の  $Pr = 5, 10$  の結果を Fig.5-22,23 に示す。いずれも規則振動特性を示すが、加熱層  $z = 0$  に低温の流体が流れ込む時と上部冷却層の  $z = 2$  をサーマルが通過するとき、温度時系列は細かい振動を示す。これは、軸速度には見られず、温度特有の変動である。 $Pr = 5$  に対する Fig.5-22 は、差分格子点をこれまでの倍 ( $201 \times 21$ ) にして計算した結果である。 $(101 \times 21)$  メッシュの結果は、 $Pr = 10$  に対する Fig.5-23 に示される  $z = 0$  の最小値を示す付近と  $z = 2$  の最大値を示す付近に細かな振動があり、これと同程度であった。 $(201 \times 21)$  では Fig.5-22 の結果のようになりになっている。従って、数値精度に依存した乱れが存在すると思われる。

$Pr = 5, 10$  における高  $Ra$  における対流は、以下に述べる構造変化を示す。

## 5.6.3 対流構造の変化

$Pr = 5$  において  $Ra = 8 \times 10^4$  の温度と軸速度の時系列 (Fig.5-24) をみると、おおよそ 3 つのピークが繰り返される特徴を示す。更に、 $z = 4$  における軸速度は負の値を示し変動も小さくなり、それに対応する温度変動もほとんど消失している。このとき

の温度時系列のパワースペクトルを調べると、Fig.5-25に示すように基本振動数 $f_1$ とその整数倍に大きなピークを持ち、また $f_1/3$ とその整数倍にピークを持つことがわかる。 $Pr$ が小さいときは、周期倍加分岐で $f_1$ の $1/2$ ,  $1/4$  ・・等の振動数が現れたが、 $Pr = 5$ では基本振動数の $1/3$ の振動数が現れ3倍周期特性を示す。

このときの対流構造を調べため、Fig.5-26に特徴的な時間における等温度線と流線を示す。 $Pr = 0.72$ でもFig.5-14で観察された過渡的なセルが加熱部と上部冷却層の中心軸付近にできるが、最も特徴的なことは上部冷却層の頂部に安定な新しいセルが発生していることである。つまり、 $Ra = 7 \times 10^4$ と $8 \times 10^4$ の間において対流構造が3セルから4セルに移行する遷移点が存在する。この新しいセルは、頂部から中心軸を下降し $r = 0.4$ 付近を上昇しており、中心軸を囲む狭い領域に限定されるため軸対称条件の制約から水平方向の温度勾配が小さく、他のセルの振動に対して比較的安定である。

Arakawa 差分法においては、 $Pr = 0.72$ と1では観察されなかったが、風上差分法において $Pr = 0.72$ においてもFigs.5-5, 6に示したように $Ra = 7.2 \times 10^5$ の場合にも4セル構造流れが観察された。この事は、風上差分における人工粘性効果のため、 $Pr = 0.72$ としていても高 $Ra$ で見かけ粘度のため $Pr = 5$ と同様の結果が現れたと考えられる。

$Ra$ を更に大きくした場合、構造は4セルで時間特性はかなり不規則な振動を示し、準振動的状態になる。 $Ra = 1.2 \times 10^5$ の場合、計算は発散した。

$Pr = 10$ の場合、 $Ra = 8 \times 10^4, 9 \times 10^4$ では規則振動を示し、セル構造の遷移は認められず、 $Ra = 10^5$ において確認された。そのときの温度と軸速度の時系列をFig.5-27に示す。時間特性は、倍周期的特徴に低振動数の乱れが重なっている。そのため、相図は、多重ループを示している。この場合の温度パワースペクトルをFig.5-28に、代表的な等温度線と流線をFig.5-29に示す。振動ピークは $f_1$ に最大値を持ち、 $f_1/2$ とそれらの整数比の関係にない小さな $f_2 \approx 1.22$ の高調波が現れ、準振動特性を示す。セル構造は、Fig.5-26同様安定な4つのセルがある。セル構造の遷移が $Pr = 5$ より高 $Ra$ において発生したことは、 $Pr$ が大きいほど高次分岐に対して安定であると思われる。

### 5.6.4 振動数

プラントル数の効果を調べてきたが、ここで振動特性の整理として基本振動数  $f_1$  (加熱層中央における温度時系列の最大ピークを示す振動数) を各  $Pr$  について比較する。代表的な  $Ra$  の値に対する  $Pr$  と  $f_1$  を Table 3 に示す。この結果から、加熱層内の振動数は、 $Ra$  が大きいほど、また  $Pr$  が小さいほど大きいことがわかる。 $Pr$  つまり動粘度が大きいほど、運動を抑制すると理解される。

Table 3 Fundamental frequency

$Ra$	$Pr$	$f_1$	type of motion*
$10^4$	0.72	9.615	S P
	1	7.813	S P
	5	2.445	S P
	10	1.372	S P
$2 \times 10^4$	0.72	17.58	S P
	1	14.49	S P
	5	4.854	S P
	10	2.762	S P
$5 \times 10^4$	0.72	33.33	D P
	1	28.17	D P
	5	9.980	S P
	10	5.960	S P
$10^5$	0.72	47.42	C
	1	42.06	Q P
	5	17.09	q P <sub>4</sub>
	10	10.20	q P <sub>4</sub>

\* S P : simply periodic、 D P : doubly periodic、  
 Q P : quadruply periodic、 q P<sub>4</sub> : quasi-periodic  
 with 4 cells、 C : chaotic

## 5.7 空間の効果

熱対流は、レイリー数、プラントル数と空間の大きさに依存する現象である。ここでは、上部不安定層の大きさが対流運動にどのように影響するか調べる<sup>18)</sup>。

円筒側壁には半径  $R$  の 2 倍の長さの一定温度  $T_H$  の加熱壁を配置し、その上下に適当な長さの冷却壁（一定温度  $T_C$ ）を置く。また、底部および頂部壁面の温度も一定温度  $T_C$  とする。この時、空間を定義するパラメータは、円筒長さ  $L$ 、加熱層長さ  $L_H$ 、下部冷却層長さ  $L_{C1}$ 、上部冷却層長さ  $L_{C2}$  とすると、

$$\Gamma = \frac{L}{R}, A_1 = \frac{L_H}{R}, A_2 = \frac{L_{C1}}{L_H}, A = \frac{L_{C2}}{L_H} \quad (5.14)$$

となる。前節まで、加熱層を円筒中央部に置き、上下冷却層を加熱層の 2 倍の長さとした場合 ( $\Gamma = 10, A_1 = 2, A_2 = 2, A = 2$ ) について解析した。その結果から下部冷却層は安定成層であるため対流の影響が少ないことから  $A_2 = 1$  と小さくし、複雑な変化を示す上部冷却層の空間の大きさが流れに与える効果を調べるため、その長さを  $A = 1, 3, 5, 10$  と変えて解析する。この時の座標系とモデルは Fig.5-30 となる。アスペクト比  $\Gamma$  はそれぞれ 6, 10, 14, 24 に対応する。尚、 $A_1 = 2$  である。また、プラントル数  $Pr$  は、0.72 (air) と固定して計算した。

### 5.7.1 定常対流

本問題の加熱条件では、たとえ低レイリー数であっても加熱壁と冷却壁近く ( $z \approx \pm 1$ ) の温度分布は水平方向の勾配を持つため対流が発生する。5.5 節で述べた結果と同様に上部冷却層の長さを変えた計算においても、 $Ra = 6.8 \times 10^3$  まで定常解を示した。

Fig.5-31 に  $A = 1$  と 10 の結果を示す。図の左側が等温線、右側は流線を示す。 $A = 1$  の場合は空間が狭いため、頂部まで活発な対流伝熱を示す。一方、 $A = 10$  では  $T = 0.1$  の等温線が約  $z = 5$  までしか届かず、 $z \geq 9$  の上部は静止状態と見なせる。下部冷却層および加熱層内の温度分布と流れは、 $A = 1$  と  $A = 10$  でまったく同じである。このことから、定常対流においては、上部冷却層の大きさは加熱層内の対流に影響を与えず、また加熱層から流体内部への伝熱量も同じである。

$Ra$  を更に大きくすると、以下で述べる振動流がすべての  $A$  において発生する。

## 5.7.2 振動流発生

$Ra = 6.8 \times 10^3$ の定常解を初期条件として、 $Ra = 6.9 \times 10^3$ にした時の計算結果は、いずれの  $A$  の場合も振動解を示す。しかし、温度および軸速度の時系列は、極めて振幅の小さい振動であることから、振動流発生の臨界レイリー  $Rac$  の値は約  $6.9 \times 10^3$  と考えられ、上部冷却層長さの影響を受けない。この臨界値を決める条件は、加熱層から伝達される熱量を上下の冷却層へ定常的に伝達できる状態から定常セル運動では伝達しきれなくなり伝熱量を増加させるために振動流が発生すると思われる。5.6節でみたように  $Pr$  の値を大きくすると  $Rac$  は小さくなる。また、加熱層幅を変えても伝熱量が変わるため  $Rac$  は変わると考えられる。

振動流の代表的な結果として、 $A = 10$ 、 $Ra = 10^4$ の温度の時系列を Fig.5-32 に示す。図は、中心軸上の代表点 ( $z = 0, 2, 6, 10$ ) における温度変動を示す。加熱層の  $z = 0$  と上部冷却層の  $z = 2$  は大きな変動を示し、 $z = 6$  では鋭いピークを持った変動を、 $z = 10$  では微小振動を示し、 $z$  と共に温度低下を示す。Fig.5-33 に Fig.5-32 の  $z = 0$  の温度時系列の最小値と最大値を示す場合に対応する等温線と流線を示す。振動は、加熱層から上部冷却層に高温流塊 (サーマル) を周期的に吐き出す特徴を持ち、流れの変化とサーマルの動きが図から分かる。しかし、 $z \geq 13$  以上の領域では温度上昇も流れもなく、対流効果がないことが分かる。加熱層から遠く離れた上部で対流効果がなくなることは、実験的にも確認されている (Fig.4-1 参照)。Fig.5-31(b) と Fig.5-33 の比較から、 $Ra$  の増加と共に対流場が上部に拡大されることが分かる。 $Ra = 2 \times 10^4$  では  $T = .01$  の温度が  $z = 19$  まで達し  $A = 10$  の空間全体に対流が及ぶ。空間が小さい場合 ( $A \leq 5$ )、対流は低  $Ra$  においても頂部まで達し、頂部端効果を受ける。

## 5.7.3 $Ra = 5 \times 10^4$ の場合の空間効果

上部冷却層の空間効果を調べるため、 $Ra = 5 \times 10^4$  と固定して  $A$  を変えて解析した。その結果として、温度および軸速度の時系列を Figs.5-34~36 に示す。 $Ra$  が同一であることから、加熱層内の振動周期は0.03といずれの場合も同じで、良く似た時系列を示すが、詳しく調べると違いがある。 $A = 1$  の空間が小さい場合 (Fig.5-34) は、温度及び

軸速度とも振幅は他に比べ小さい。時間特性は、 $A = 1$ は倍周期、つまり異なる2つの波形が規則的に繰り返される特性を示す。 $A = 5$ (Fig.5-35)では、 $z = 0$  (実線)で一見4つの異なる波形が繰り返されているが、良く見ると8つの波形が繰り返す振動を示す。また、 $z = 2$ の波形は、 $z = 0$ の波形と比較して1つのピークが消え2倍の周期が支配的になり、 $z = 8$ では更に $z = 0$ の2倍の周期を持った倍周期特性が顕著になっている。 $A = 3$ の結果も $A = 5$ と同様の振動モードであった。 $A = 10$ の場合(Fig.5-36)は、一見倍周期であるが、詳しく見るとわずかづつ波形が異なり、厳密には規則性を持たないことが分かる。つまり、 $A = 1$ は倍周期、 $A = 3, 5$ で8倍周期、 $A = 10$ で不規則振動となり、空間が大きいほどより複雑な振動特性を示すことがわかる。また、上部冷却層の上方ほど、その振動周期は、 $z = 0$ の周期の2倍の特性が顕著になる。軸速度は上部冷却層の中央部に最大値を持ち、 $A$ が大きいほど変動幅が大きい。これらの時間特性は、時系列データをフーリエ級数に展開しパワースペクトルから考察される。

Fig.5-37に $A = 5$ の温度データに対するパワースペクトルの例(サンプリング時間 $\Delta t = 2 \times 10^{-4}$ 、データ数 $N = 2^{12}$ )を示す。ここで、基本振動数 $f_1$ は、加熱層内の時系列データに対する最大ピークを示す振動数と定義する。図(a)は、 $(z, r) = (0, 0)$ における温度パワースペクトルを示し、 $f_1 = 33.3$ に最大ピークを持ち、 $f_1/4$ およびその整数倍にピークを持つ。更に、 $f_1/8$ およびその整数倍のピークがわずかながら観察される。図(b)は上部冷却層 $(z, r) = (2, 0)$ の温度時系列の結果で、最大ピークは $f_1/2$ に現れ、 $f_1/8$ の整数倍のピークは高調波域で顕著になっている。振動数は周期の逆数であり、周期倍分岐(2<sup>n</sup>分岐)は、基本振動数 $f_1$ から新たに $f_1/2$ 、 $f_1/4$ 等が $Ra$ の増加と共に現れることで、図の $f_1/8$ のピークから2<sup>3</sup>分岐となっていることがわかる。 $z = 8$ のパワースペクトルは、 $z = 2$ より $f_1$ のピークは更に小さくなり、 $f_1/8$ の効果は大きくなる。

ここで、対流構造を等温線と流線の変化から詳しく調べる。Fig.5-38は $A = 5$ の代表的経時変化を示す。(a) $t = 2.08$ では、サーマルが $z = 8.5$ 付近にあり、次のサーマルを加熱層から吐き出そうとしている状態である。(b) $t = 2.09$ は吐き出されたサーマルが上昇しようとしているが、 $z = 2$ の中心軸付近に4番目の小さなセルがある。これはサーマルの前面に比較的冷たい流体が残っているため発生し、サーマルの上昇を妨げ

る。(c) $t = 2.1$ では第4のセルは消失している。また、加熱層内の流れは強くなっている。(d) $t = 2.11$ では加熱層から次のサーマルを吐き出そうとしているが、4番目のセルの生成はない。この時、吐き出されるサーマルは速やかに上昇し、前のサーマルに接近する(図(e)、(f))。従って、加熱層から上部に吐き出されるサーマルに2つの異なる動き(過渡的なセルを伴うサーマルは上昇速度が遅く、次に発生するサーマルは早く上昇する)のため倍周期特性が現れる。4倍周期は、引き続いて吐き出す2組のサーマルに更に強弱が伴うものと理解される。図(f) $t = 2.13$ では、加熱層内にも過渡的なセルが存在する。

上記のことから分調波分岐は、上部冷却層をサーマルが上昇する一連の機構に原因し、上部冷却層の空間が大きいほど複雑な動きをすることがわかる。

振動モードの違いをまとめるため、中心軸上の代表点における軸速度対温度の相図をFig.5-39に示す。いずれの図も場所によって軌跡が異なり、振動特性が違うことを示す。 $A = 1$ の場合、 $z = 0$ と2の軌跡は滑らかではないが、基本的には2重ループを示し倍周期振動を特性付ける。 $A = 3$ と5の場合の軌跡は8倍周期特性で8重ループ、 $A = 10$ の場合には温度および速度の値は他とほぼ同じ程度であるが、ノイズを含むカオス的な動きであることがわかる。5-5節( $A = 2$ に相当)で $Ra$ の増加と共に $2^n$ 分岐特性が確認され、 $Ra = 5 \times 10^4$ では倍周期振動を示した。つまり、上部冷却層の空間を大きくすると、高次分岐が低 $Ra$ で起こり乱れ安いことがわかる。

## 5.8 伝熱量

計算した全ての条件における加熱壁面から流体に伝達される熱量 $Q$ を調べる。無次元化した熱流束はヌッセルト数 $Nu$ として、次式により与えられる。

$$Nu = \frac{Q \cdot R}{\lambda(T_H - T_C)S} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=1} dz, \quad (5.15)$$

ここで、 $S$ は伝熱面積、 $\lambda$ は熱伝導率である。振動流に対しては一周期の時間平均値 $\bar{Nu}$ を取る。

Fig.5-40に $Pr = 0.72$ の時の $Ra$ に対する $Nu$ と振動数 $f$ を示す。図から $Ra \leq 6.8 \times 10^3$ の定常解を持つ場合、 $Nu$ は、 $Ra$ と共に僅かずつ増加する。 $Ra > 6.9 \times 10^3$ の振動流になると $\bar{Nu}$ が急に大きくなる傾向を持つことがわかる。

振動時の振動数は基本振動数 $f_1$ とその整数倍の高調波を含むが、図には基本振動数を示す。分調波振動時は $f_1/2, f_1/4$ の値もあわせて示し、図から分調波分岐の臨界値が読み取れるようにしている。尚、 $Ra = 7.2 \times 10^4$ から振動は間欠的乱れが入りカオス的となった(Fig.5-17)が、 $f_1, f_1/2, f_1/4$ の識別はできる。

Fig.5-41に $Pr$ を変えた場合の $Ra$ に対する $Nu$ を示す。図から $Nu$ は、 $Pr = 10$ の時 $Ra \leq 3300$ 、 $Pr = 5$ の時 $Ra \leq 3700$ 、 $Pr = 1$ の時 $Ra \leq 6000$ での定常対流において $Ra$ と共に僅かな増加を示し、 $Pr$ 依存性はほとんど認められない。振動流になると平均 $\bar{Nu}$ は急に大きくなり、 $Pr$ が大きいほど大きな値を示す。また、高 $Ra$ において分調波分岐やセル構造の変化が起こるが、これらの二次的分岐は $\bar{Nu}$ に顕著な効果を持たないように思われる。

本研究と同一条件の報告はないが、比較的似た条件下での矩形断面内の解析<sup>6)</sup>がある。その報告には二次分岐の報告は含まれていないが、振動特性は大略一致している。また、Gaoら<sup>17)</sup>は、ベナール対流でアスペクト比(=半径/液層厚さ)が4より小さい場合、ヌッセルト数は流れパターンの変化に対応して変化することを指摘している。この点については更に検討が必要と思われる。

前節で調べた空間の効果として加熱層長さを固定して上部冷却層長さを変えた場合のヌッセルト数は、ほとんど変化が無かった。加熱層からの熱流入量と上部冷却層長さを大きくしたときの流れの高次分岐は、直接的には無関係と考えられる。



## 5.9 結論

鉛直円筒の一部環状壁を加熱したときの円筒内に発生する自然対流について、軸対称流を仮定し対流項に対し2次精度の風上差分法と4次精度のArakawa差分を用いた数値解析を行った。レイリー数  $Ra$ 、プラントル数  $Pr$  および上部冷却層長さを変えた時の空間効果について検討した。その結果、以下のことが明らかになった。

まず、差分法の違いにより、 $Ra$  が小さいときは2種類の計算結果には差がないが、 $Ra$  が大きくなると大きな違いがでる。

- (1)  $Pr = 0.72$  に対して、振動流発生臨界レイリー数  $Rac$  は、風上差分において  $Rac = 8.7 \times 10^3$  と評価されるが、Arakawa 差分では  $Rac = 6.9 \times 10^3$  に低下した。
- (2) 更に、 $Ra$  が大きい領域では、対流の分岐に差が現れ、風上差分では  $Ra = 10^7$  においても計算は可能であった。

これらの違いは、風上差分における人工粘性効果によるものと考えられる。そこで、高次精度のArakawa差分を用い、詳細に検討した。以下は、その結果をまとめる。

$Pr = 0.72$  (空気) に対する対流は、

- (3)  $Ra = 6.8 \times 10^3$  までは側壁温度条件に対応する加熱層、上下の冷却層にそれぞれセルを持った3セル構造の定常対流となる。
- (4) 更に  $Ra$  を増加したとき、 $Ra = 6.9 \times 10^3$  より規則正しい周期振動流となる。従って、定常流から振動流への流れの遷移 (ホップ分岐) の臨界レイリー数  $Rac_1$  は、約  $6.9 \times 10^3$  である。規則振動状態は、 $6.9 \times 10^3 \leq Ra \leq 2.2 \times 10^4$  の範囲において観察された。
- (5)  $Ra = 2.3 \times 10^4$  から周期倍化現象 (異なる2つのピークが規則的に繰り返される) を示した。つまり、約  $Rac_2 = 2.3 \times 10^4$  に時間特性の $2^1$ 分岐 (第2のホップ分岐) が存在する。周期倍化振動は、上部不安定層をサーマルが上昇する機構に関係することがわかった。この領域は、 $2.3 \times 10^4 \leq Ra \leq 5.5 \times 10^4$  で観察された。

(6) 振動流は更に  $Ra$  を上げると、 $Ra = 5.8 \times 10^4$  では4つの波形が規則的に繰り返される  $2^2$  分岐が、 $Ra = 6 \times 10^4$  で更に高次の  $2^3$  分岐が確認された。更に、 $Ra$  を増すとより高次の周期を含む振動特性及び間欠的な乱れを含むカオス的特性となることがわかった。

円筒内の流体の種類が異なるときの効果、つまり、プラントル数  $Pr$  を1, 5, 10 と変えた場合の数値解析を行い、考察した。その結果、以下のことが明らかになった。

(7) 振動流発生の臨界  $Rac_1$  の値は  $Pr$  の値と共に低くなる。

(8)  $Pr = 1$  の場合は、 $Pr = 0.72$  と同様  $2^n$  分岐過程を示すが、 $Pr = 5, 10$  では、 $2^n$  分岐は観察されず、3セルから円筒頂部の中心軸付近に安定な第4番目のセルが発生し全体として4セルへ構造を変化させる。4セル構造を持つ対流の時間的変動特性は、 $Pr = 5, Ra = 8 \times 10^4$  のとき基本振動数  $f_1$  の  $1/3$  の振動数を持ち、 $Pr = 10, Ra = 10^5$  のとき準周期的特性を示した。

アスペクト比は対流に対して重要なパラメータであることはよく知られている。空気に対応する  $Pr = 0.72$  に対し、形状パラメータとして  $A = (\text{上部冷却層長さ})/(\text{加熱層長さ})$  としたとき、 $A = 1, 3, 5, 10$  と変えた場合の効果を調べた。その結果、以下のことが明らかになった。

(9) 上部冷却層長さを変えても  $Rac_1 = 6.9 \times 10^3$  より周期振動流が発生し、上部冷却層の大きさは振動流開始条件に影響しないことがわかった。

(10)  $Ra$  の値と共に振動流は、 $2^n$  分岐を示すが、空間が大きいほど高次分岐は低い  $Ra$  で現れ、乱れやすいことがわかった。

(11) 高次分岐は、加熱層から上方に吐き出されるサーマルの上昇機構により起こる。それは、サーマルが吐き出される時に過渡的な第4番目のセルを持つか持たないかの違いからサーマルの上昇速度に差が生じ、2つのサーマルが1つになろうとする。そのため、空間が大きいほど高次分岐は起こりやすいことがわかる。

加熱壁面から円筒内流体への伝熱量は、ヌッセルト数  $Nu$  として評価した。

- (12)  $Nu$  は、定常対流のとき  $Pr$  に関係なく、 $Ra$  と共に僅かずつ増加する。
- (13) 振動流が発生すると、平均  $\bar{Nu}$  は  $Pr$  依存性を示し、 $Ra$  と共に急に大きくな熱量が増加する。また、対流の時間的空間的な 2 次的分岐は  $\bar{Nu}$  に対して大影響はないと考えられる。

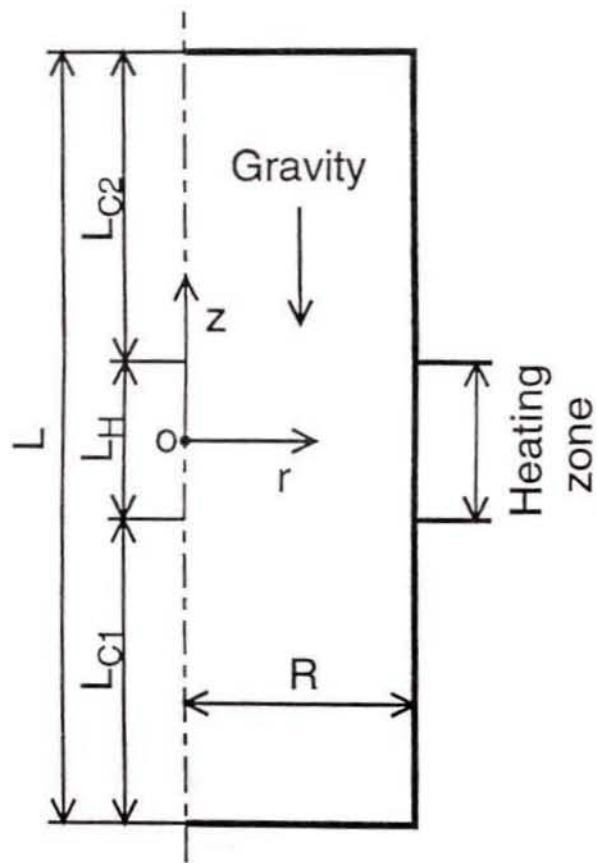
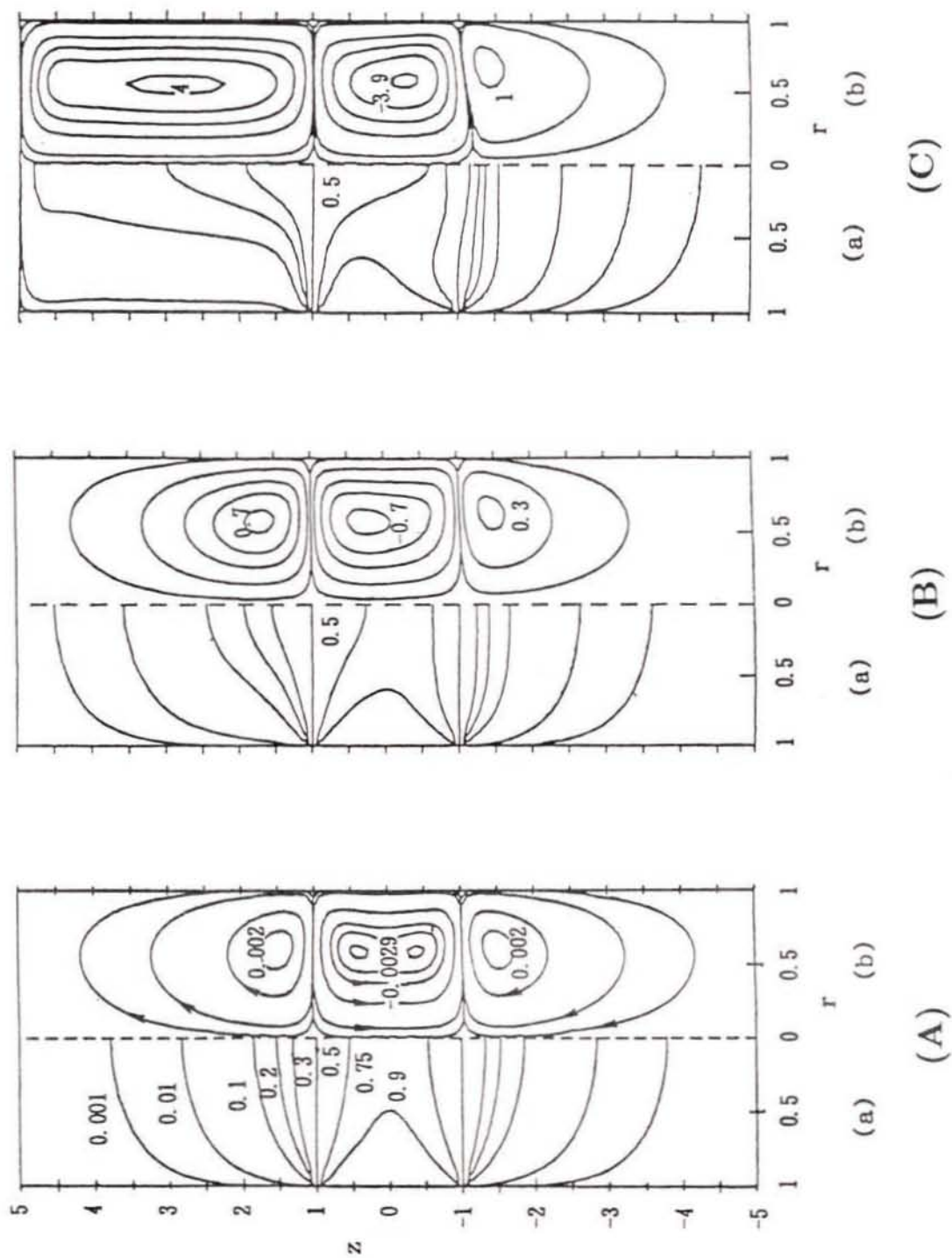
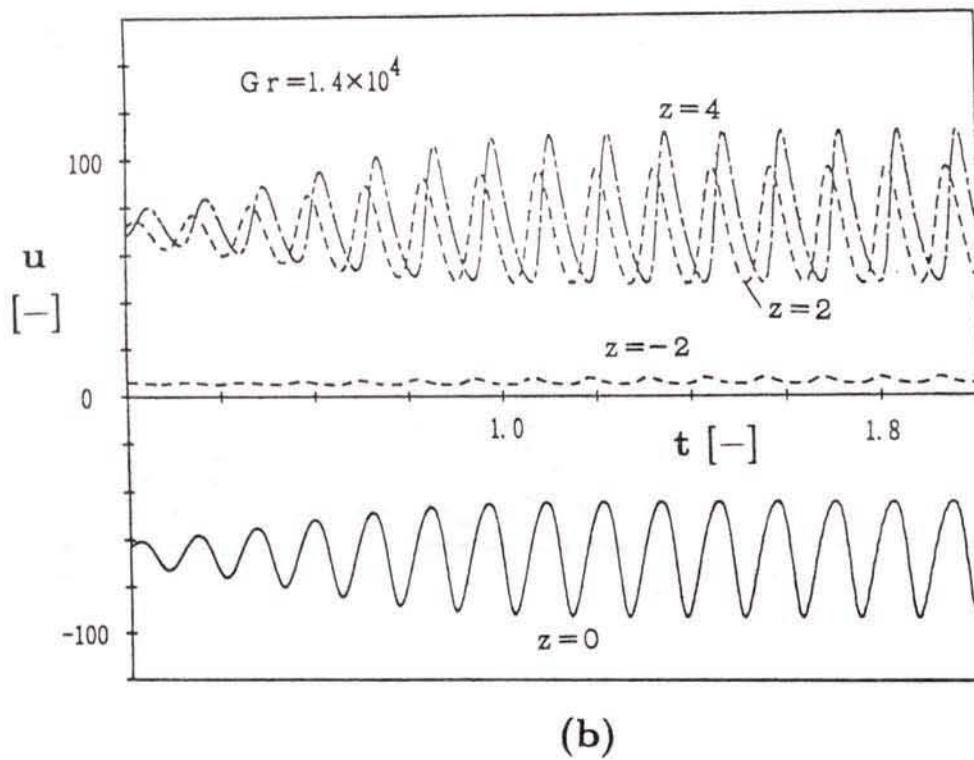
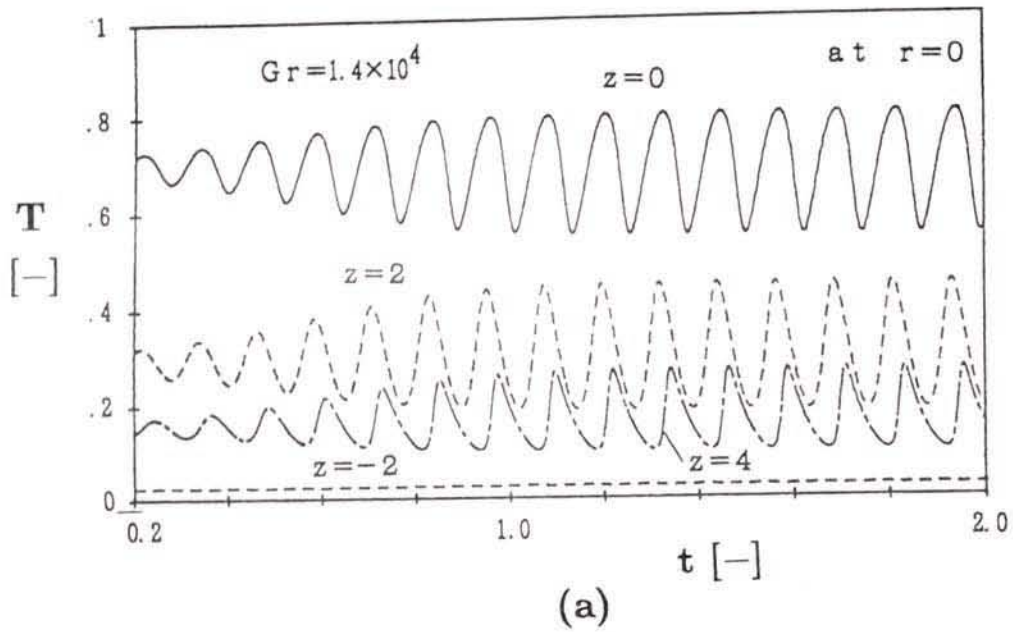


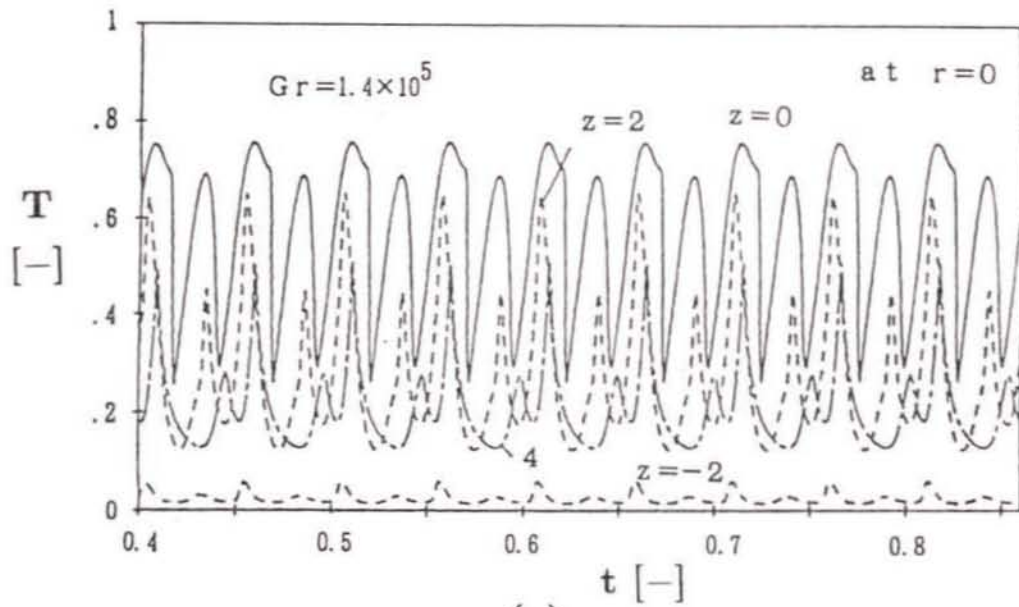
Fig.5-1 Model and coordinate system



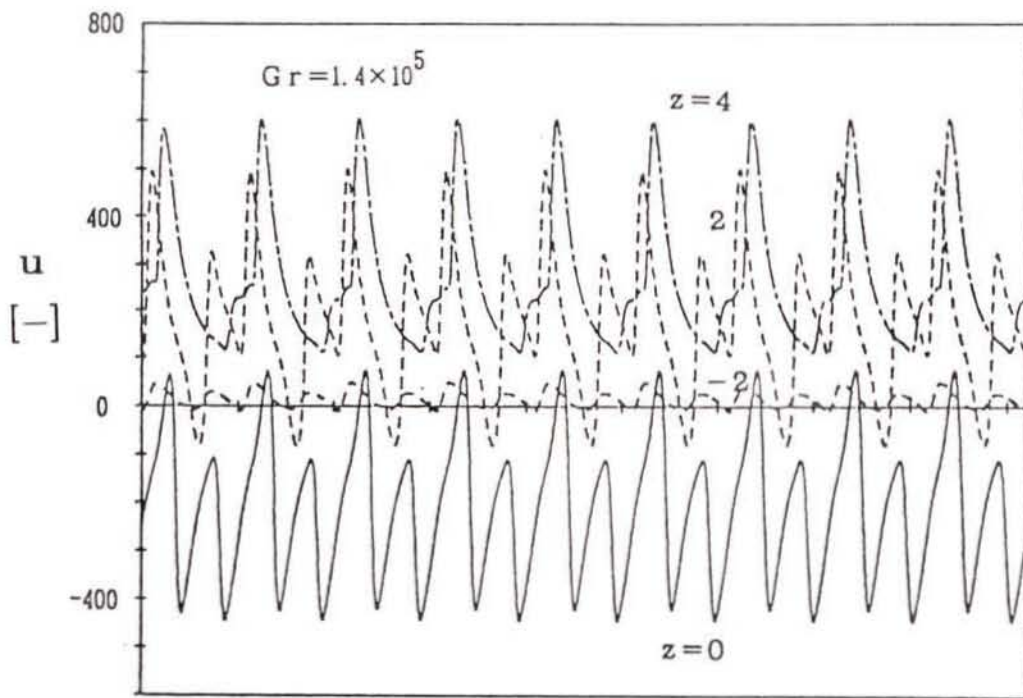
**Fig.5-2** Results of upwind method. (a) isotherms and (b) streamlines in the steady-state for  $Pr = 0.72$ . (A)  $Ra = 7.2$  (B)  $Ra = 1.44 \times 10^3$  (C)  $Ra = 8.64 \times 10^3$



**Fig.5-3** Time series of (a)temperature and (b)vertical velocity for simple periodic convection ( $Ra = 1.008 \times 10^4$ ,  $Pr = 0.72$ ).

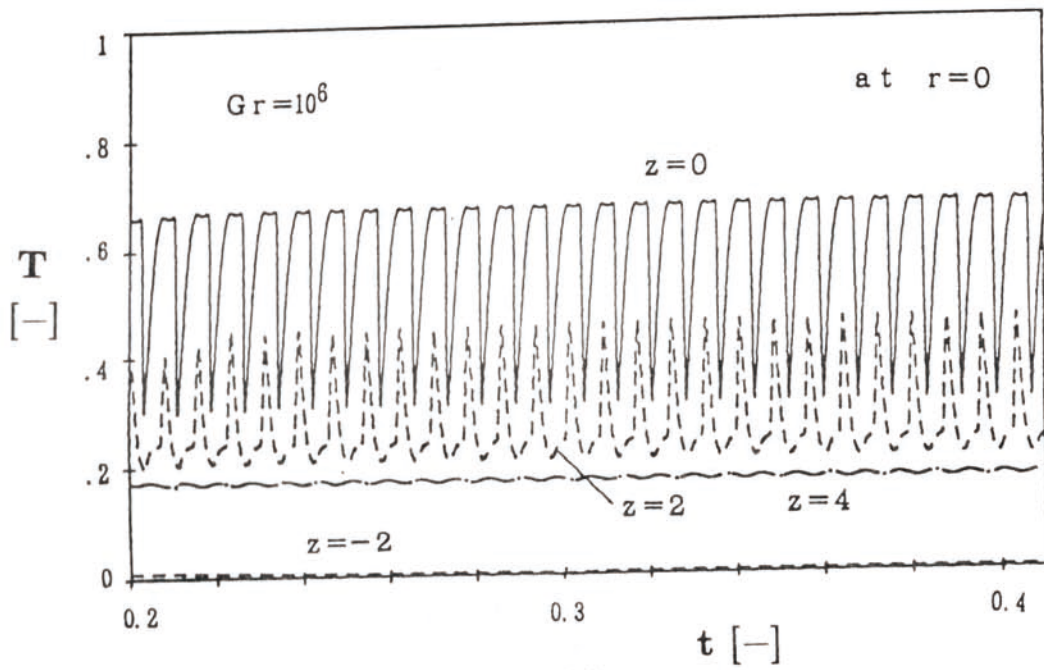


(a)

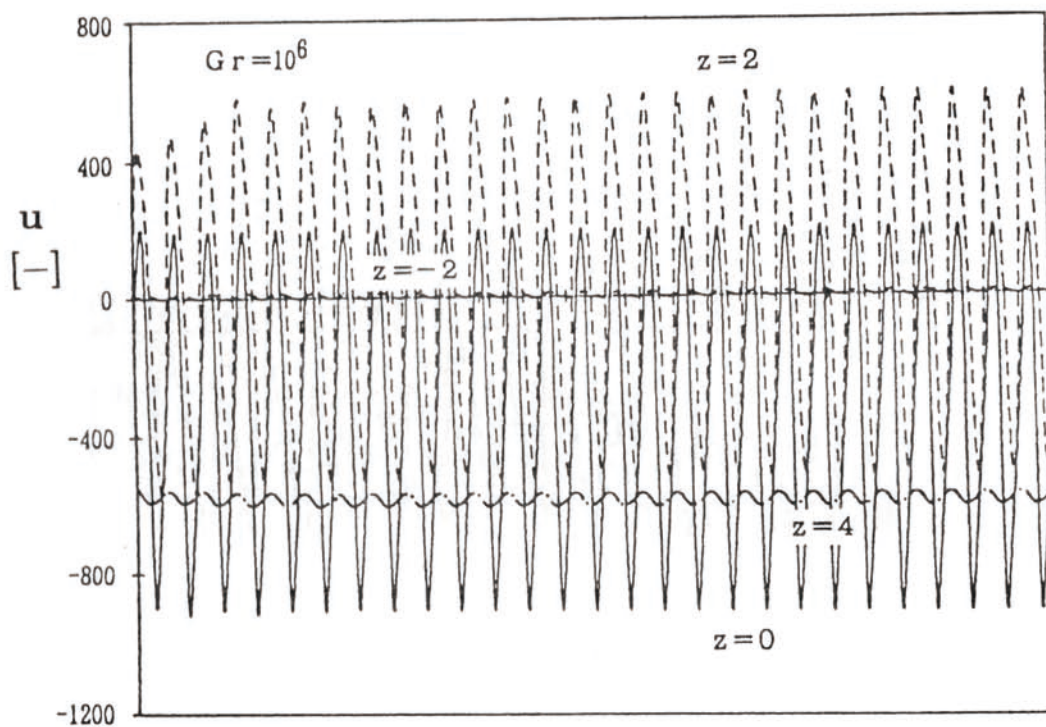


(b)

Fig.5-4 Time series of (a)temperature and (b)vertical velocity for  $Ra = 1.008 \times 10^5$  and  $Pr = 0.72$ .



(a)



(b)

Fig.5-5 Time series of (a)temperature and (b)vertical velocity for  $Ra = 7.2 \times 10^5$  and  $Pr = 0.72$ .



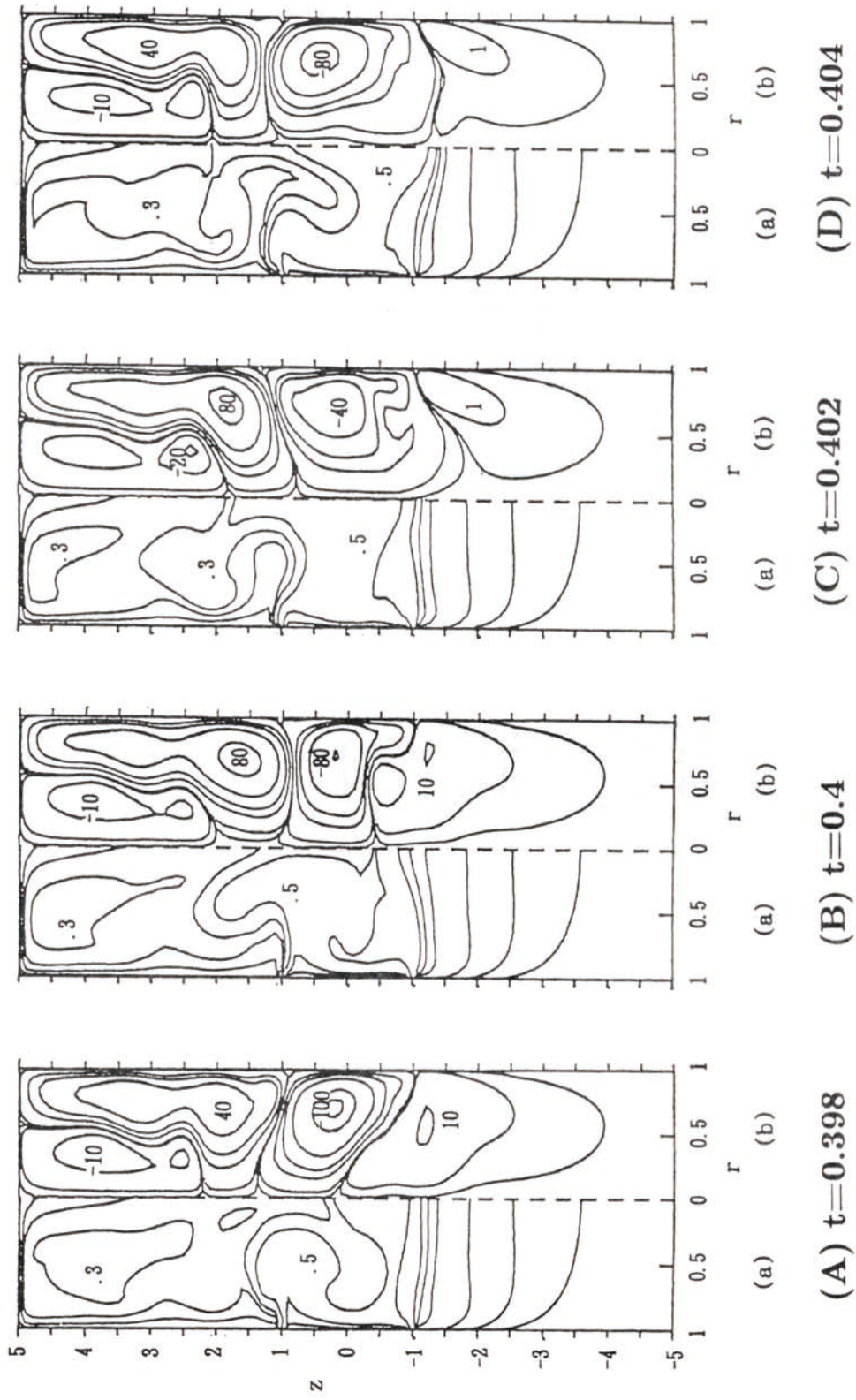
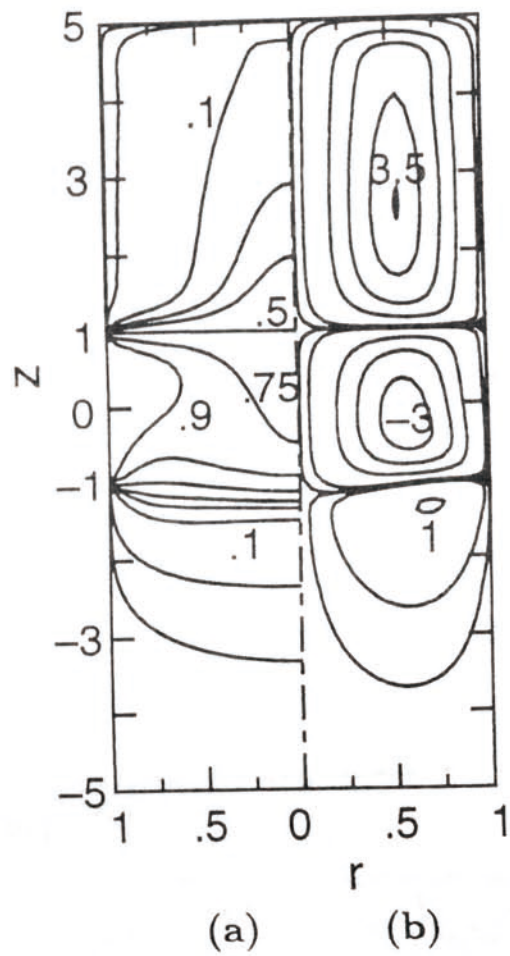
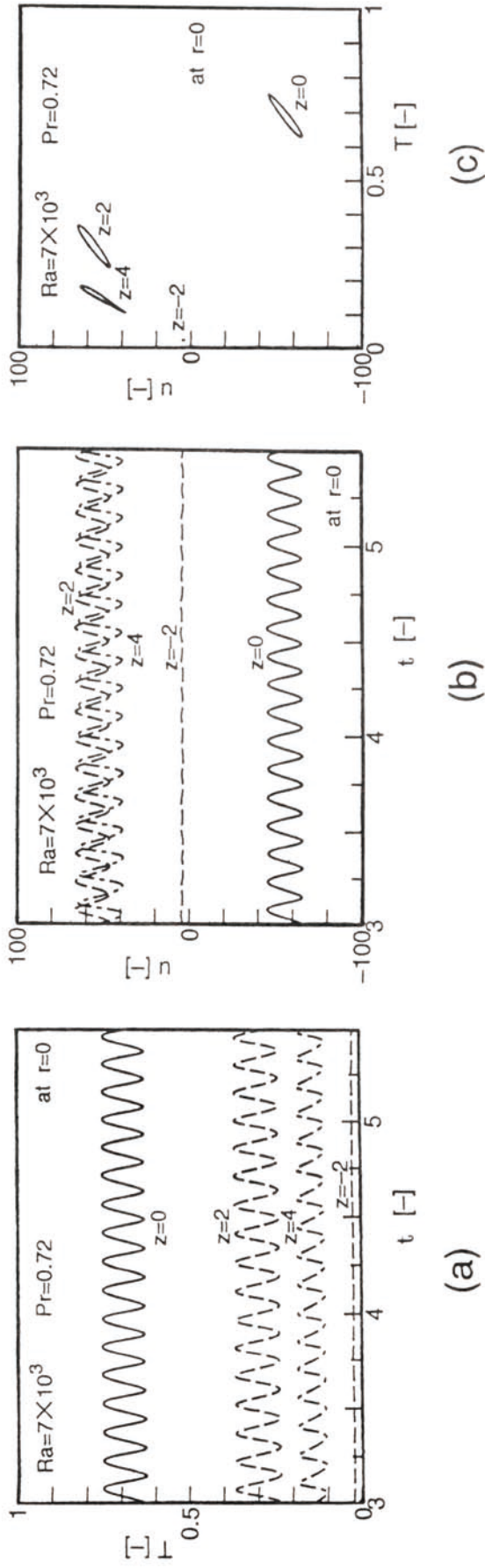


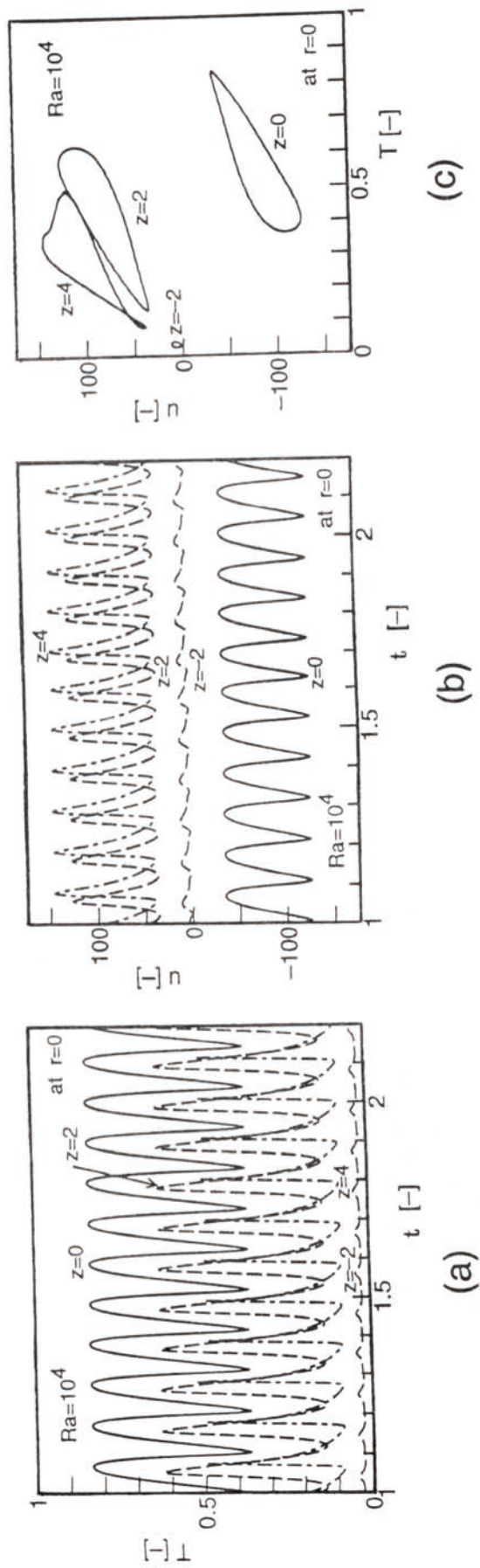
Fig.5-6 Variation of isotherms and streamlines for  $Ra = 7.2 \times 10^5$  and  $Pr = 0.72$



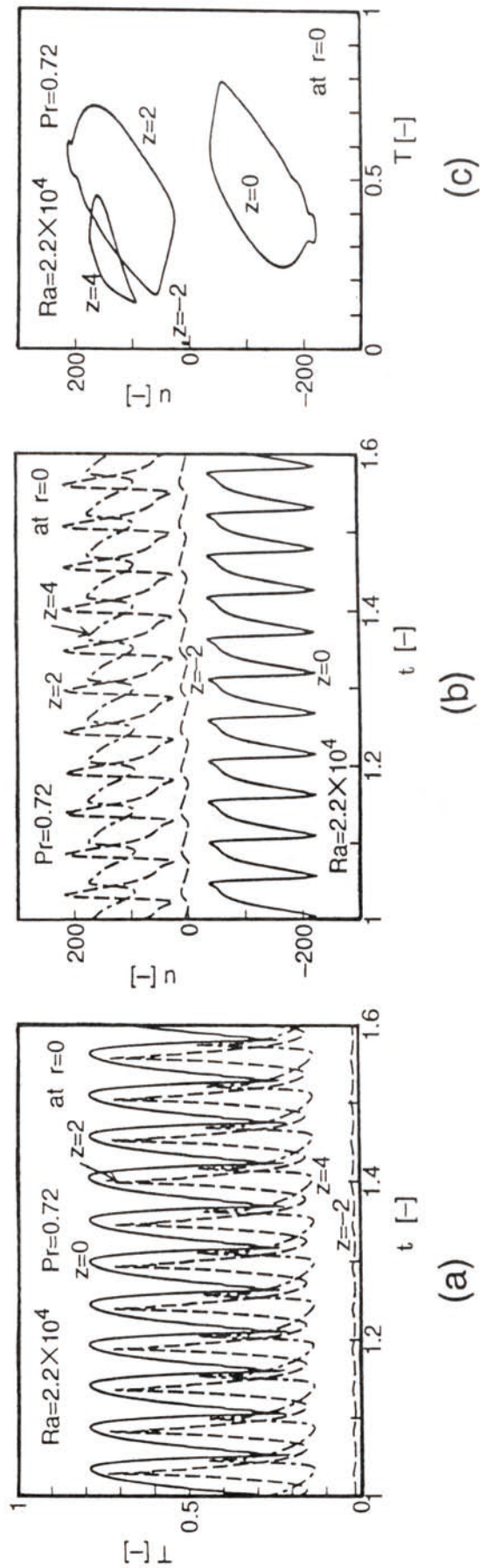
**Fig.5-7** The result of Arakawa differencing method. (a)isotherms and (b)streamlines in the steady-state for  $Ra = 6.8 \times 10^3$  and  $Pr = 0.72$



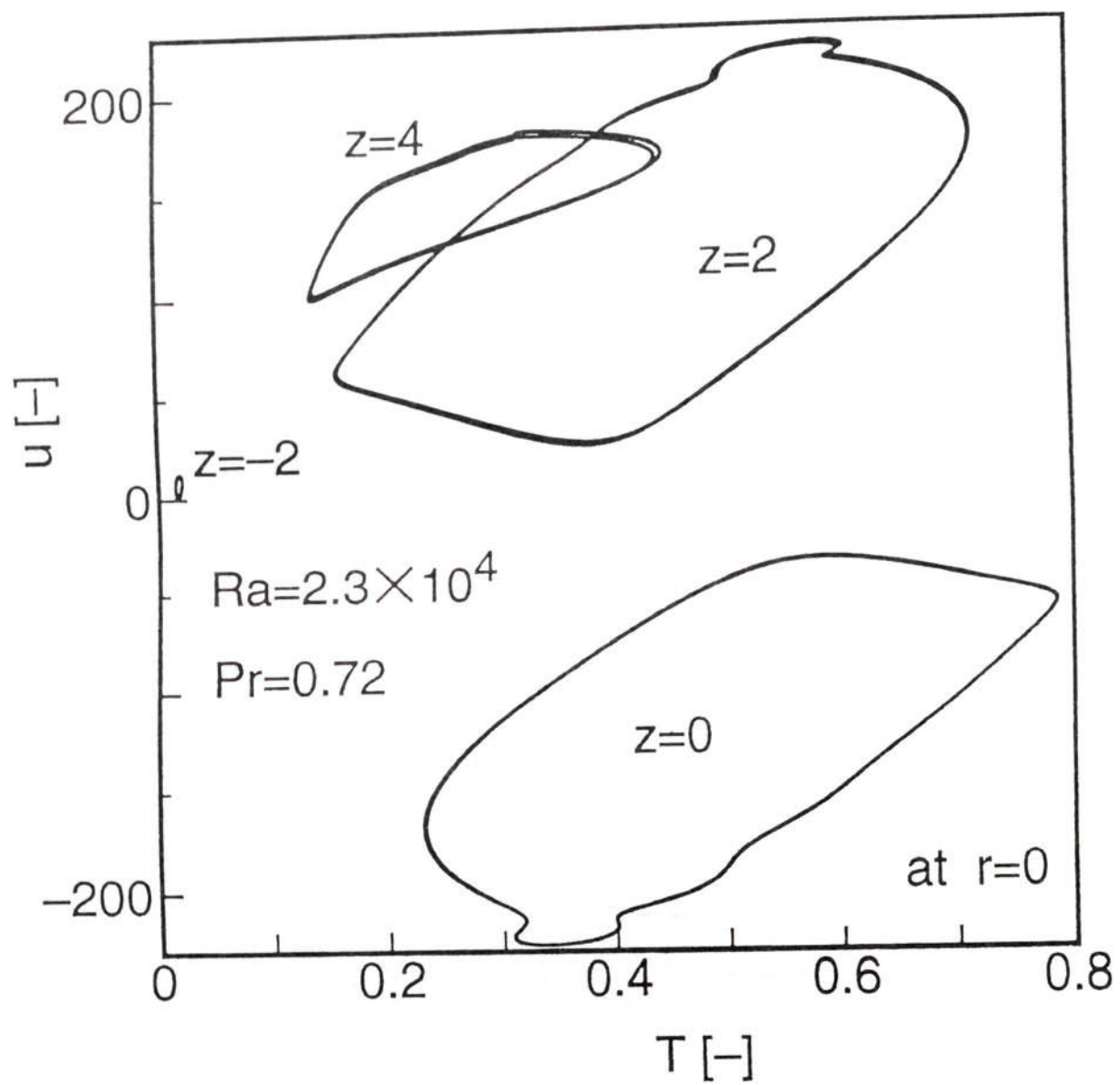
**Fig.5-8** Time series of (a) temperature and (b) vertical velocity, and (c) phase-plane plots for simple periodic convection ( $Ra = 7 \times 10^3$  and  $Pr = 0.72$ ).



**Fig.5-9** Time series of (a) temperature and (b) vertical velocity, and (c) phase-plane plots for  $Ra = 10^4$  and  $Pr = 0.72$ .

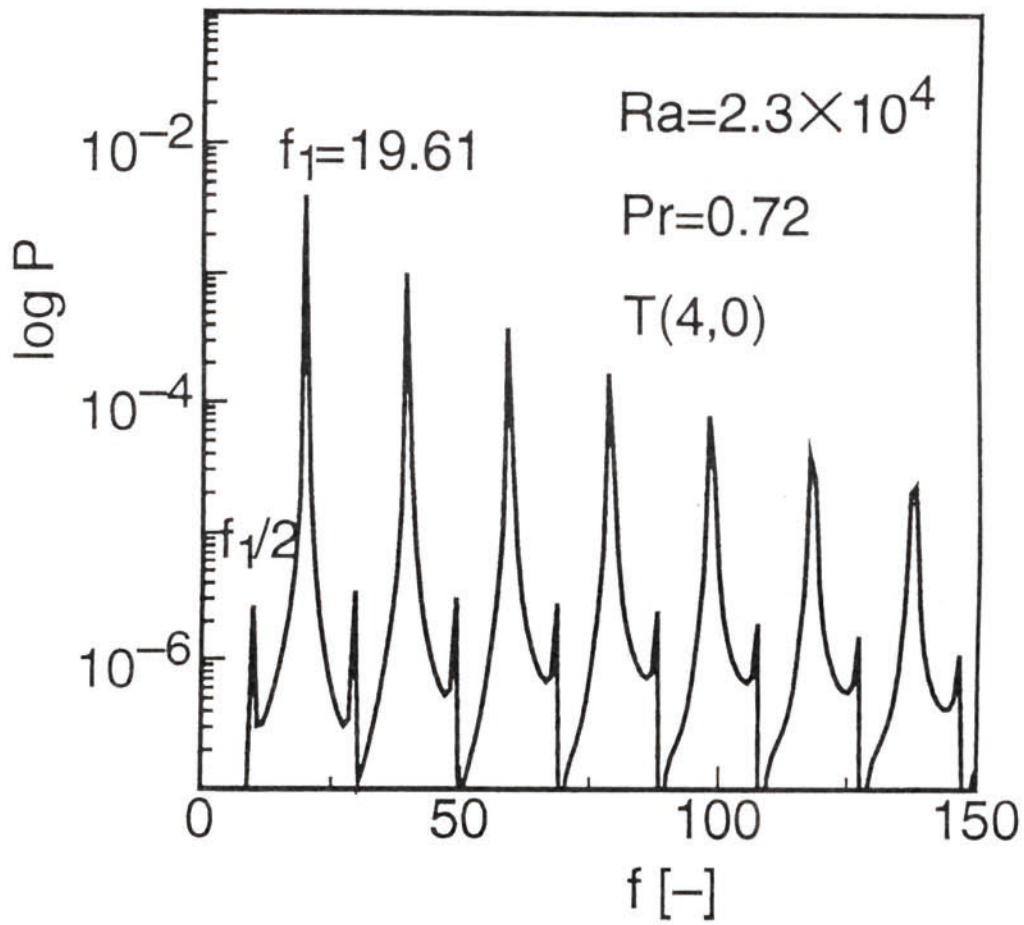


**Fig.5-10** Time series of (a)temperature and (b)vertical velocity, and (c)phase-plane plots for  $Ra = 2.2 \times 10^4$  and  $Pr = 0.72$ .



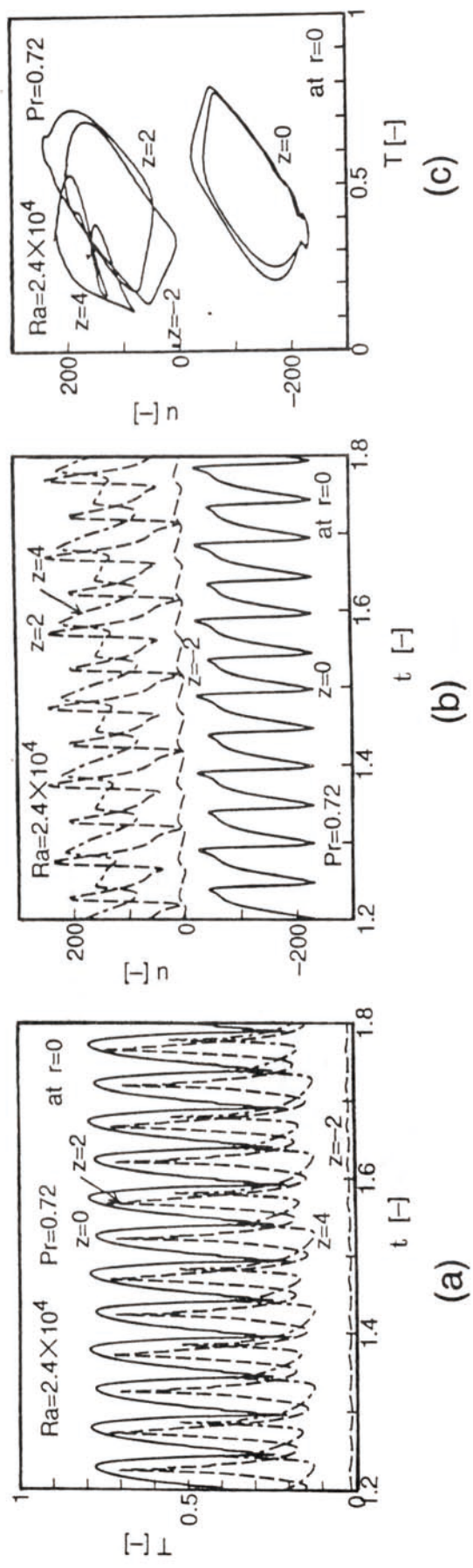
(a)

Fig.5-11 (a)



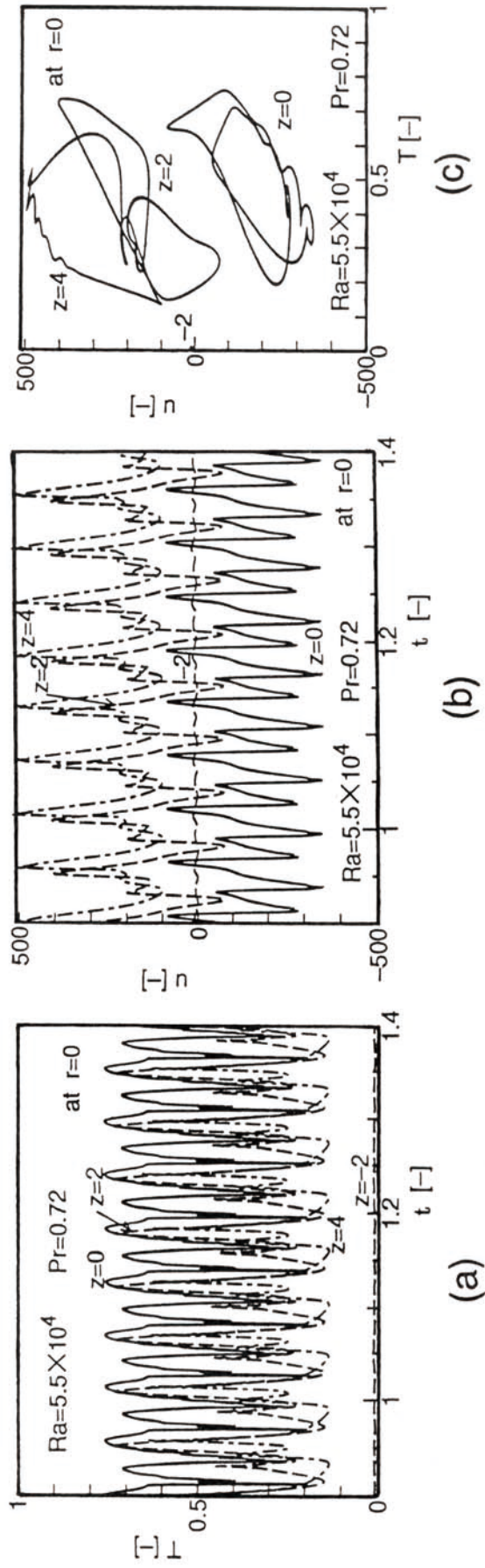
(b)

Fig.5-11 (a)Phase-plane plots and (b)power spectrum of temperature at  $z = 4$  for  $Ra = 2.3 \times 10^4$  and  $Pr = 0.72$ .

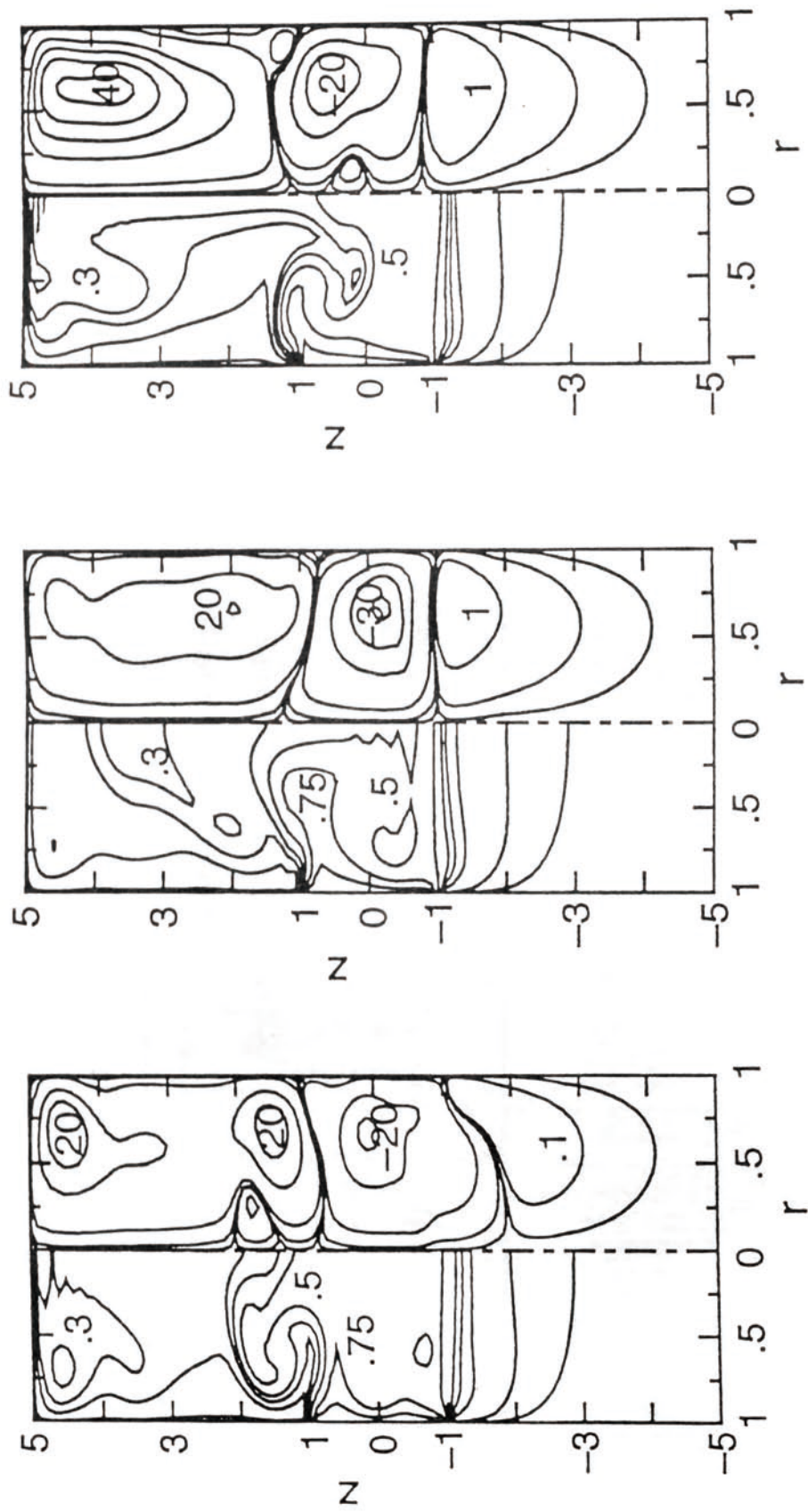


**Fig.5-12** Time series of (a)temperature and (b)vertical velocity, and (c)phase-plane plots for  $Ra = 2.4 \times 10^4$  and  $Pr = 0.72$ .



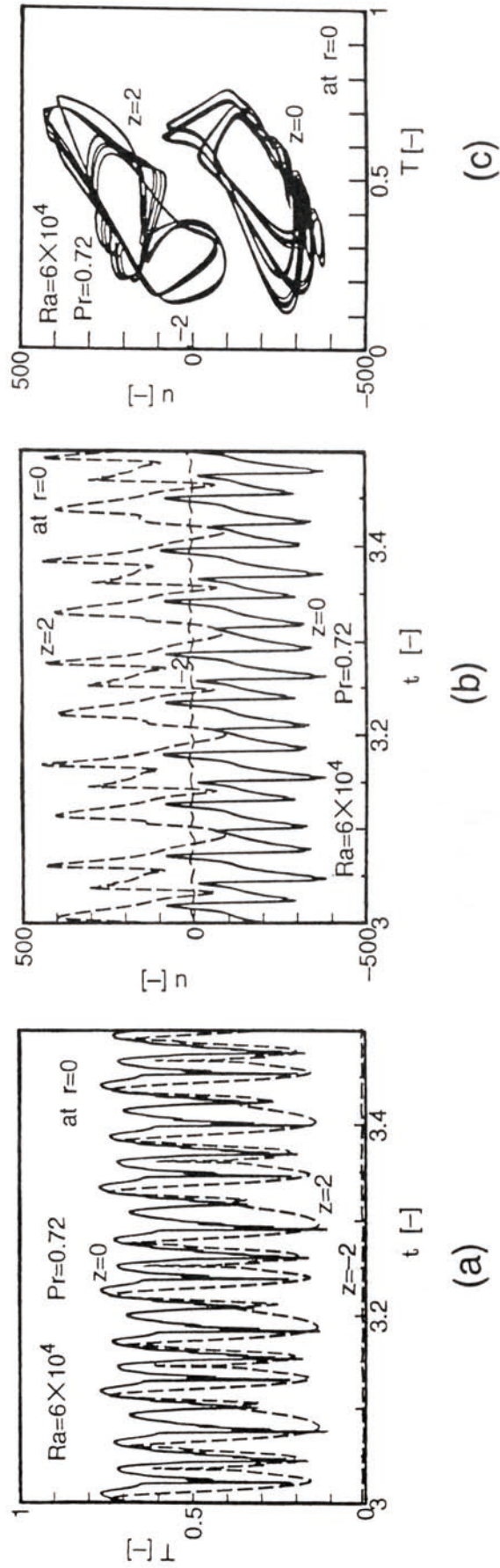


**Fig.5-13** Time series of (a) temperature and (b) vertical velocity, and (c) phase-plane plots for  $Ra = 5.5 \times 10^4$  and  $Pr = 0.72$ .

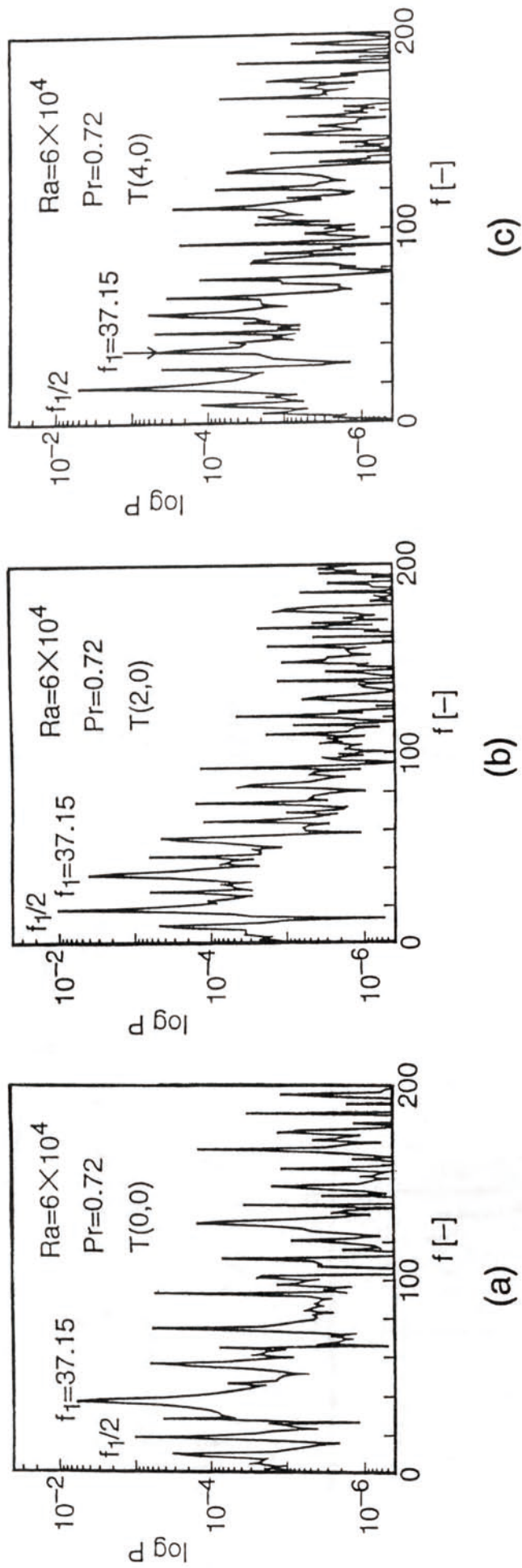


(a) time=1.26 (b) time=1.28 (c) time=1.3

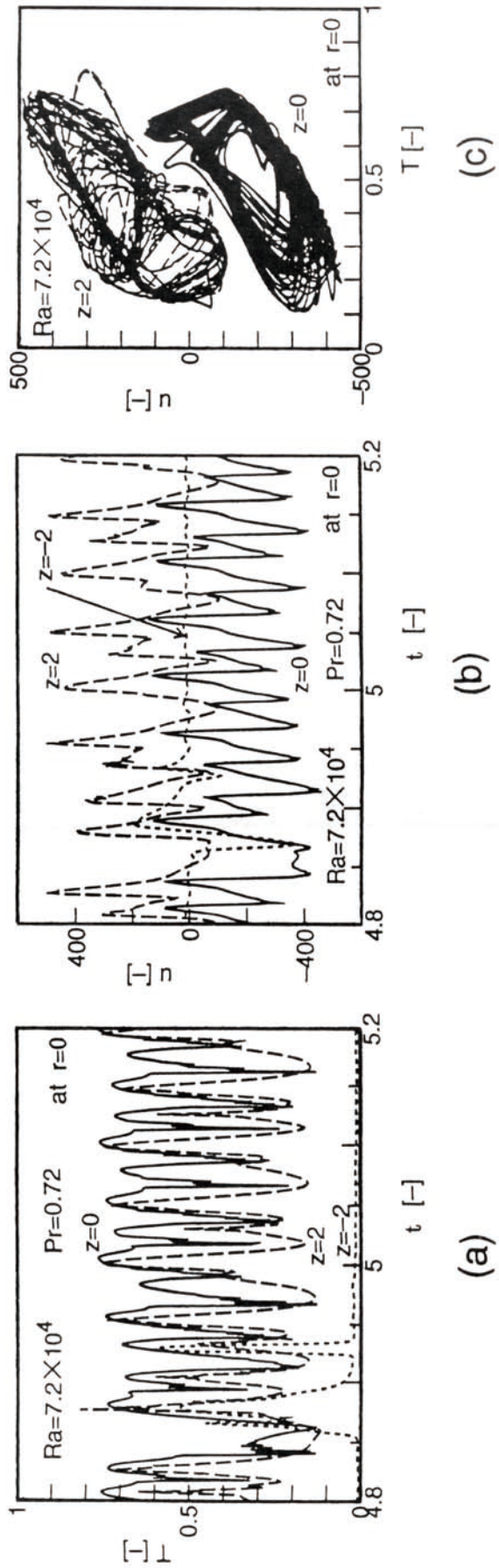
Fig.5-14 Variation of isotherms and streamlines at  $Ra = 5.5 \times 10^4$  and  $Pr = 0.72$ .



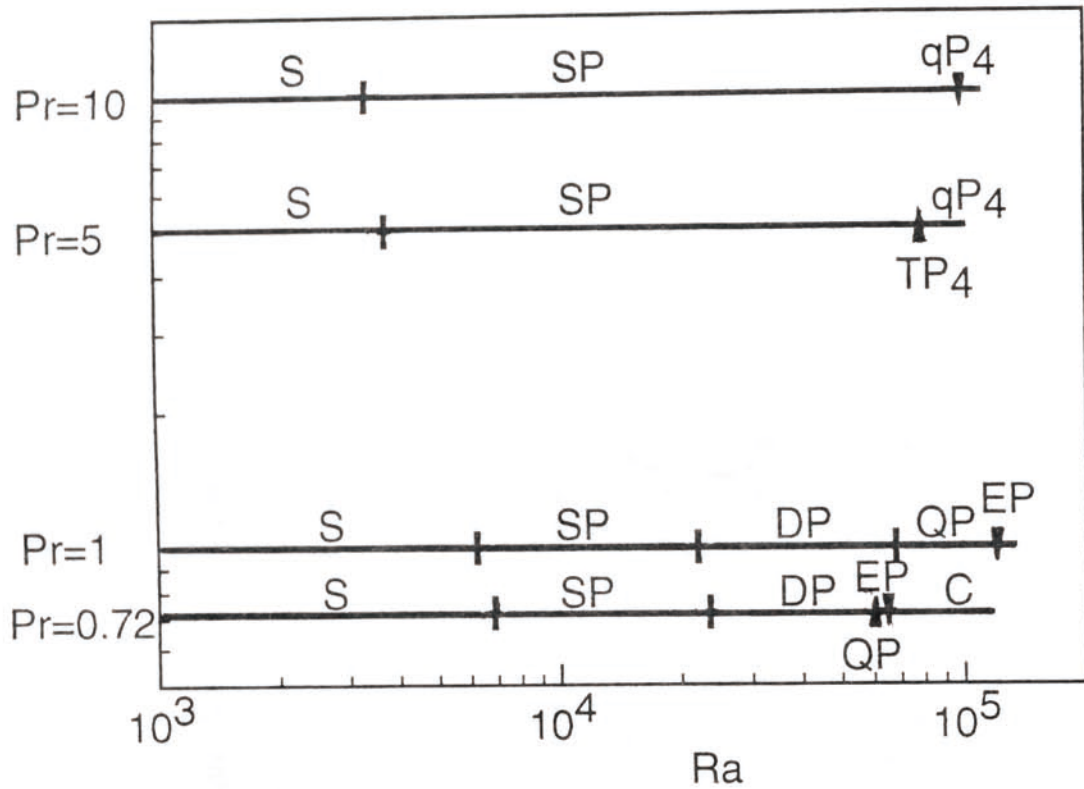
**Fig.5-15** Time series of (a) temperature and (b) vertical velocity, and (c) phase-plane plots for  $Ra = 6 \times 10^4$  and  $Pr = 0.72$ .



**Fig.5-16** Power spectra of temperatures shown in Fig.5-15.



**Fig.5-17** Time series of (a) temperature and (b) vertical velocity, and (c) phase-plane plots for  $Ra = 7.2 \times 10^4$  and  $Pr = 0.72$ .



**Fig.5-18** Bar graphs of the various types of motion as a function of the Prandtl number, and the Rayleigh number. S: steady-state with 3cells. SP: simply periodic, DP: doubly periodic, EP: eight-fold periodic, TP<sub>4</sub>: triply periodic with 4 cells, qP<sub>4</sub>: quasi-periodic with 4 cells, C: chaotic

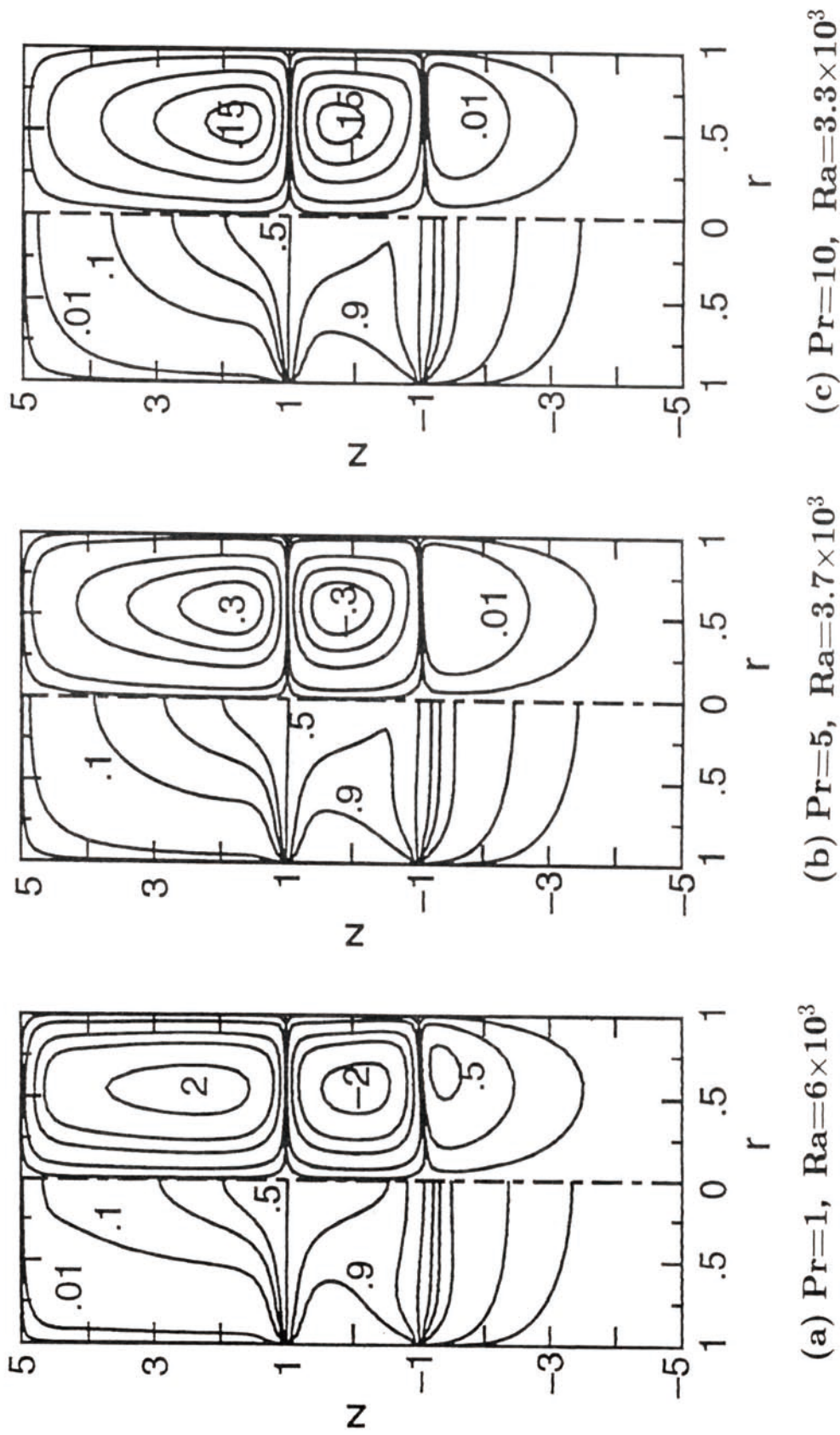
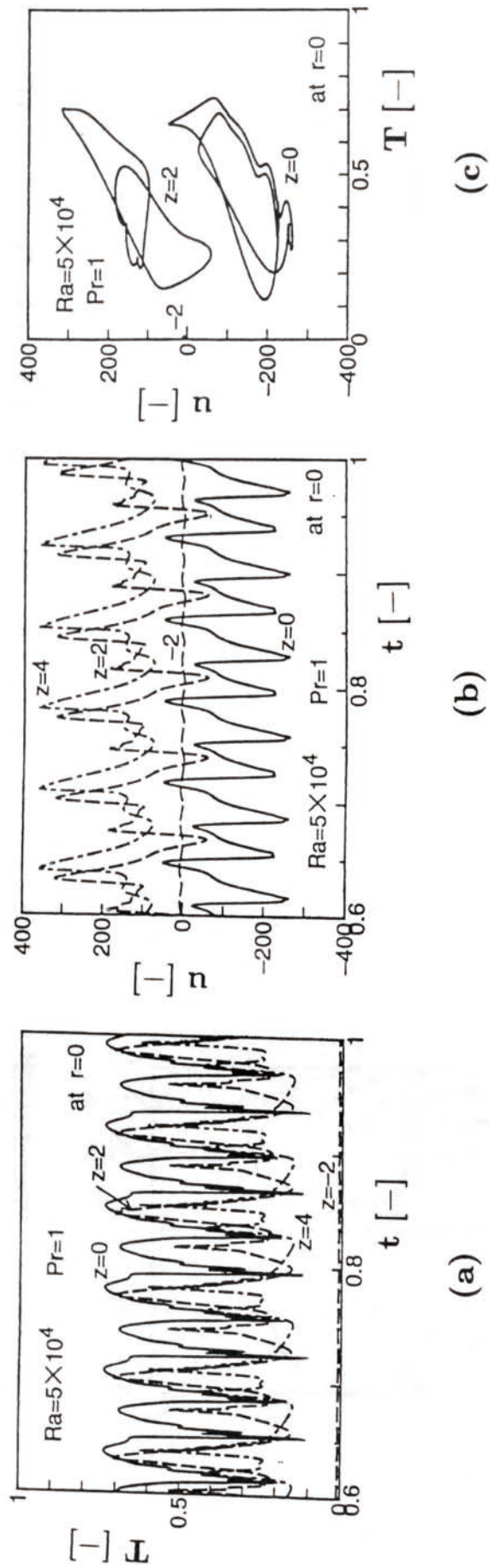
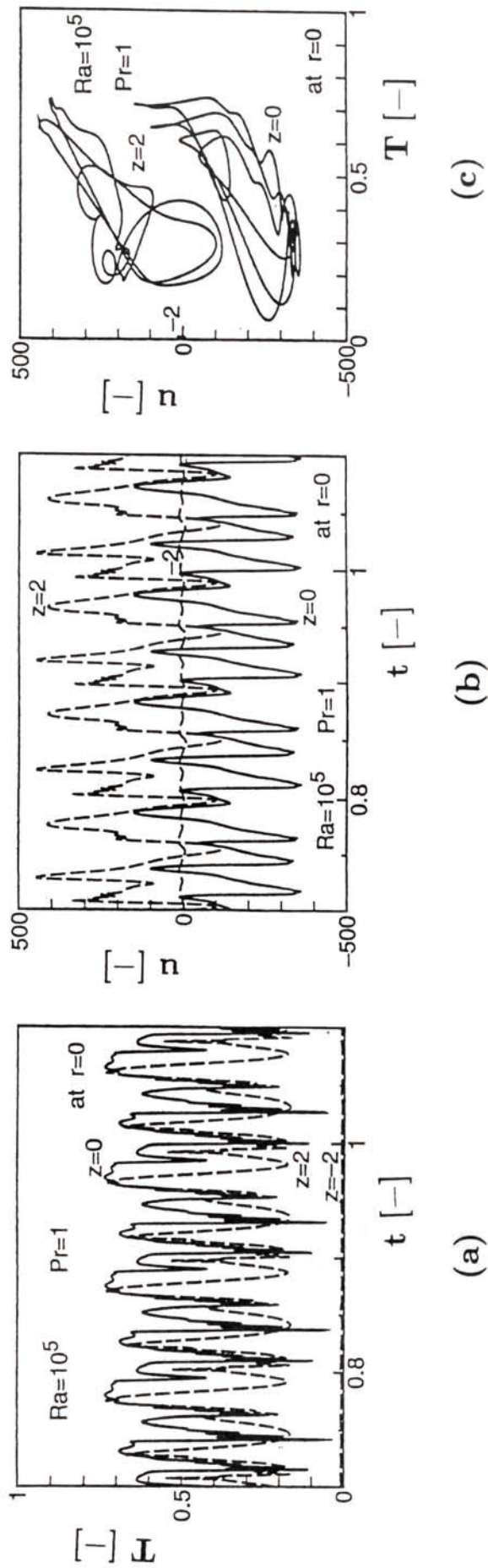


Fig.5-19 Steady state : isotherms and streamlines for various values of  $Pr$

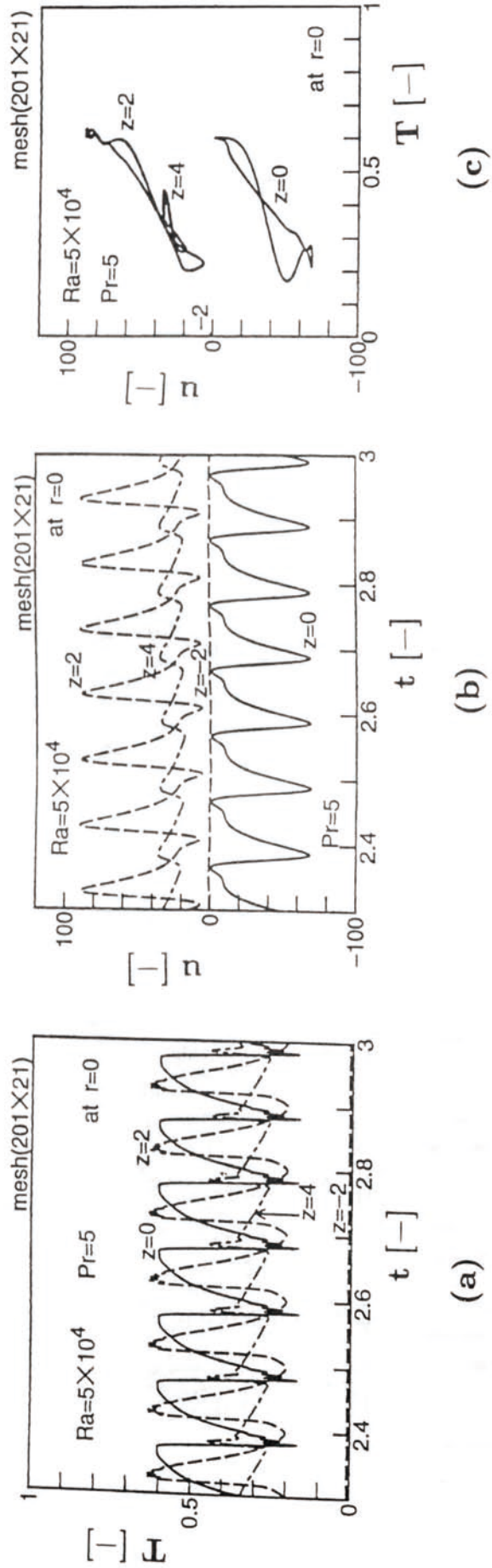


**Fig.5-20** Time series of (a) temperature and (b) vertical velocity, and (c) phase-plane plots for  $Ra = 5 \times 10^4$  and  $Pr = 1$ .

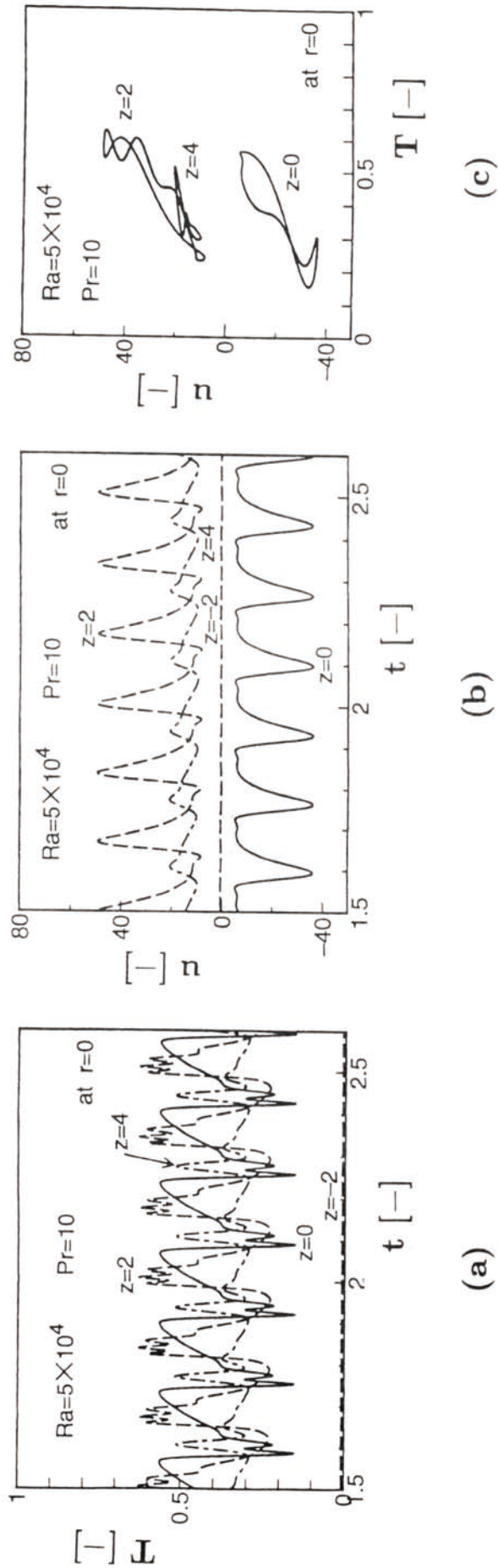




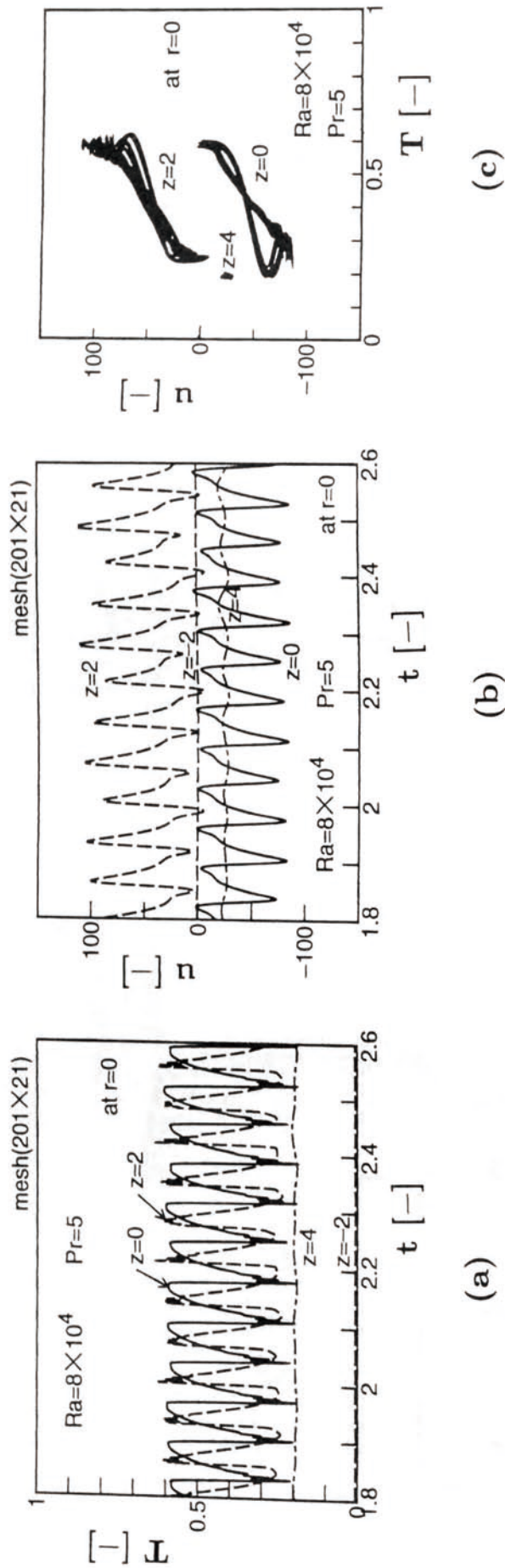
**Fig.5-21** Time series of (a)temperature and (b)vertical velocity, and (c)phase-plane plots for  $Ra = 10^5$  and  $Pr = 1$ .



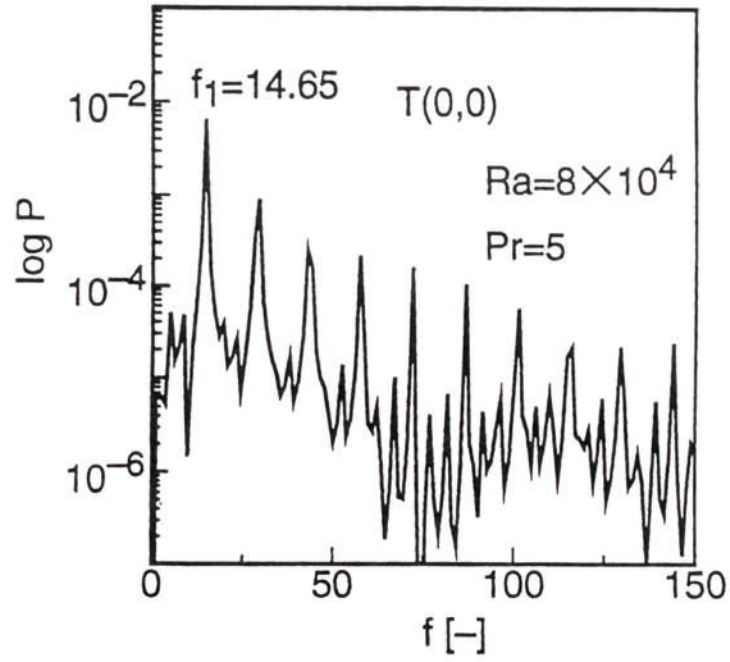
**Fig.5-22** Time series of (a)temperature and (b)vertical velocity, and (c)phase-plane plots for  $Ra = 5 \times 10^4$  and  $Pr = 5$ .



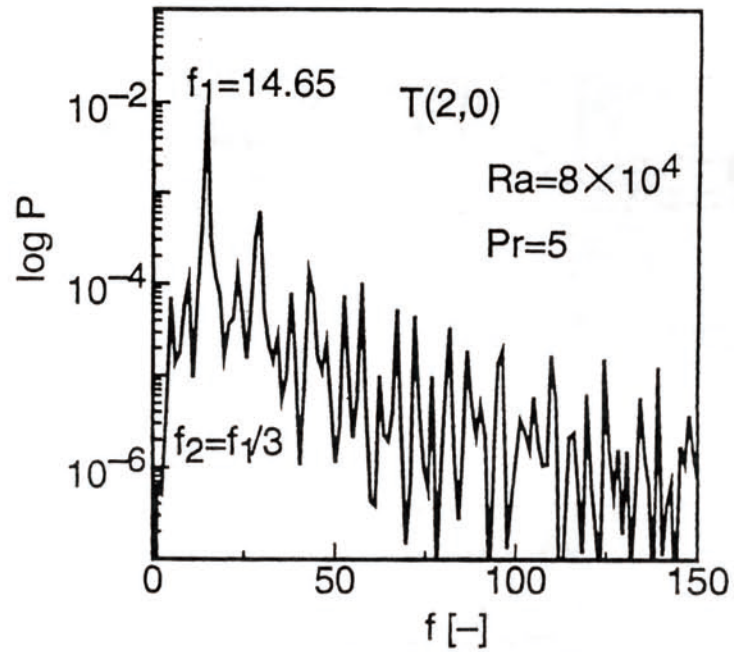
**Fig.5-23** Time series of (a)temperature and (b)vertical velocity, and (c)phase-plane plots for  $Ra = 5 \times 10^4$  and  $Pr = 10$ .



**Fig.5-24** Time series of (a)temperature and (b)vertical velocity, and (c)phase-plane plots for  $Ra = 8 \times 10^4$  and  $Pr = 5$ .

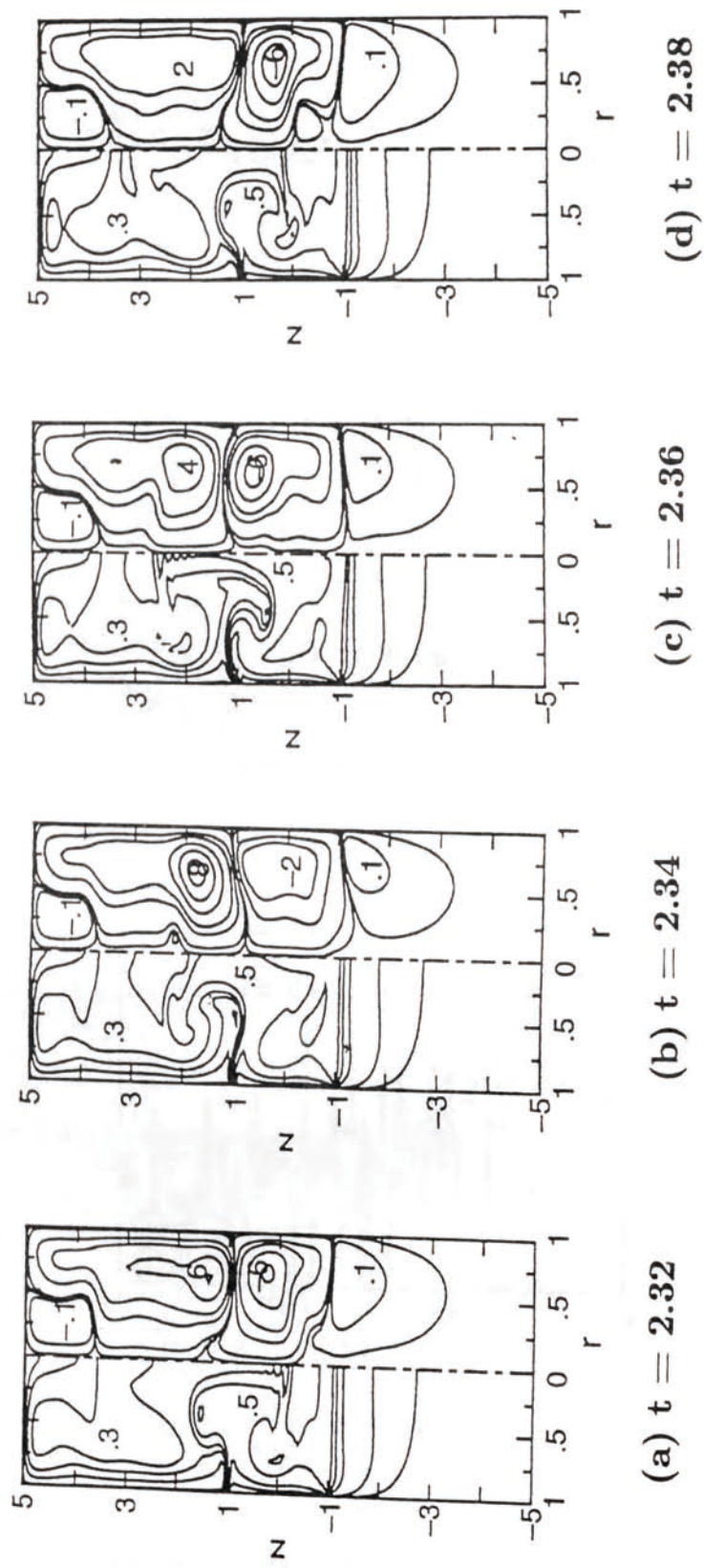


(a)  $z = 0$

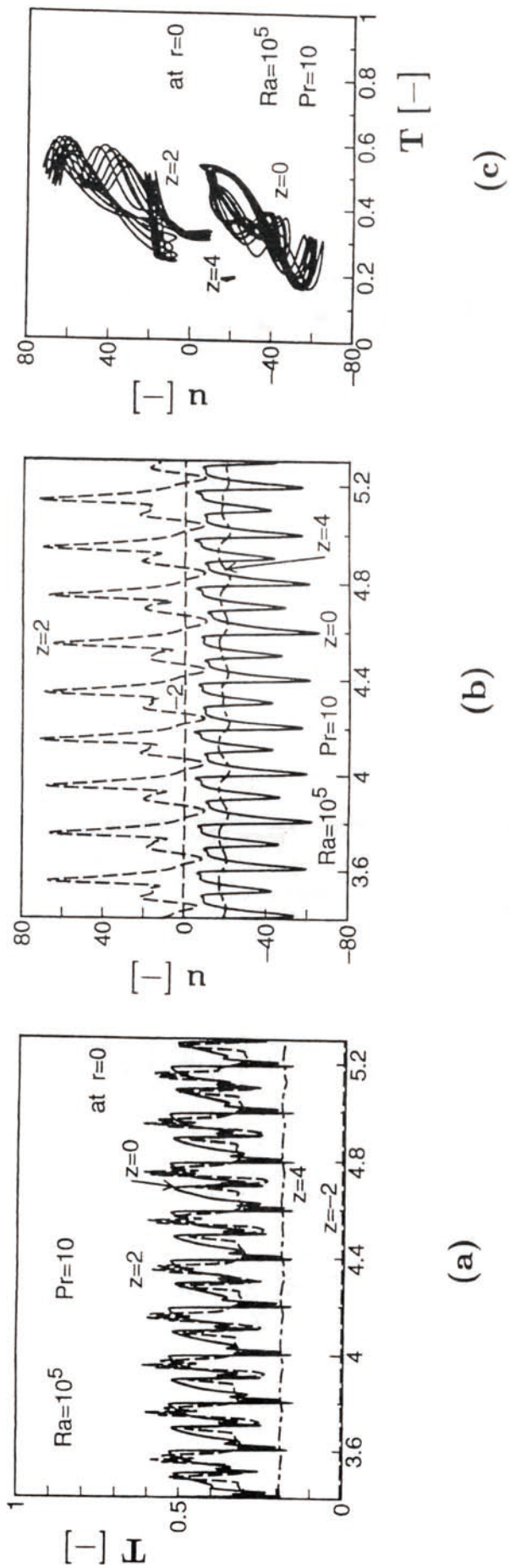


(b)  $z = 2$

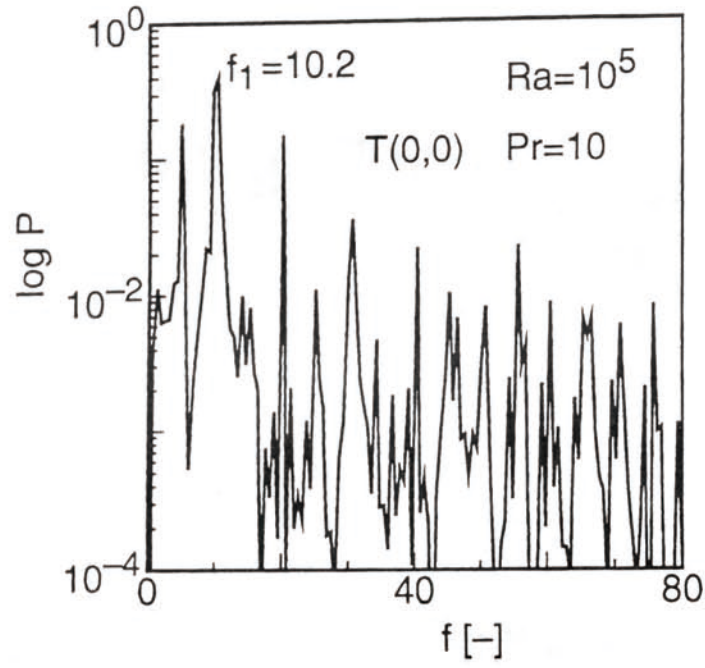
Fig.5-25 Power spectra of temperatures shown in Fig.5-24(a).



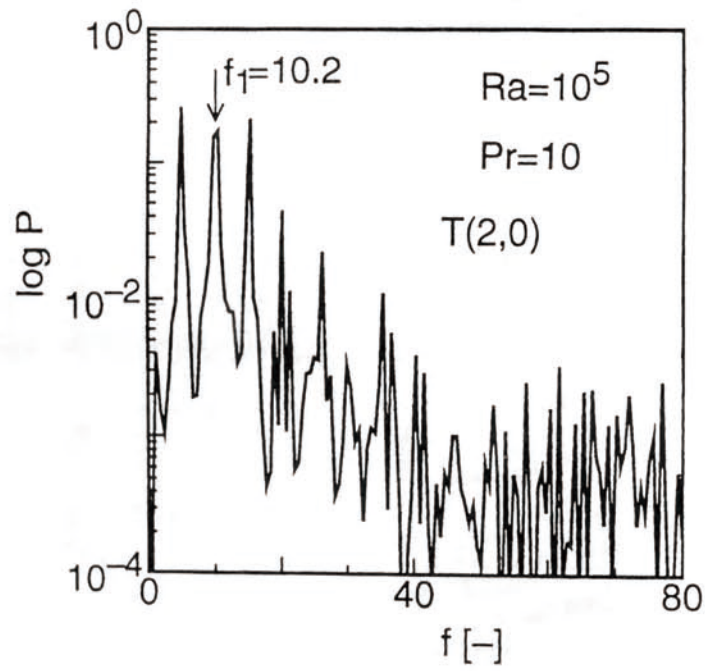
**Fig.5-26** Variation of isotherms and streamlines at  $Ra = 8 \times 10^4$  for  $Pr = 5$ .



**Fig.5-27** Time series of (a) temperature and (b) vertical velocity, and (c) phase-plane plots for  $Ra = 10^5$  and  $Pr = 10$ .



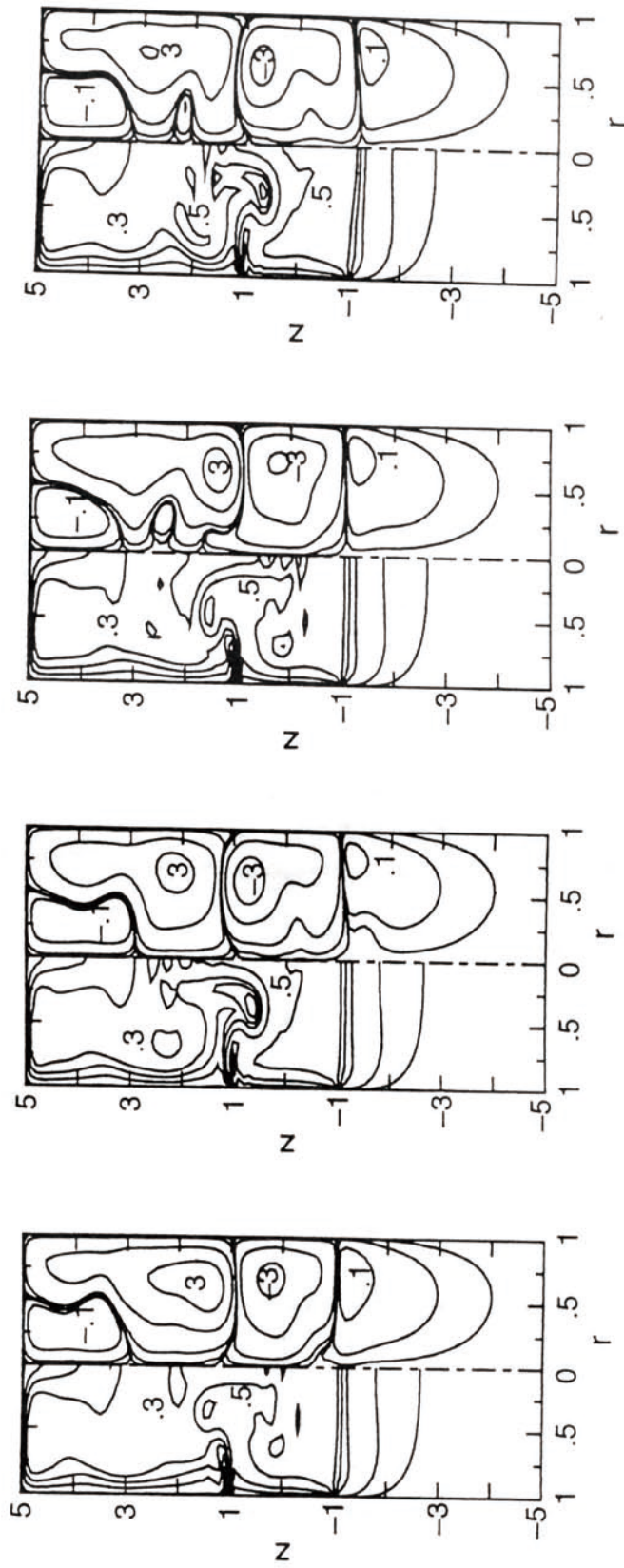
(a)  $z = 0$



(b)  $z = 2$

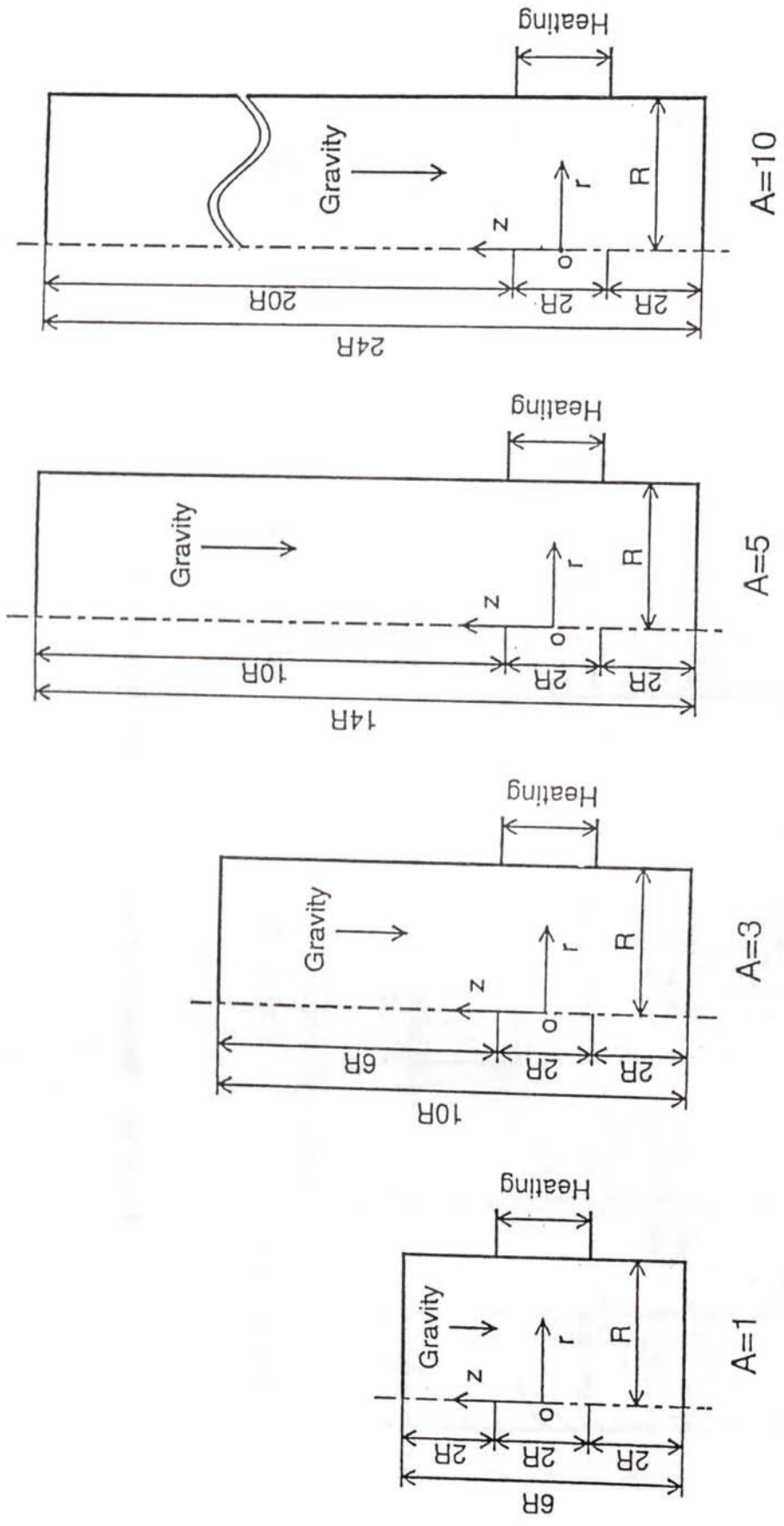
Fig.5-28 Power spectra of temperatures shown in Fig.5-27(a).





(a)  $t=5.1$  (b)  $t=5.15$  (c)  $t=5.2$  (d)  $t=5.25$

Fig.5-29 Variation of isotherms and streamlines at  $Ra = 10^5$  for  $Pr = 10$ .



**Fig.5-30** Model and coordinate system with various aspect ratios

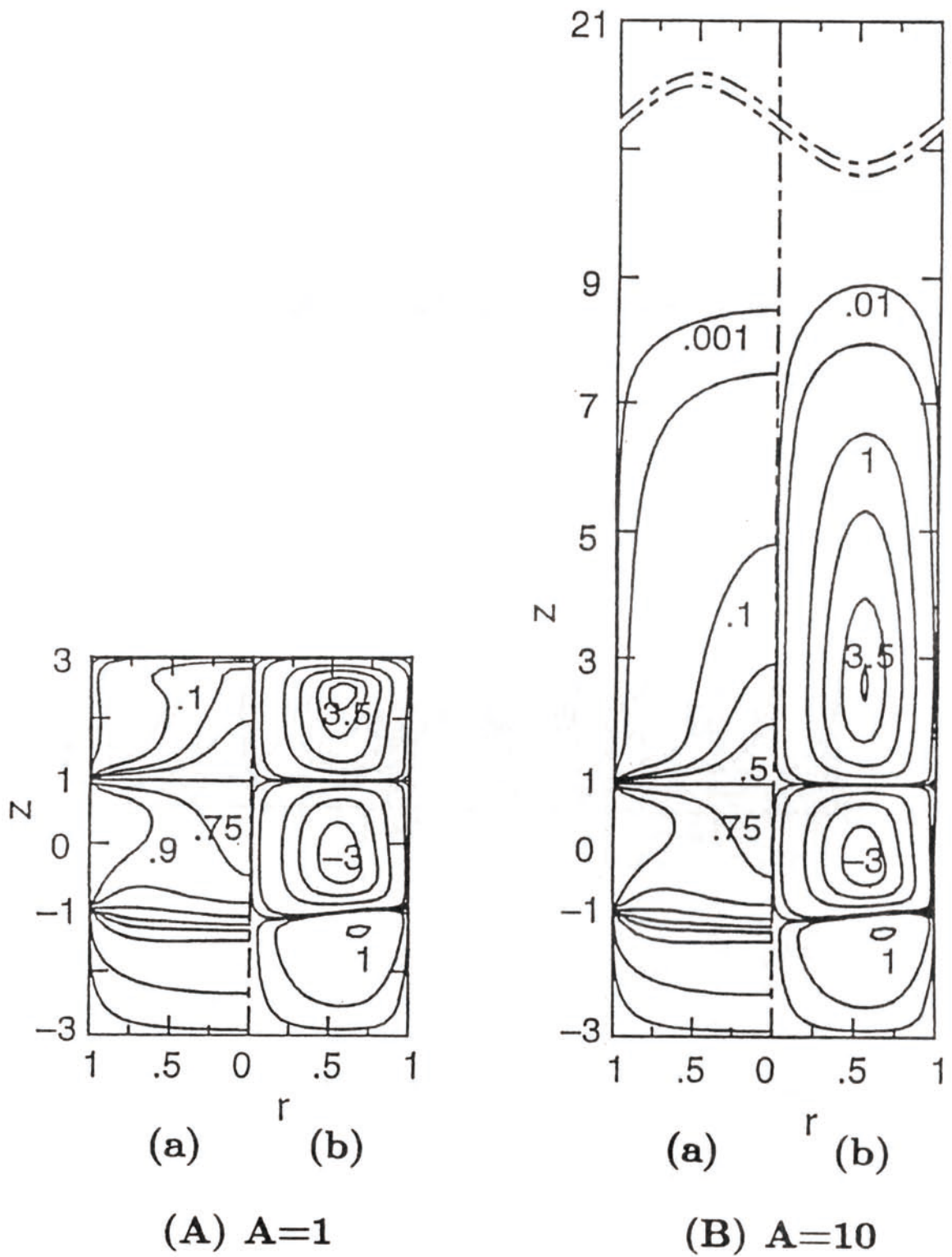


Fig.5-31 Steady state: (a)isotherms and (b)streamlines for  $Ra = 6.8 \times 10^3$

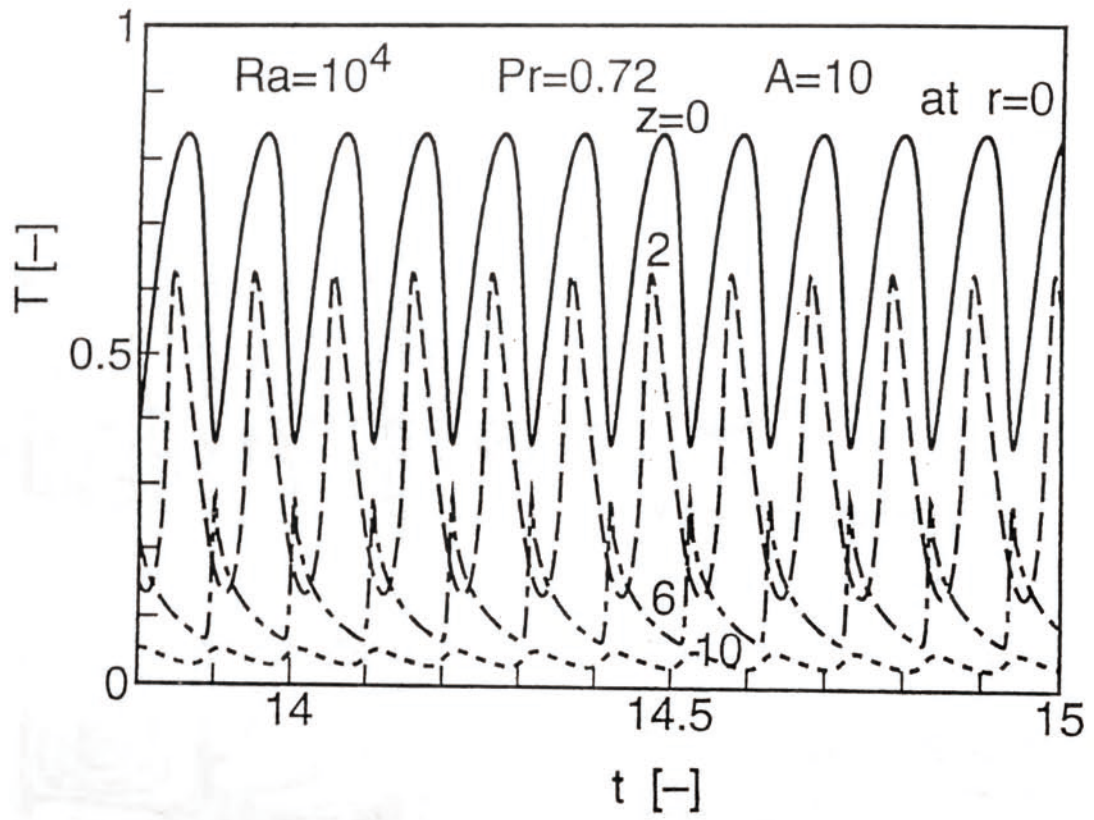


Fig.5-32 Time series of temperature for  $Ra = 10^4$  and  $A = 10$

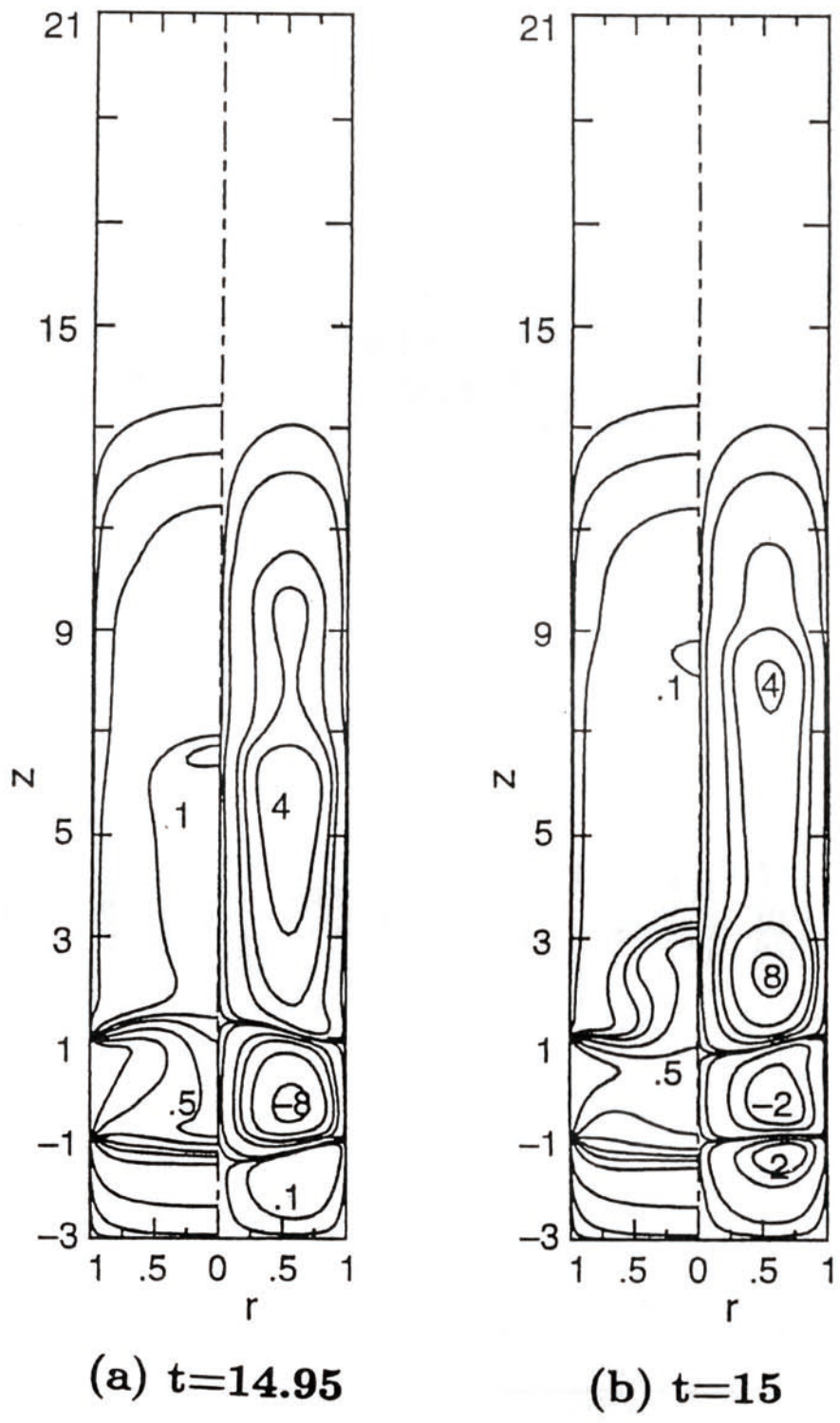
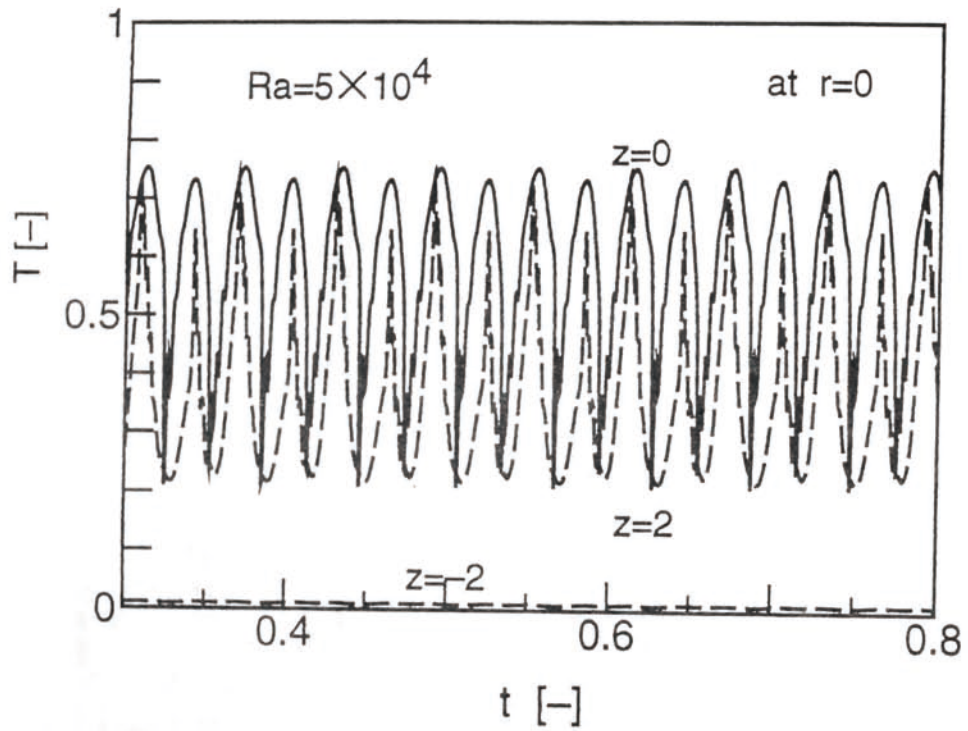
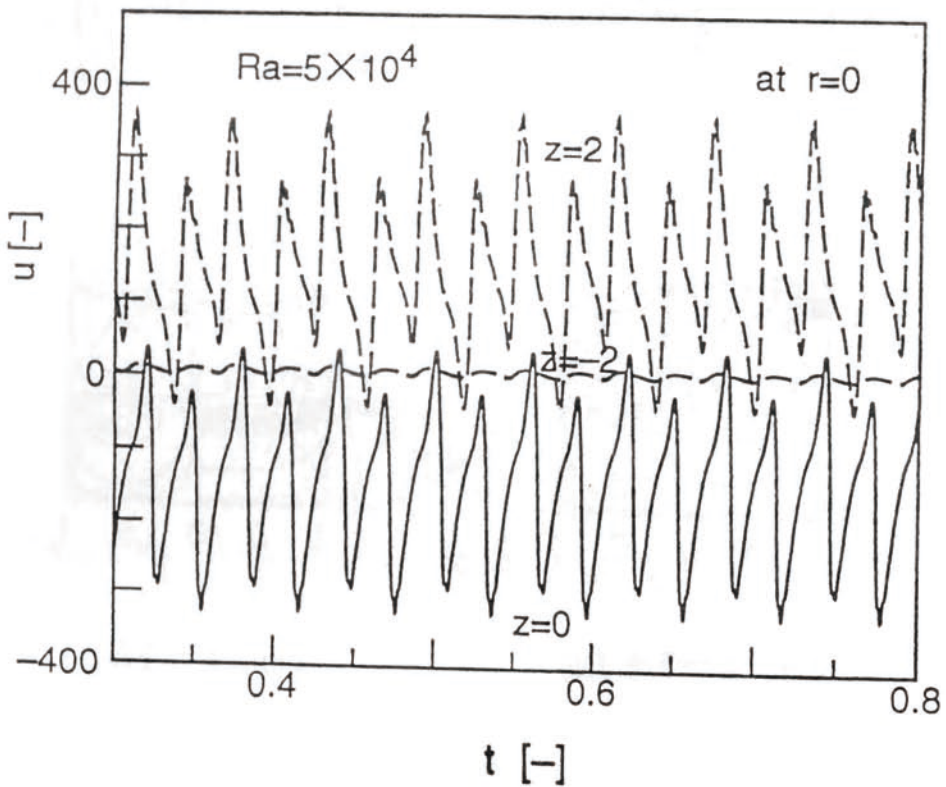


Fig.5-33 Variation of isotherms and streamlines at  $Ra = 10^4$  and  $A = 10$ .

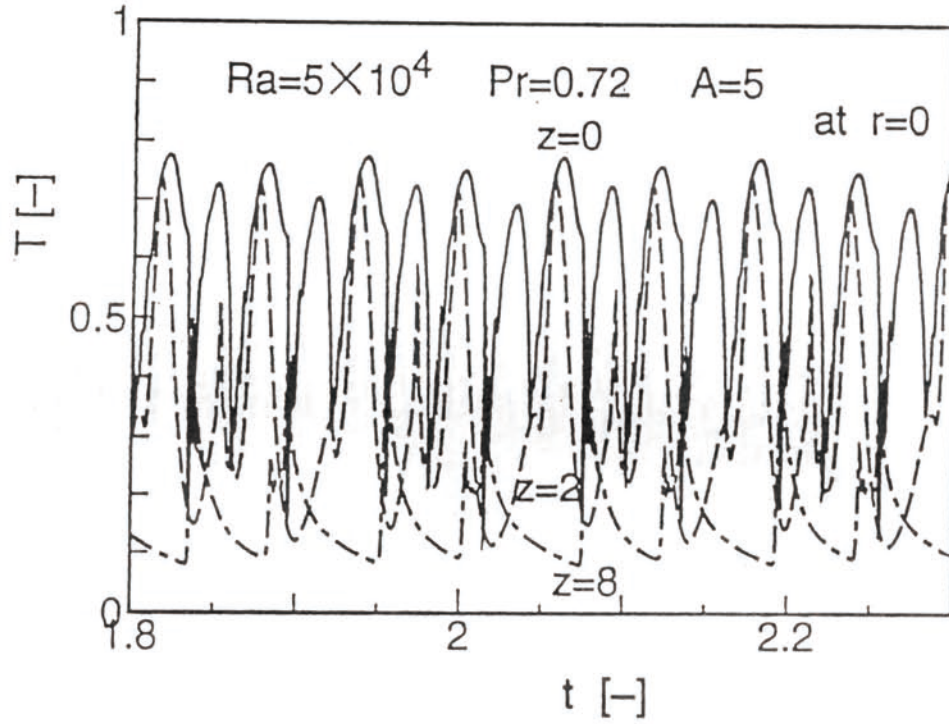


(a) temperature

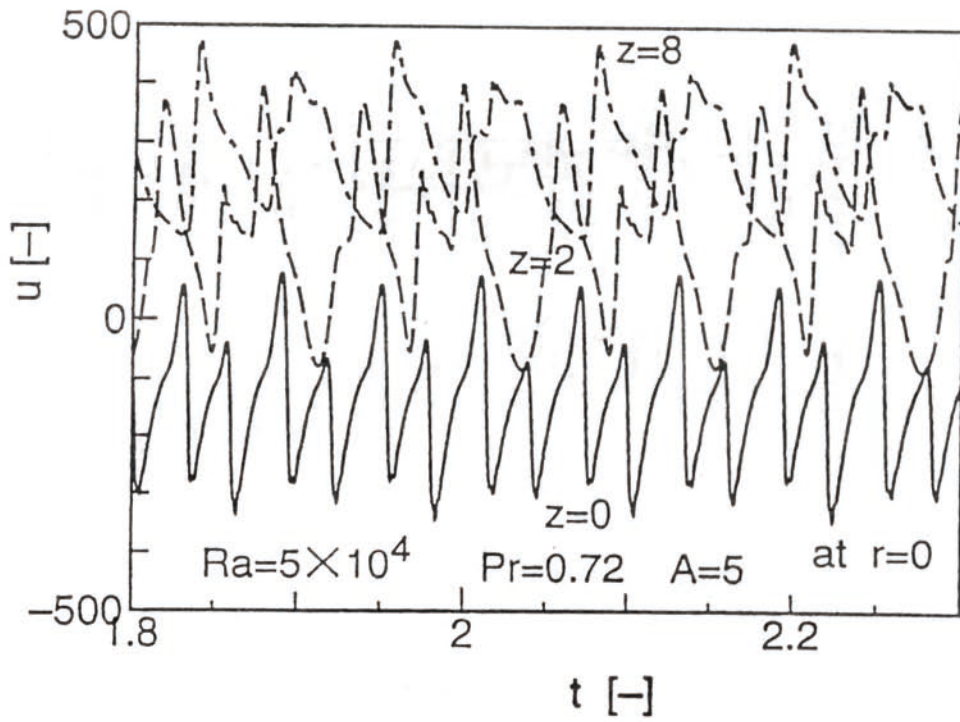


(b) vertical velocity

Fig.5-34 Time series of (a)temperature and (b)vertical velocity at  $Ra = 5 \times 10^4$  for  $A = 1$ .

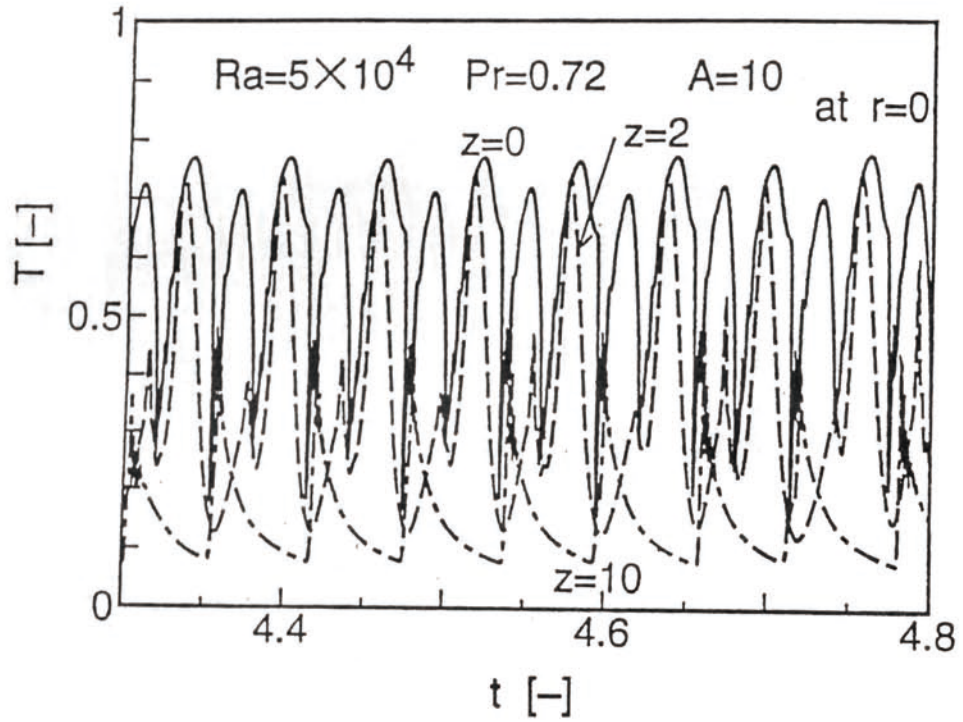


(a) temperature

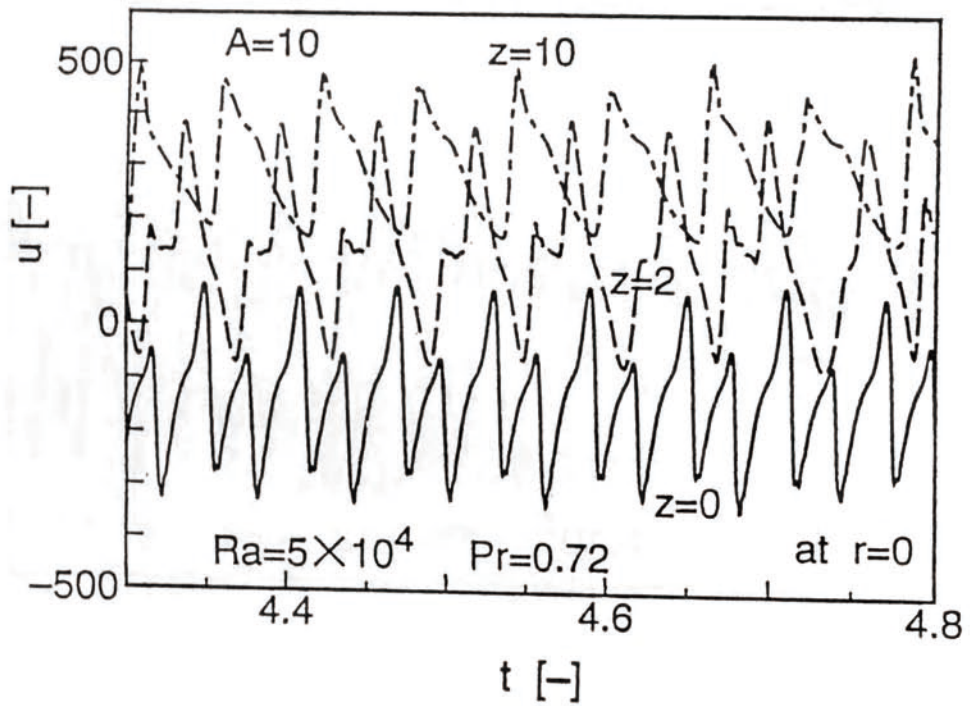


(b) vertical velocity

Fig.5-35 Time series at  $Ra = 5 \times 10^4$  and  $A = 5$



(a) temperature



(b) vertical velocity

Fig.5-36 Time series at  $Ra = 5 \times 10^4$  and  $A = 10$



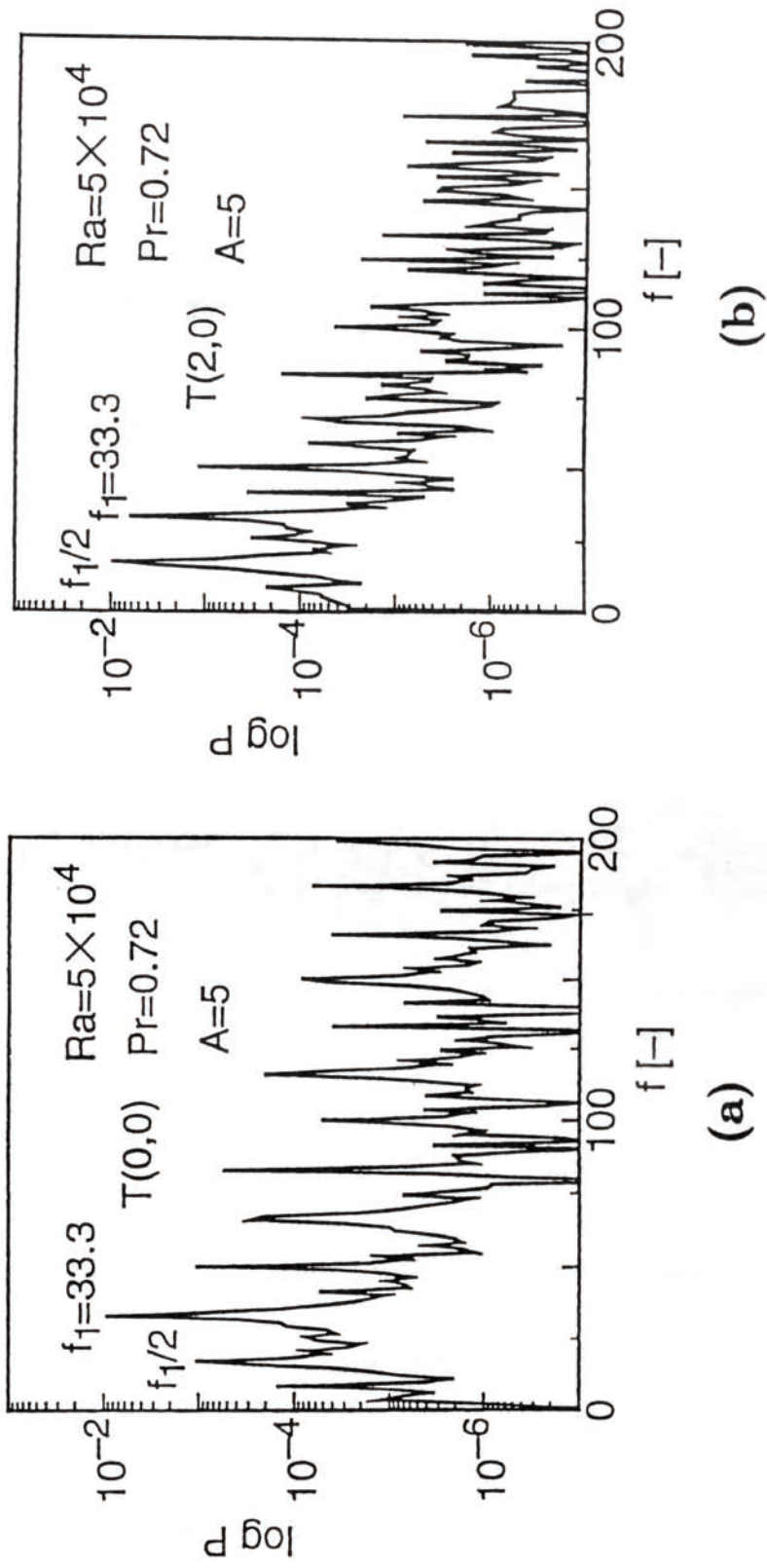
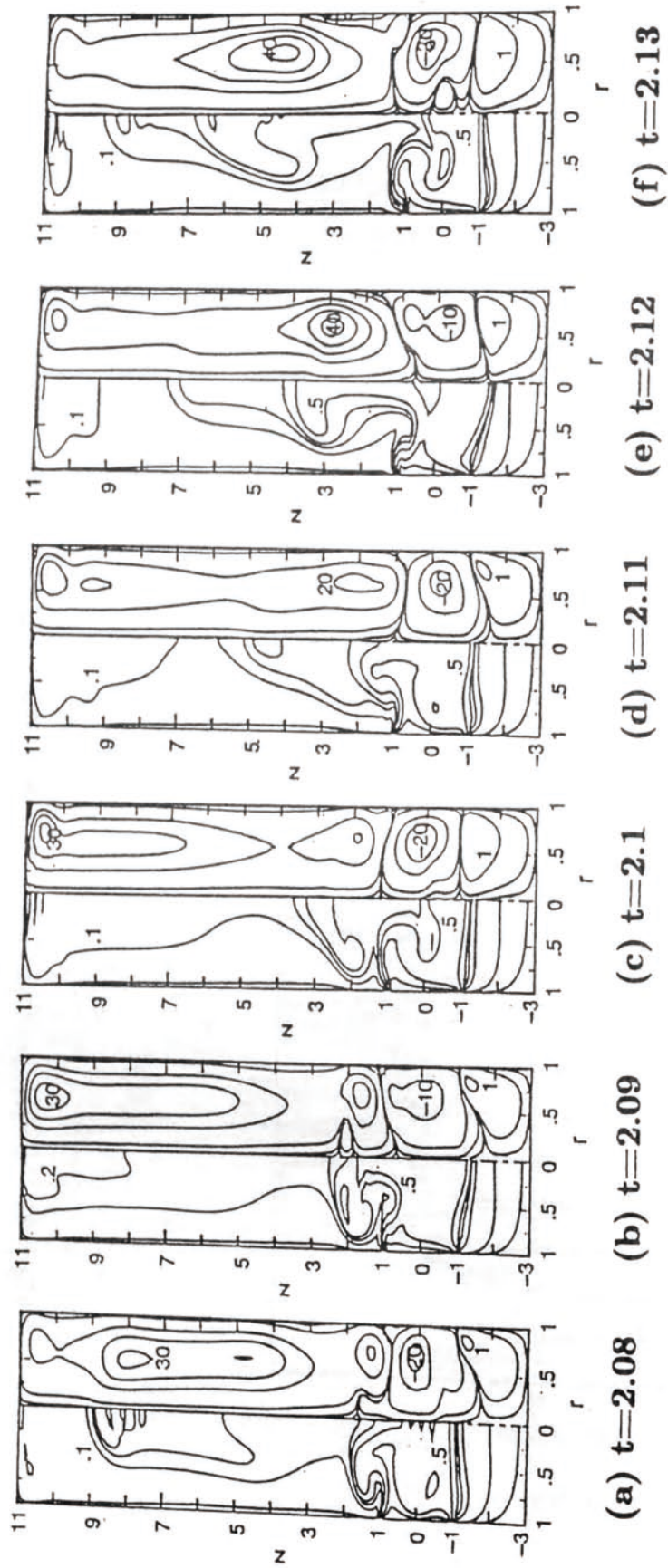


Fig.5-37 Power spectra of temperatures shown in Fig.5-35. (a)  $z=0$ , (b)  $z=2$



**Fig.5-38** Variation of isotherms and streamlines at  $Ra = 5 \times 10^4$  for  $A = 5$ .

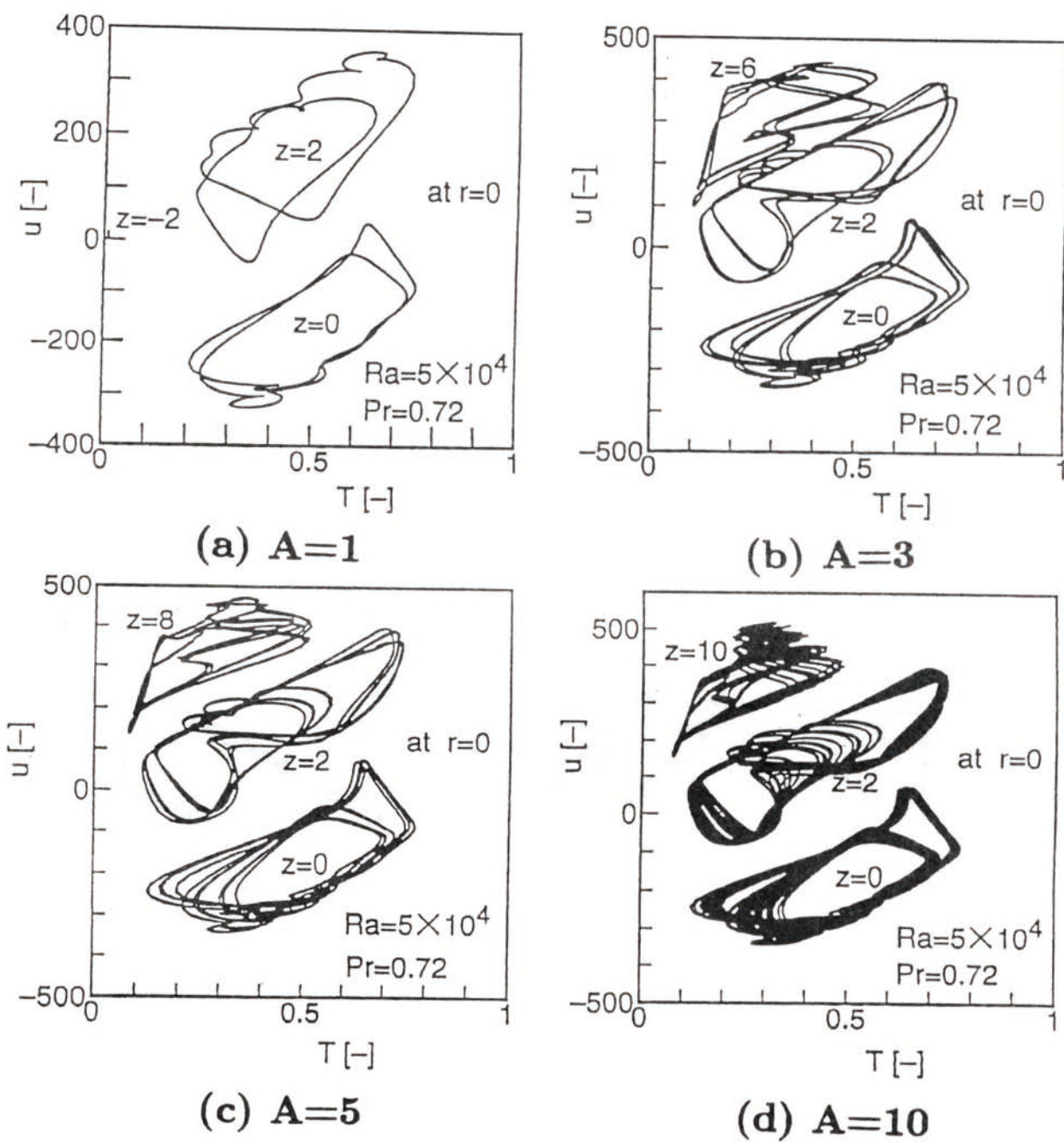


Fig.5-39 Phase-plane plots at  $Ra = 5 \times 10^4$  for various values of  $A$ .

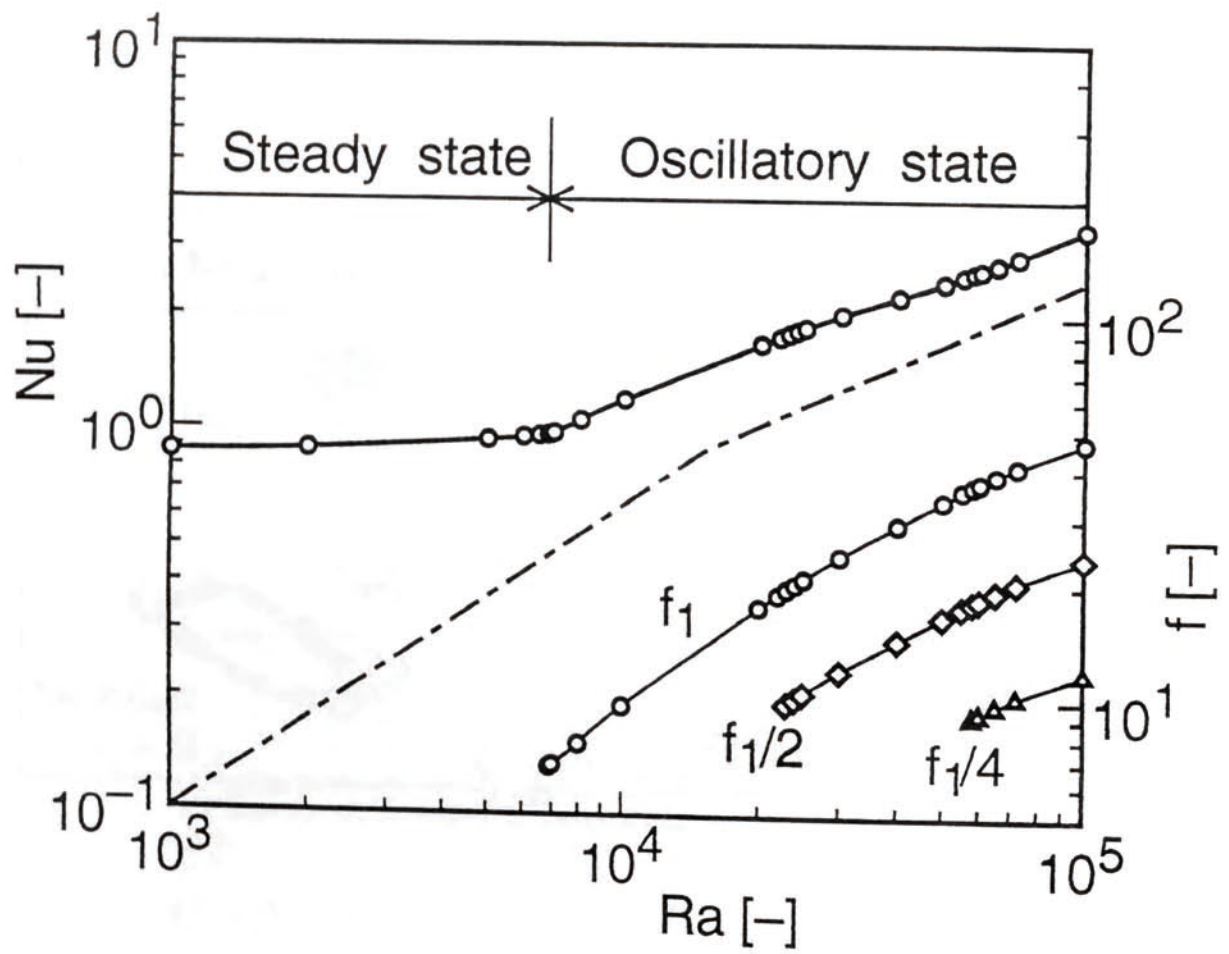
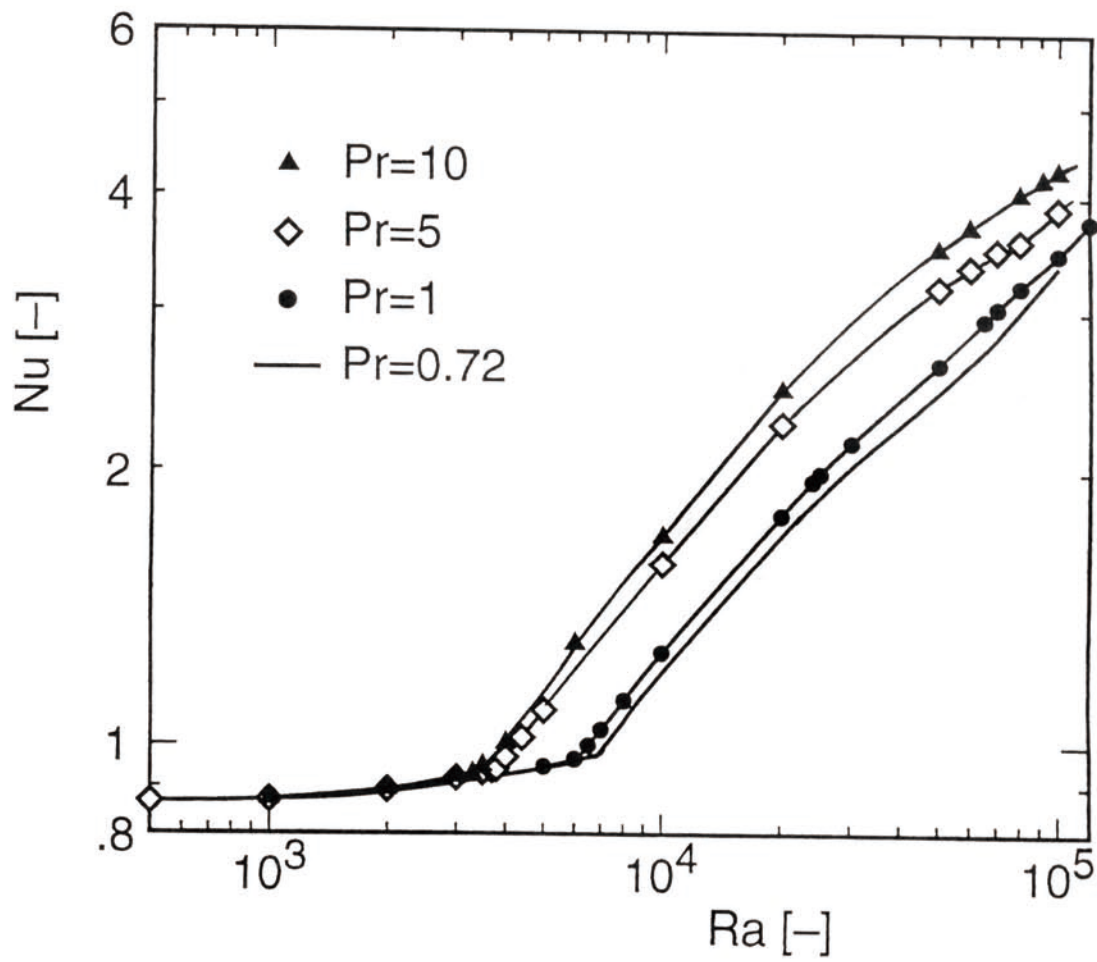


Fig.5-40 The Nusselt number and the frequency as a function of  $Ra$



**Fig.5-41** The Nusselt number as a function of  $Ra$  with various values of  $Pr$

## 記号

$A$  : geometry parameter (=upper cooling length/heating length)

$f$  : frequency

$g$  : gravitational acceleration

$L$  : length of vertical cylinder

$L_{C1}$  : length of the lower cooling zone

$L_{C2}$  : length of the upper cooling zone

$L_H$  : length of the heating zone

$Nu$  : Nusselt number

$P$  : frequency power spectrum of temperature

$Pr$  : Prandtl number(=  $\nu/\alpha$ )

$R$  : radius

$Ra$  : Rayleigh number(= $g\beta(T_H - T_C)R^3/\alpha\nu$ )

$T$  : nondimensional temperature(=  $(T - T_C)/(T_H - T_C)$ )

$T_H$  : Temperature at heated wall

$T_C$  : Temperature at cooled wall

$t$  : nondimensional time(= $t \cdot \nu/R^2$ )

$u$  : nondimensional axial velocity component (=  $u \cdot R/\nu$ )

$v$  : nondimensional radial velocity component(=  $v \cdot R/\nu$ )

$z, r, \theta$  : variables in cylindrical coordinate

$\alpha$  : thermal diffusivity

$\beta$  : coefficient of thermal expansion

$\nu$  : kinematic viscosity

$\rho$  : density

$\psi$  : stream function

$\omega$  : vorticity

## 参考文献

1. F.H. Busse: The oscillatory instability of convection rolls in a low Prandtl number fluid. *J. Fluid Mech.*, 52 (1972) 97-112.
2. J.P. Gollub and S.V. Benson : Many routes to turbulent convection. *J. Fluid Mech.*, 100 (1980) 449-470.
3. H. Yahata : Transition to turbulence in the Rayleigh-Bénard convection. *Prog. Theor. Phys.*, 68 (1982) 1070-1081.
4. H. Yahata : Onset of chaos in some hydrodynamic model systems of equations. *Chaos and Statistical Methods*, Springer(Ed. Y. Kuramoto), (1984) 232-241.
5. 蔵本由紀 : 乱流現象の科学、巽友正編、東京大学出版会 (1986) 第4章.
6. 北村健三、込山公一、斉藤武 : 密閉容器内自然対流の振動現象について。日本機械学会論文集 (B編) 50, 451 (1984) 845-851.
7. J.N. Koster and U. Müller : Oscillatory convection in vertical slots. *J. Fluid Mech.*, 139 (1984) 363-390.
8. Y. Oshima : Experimental studies of free convection in a rectangular cavity, *J. Phys. Soc. Japan* , 30 (1971) 872-882.
9. K. Gotoh and J. Mizushima : The stability of convection between two parallel vertical walls. *J. Phys. Soc. Japan*, 34 (1973) 1408-1413.
10. A. Arakawa : Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion. *J. Comp. Phys.*, 1 (1966) 119-143.
11. K.E. Torrance and J.A. Rockett : Numerical study of natural convection in an enclosure with localized heating from below. *J. Fluid Mech.*, 36 (1969) 33-54.
12. Y. Lee and S.A. Korpela : Multicellular natural convection in a vertical slot. *J. Fluid Mech.*, 126 (1983) 91-121.

13. 日野幹雄：スペクトル解析. 朝倉書店 (1977).
14. I.G. Choi and S.A. Korpela : Stability of the conduction regime of natural convection in a tall vertical annulus. *J.Fluid Mech.*, 99 (1980) 725-738.
15. J. Mizushima : Equilibrium solution of the secondary convection in a vertical fluid layer between two parallel plates, *Fluid Dynamics Res.*, 5 (1990) 289-299.
16. B.B. Rogers and L.S. Yao : Natural convection in a heated annulus. *Int. Heat Mass Transfer*, 36 (1993) 35-47.
17. H. Gao and R.P. Behringer: Onset of convective time dependence in cylindrical containers. *Phys. Rev. A*, 30 (1984) 2837-2839.
18. 坂田光雄、香川詔士：側壁部分加熱による鉛直円筒内自然対流（アスペクト比の効果）、和歌山高専研究紀要、31 (1996) 1-6.



## 第6章

## 結論

## 第6章 結論

本研究は、熱あるいは物質移動に伴う自然対流の発生および流れの変化として、反応吸収時の表面張力勾配の不安定性（マランゴニ対流）に対して線形安定論を用いた解析、気泡塔における均一気泡流動域から乱流循環流動域への遷移の判定および鉛直円筒側壁部分加熱における熱対流の流れの変化について実験と数値解析を行った。各章で得られた結論は、以下のとおりである。

第2章「反応吸収系におけるマランゴニ対流」では、定常擬1次反応吸収を伴う等温静止液層の安定問題として線形安定論により考察した。表面張力は、生成物濃度と溶質ガス濃度に依存し、生成物は不揮発性と仮定し、ガスの気相側移動抵抗を考慮にいった。液層底部で生成物濃度は $C_p = 0$ とし、溶質ガス濃度は $C_A = 0$  (Case(i)) と  $\partial C_A / \partial y = 0$  (Case(ii)) の2通りの場合について考察した。更に、表面変形が可能とした時の対流発生条件を明らかにした。

定常モードに対する本問題は、生成物濃度依存のマランゴニ数  $M_R$  に対して、

$$M_R(\alpha, \gamma, L, B, M_A, N_c, N_G)$$

の固有値問題として解析した。ここで、各パラメータは、波数 $\alpha$ 、反応パラメータ $\gamma$ 、溶質ガスと生成物の拡散係数比 $L$ 、気相側物質移動の効果を示すビオ数 $B$ 、溶質ガス濃度依存のガスマランゴニ数 $M_A$ 、表面粘性力と表面張力の比であるクリスペイション数 $N_c$ 、重力と表面張力の比を示すウエバー数 $N_G$ である。また、漸近解を求めることにより特徴を明らかにした。その結果、

表面変形のない平滑表面の場合、

- (1) 今石らの解析（底面で $C_A = 0$ のCase(i)に対応）を確認するとともに、底面で溶

質ガスが流束ゼロのCase(ii)の境界条件の場合についても対流発生条件を明らかにした。これらの境界条件の違いは、遅い反応 ( $\gamma < 5$ ) のとき対流発生に影響を与える。

- (2) 気相側ガス移動抵抗を考慮することにより、ビオ数  $B$  とガスマランゴニ数  $M_A$  の効果を明らかにした。その結果は、おおむね  $LM_A/B$  の値が大きいと不安定化する。

表面変位  $S(\alpha, N_c, N_G)$  を考慮することにより表面張力波  $N_c$  と重力波  $N_G$  の影響を考察した。

- (3) 表面張力勾配に起因する攪乱の構造は、上昇流において表面が下降し、下降流で表面隆起となっていることを反応吸収系においても確認した。

- (4) 表面変形の効果は、 $\alpha$  対  $M_R$  の中立曲線において、表面平滑の場合に比べ低波数域に顕著な違いが現れた。この特徴は、 $\alpha \ll 1$  の漸近解 ((2.44) 式) から理解できる。特に、 $B \rightarrow \infty, N_G = 0$  の場合、 $\alpha = 0$  で臨界値  $M_{RC} = 0$  を与える。また、 $\alpha = 0$  における  $M_R$  は  $L$  に依存せず、 $N_G/N_c$  および  $\gamma$  によって決まり、 $N_G > 0$  では重力は安定化作用を持つ。 $B$  が有限の場合の固有値  $M_{R,\alpha=0}$  は、 $N_G/N_c$  と  $LM_A$  の組み合わせにおいて  $\gamma$  と  $B$  に関係する。特に、 $LM_A$  依存性は、境界条件の違い (溶質ガスの底部での違い) に対して、逆の作用 (安定と不安定) を持つことがわかった。

- (5) 臨界マランゴニ数  $M_{RC}$  は、表面変形不安定と対流不安定の2つのモードがある。これは、波数  $\alpha = 0$  の  $M_R$  が臨界値を与える場合と平滑表面時に与えられる  $1 \leq \alpha \leq 2$  付近で臨界値を与える場合にそれぞれ対応する。どちらのモードが臨界値を決定するかは、式(2.44)の  $M_{R,\alpha=0}$  の値と、Fig.2-3( $B \rightarrow \infty$ ) および Fig.2-4( $B = 0$ ) から推測される  $M_{RC,\alpha \approx 2}$  の値からわかる。

第3章「気泡塔内流れの遷移について」では、流れの観察と空塔流速  $V_G$  に対するガスホールドアップ  $\varepsilon_G$  特性から均一気泡流動と乱流循環流動の遷移条件を推定する方法を提案した。

- (1)  $\varepsilon_G$ と $V_G$ の関係は、分散板の孔径が $d \geq 0.2\text{cm}$ では分散板条件に無関係になることおよび低ガス流速では一部の孔からの気泡発生のため偏流を持つため循環流動域と考えられること、また高 $V_G$ ではすべての孔径に対して同一の $\varepsilon_G$ とみなせることから、この状態を基準の $\varepsilon_G^*$ と考えた。この $\varepsilon_G^*$ に対する水-空気系のガスホールドアップ $\varepsilon_G$ の比 $\varepsilon_G/\varepsilon_G^*$ を図示すると折線特性を示す。この折れ線特性は、気泡塔内の流動状態と対応しており、従来報告されている多くのデータに対して、この作図方法を適用して第1臨界ガス流速 $V_{c1}$ （均一気泡流動域から遷移域へ）および第2臨界ガス流速 $V_{c2}$ （遷移域から乱流循環流域へ）を見いだした。
- (2) 求めた臨界流速 $V_c$ は、装置条件（塔径 $D_T$ 、孔径 $d$ 、孔数 $n$ 、孔ピッチ $p$ ）だけから構成される因子 $(np/dD_T^2)$ の関数として、

$$V_{c1} \propto (np/dD_T^2)^{1/2}, \quad V_{c2} \propto (np/dD_T^2)^{1/3}$$

と近似されることがわかった。

第4章「鉛直側壁部分加熱による円筒内熱対流の実験」では、鉛直円筒の一部環状壁を加熱したときの円筒内に発生する自然対流について、十分円筒が長い場合の内部流体に液体を用いた場合の流れの観察と温度分布測定、および円筒を短くしたモデル装置を用い空気の温度測定を行った。円筒が十分に長い液体を用いた場合、加熱層と上部冷却層で乱流状態になっており、温度分布の最高点は加熱層上端近くに現れることがわかった。

低 $Ra$ からの遷移過程を調べるため、空気 ( $Pr = 0.71$ ) の場合の温度の時系列測定から対流状態の変化を調べた。また、空間の大きさの効果を調べるため、 $A = (\text{上部冷却層長さ}) / (\text{加熱層長さ})$  として、 $A = 1 \sim 5$ まで変え、温度測定を行った。対流は、下部安定成層、加熱層、上部不安定層と分けることが出来るが、加熱層と上部不安定層に特徴的な変化が見られた。しかし、空間的に同一の変動を示さないこともあり、主として加熱層の変動を中心に考察した。その結果、以下のことが明らかになった。

- (1)  $Ra$ の増加と共に温度の時間変動は、定常、周期振動、分調波周期振動、不規則振動と変わることがわかった。

- (2) 温度変動は、加熱層より上部冷却層の方が低  $Ra$  から規則振動あるいは不規則振動へと変化する。
- (3) 定常から周期振動発生臨界  $Ra$  を  $Rac$  とすると、 $A = 1$  の空間が狭いほど  $Rac$  は大きく、 $A$  を増加すると  $A = 3$  で最小の  $Rac$  が現れる。更に  $A$  を増すと  $Rac$  は増加する。

第5章「鉛直側壁部分加熱による円筒内熱対流の数値計算」では、鉛直円筒の一部環状壁を加熱したときの円筒内に発生する自然対流について、軸対称流を仮定し対流項に対し2次精度の風上差分法と4次精度のArakawa差分を用いた数値解析を行った。レイリー数  $Ra$ 、プラントル数  $Pr$  および上部冷却層長さを変えた時の空間効果について検討した。その結果、以下のことが明らかになった。

まず、2種類の差分法による結果は、 $Ra$  が小さいときは差はないが、 $Ra$  が大きくなると大きな違いがでる。

- (1)  $Pr = 0.72$  に対して、振動流発生臨界レイリー数  $Rac_1$  は、風上差分において  $Rac = 8.7 \times 10^3$  と評価されるが、Arakawa 差分では  $6.9 \times 10^3$  に低下した。
- (2) 更に、 $Ra$  が大きい領域では、対流の分岐に差が現れ、風上差分では  $Ra = 10^7$  においても計算は可能であった。

これらの違いは、風上差分における人工粘性効果のため実際よりも安定化された結果を与えるものと考えられる。そこで、高次精度のArakawa差分を用い、詳細に検討した。以下は、その結果をまとめる。

$Pr = 0.72$  (空気) に対する対流は、

- (3)  $Ra = 6.8 \times 10^3$  までは側壁温度条件に対応する加熱層、上下の冷却層にそれぞれセルを持った3セル構造の定常対流となる。
- (4) 更に  $Ra$  を増加したとき、 $Ra = 6.9 \times 10^3$  より規則正しい周期振動流となる。従って、定常流から振動流への流れの遷移 (ホップ分岐) の臨界レイリー数  $Rac_1$  は、

約  $6.9 \times 10^3$  である。規則振動状態は、 $6.9 \times 10^3 \leq Ra \leq 2.2 \times 10^4$  の範囲において観察された。

- (5)  $Ra = 2.3 \times 10^4$  から周期倍化現象（温度および軸速度の時系列データは異なる 2 つのピークが規則的に繰り返され、基本振動数  $f_1$  とその半分のピークが現れる）を示した。つまり、約  $Rac_2 = 2.3 \times 10^4$  に時間特性の  $2^1$  分岐（第 2 のホップ分岐）が存在する。周期倍化振動は、上部不安定層をサーマルが上昇する機構に関係することがわかった。この振動の領域は、 $2.3 \times 10^4 \leq Ra \leq 5.5 \times 10^4$  で観察された。
- (6) 振動流は更に  $Ra$  を上げると、 $Ra = 5.8 \times 10^4$  では 4 つの波形が規則的に繰り返される  $2^2$  分岐が、 $Ra = 6 \times 10^4$  で更に高次の  $2^3$  分岐が確認された。更に、 $Ra$  を増すとより高次の周期を含む振動特性及び間欠的な乱れを含むカオス的特性となることがわかった。

円筒内の流体の種類が異なるときの効果、つまり、プラントル数  $Pr$  を 1, 5, 10 と変えた場合の数値解析を行い、考察した。その結果、以下のことが明らかになった。

- (7) 振動流発生の臨界  $Rac_1$  の値は  $Pr$  の値と共に低くなる。
- (8)  $Pr = 1$  の場合は、 $Pr = 0.72$  と同様  $2^n$  分岐過程を示すが、 $Pr = 5, 10$  では、 $2^n$  分岐は観察されず、3セルから円筒頂部の中心軸付近に安定な第 4 番目のセルが起り全体として 4セルへ構造を変化させる。4セル構造へ変化した時の対流の時間的変動は、 $Pr = 5$  のとき基本振動数  $f_1$  の  $1/3$  の振動数を持ち、 $Pr = 10$  のとき準周期特性を示した。

アスペクト比は対流に対して重要なパラメータであることはよく知られている。空気に対応する  $Pr = 0.72$  に対し、形状パラメータとして  $A =$  上部冷却層長さ/加熱層長さとしたとき、 $A = 1, 3, 5, 10$  と変えた場合の空間効果を調べた。その結果、以下のことが明らかになった。

- (9) 上部冷却層長さを変えても  $Rac_1 = 6.9 \times 10^3$  より周期振動流が発生し、上部冷却層の大きさは振動流開始条件に影響しないことがわかった。

- (10)  $Ra$  の値と共に振動流は、2<sup>nd</sup>分岐を示すが、空間が大きいほど高次分岐は低い  $Ra$  で表れ、乱れやすいことがわかった。
- (11) 高次分岐は、加熱層から上方に吐き出されるサーマルの上昇機構により起こる。それは、サーマルが吐き出される時に過渡的な第4番目のセルを持つか持たないかの違いからサーマルの上昇速度に差が生じ、2つのサーマルが1つになろうとする。そのため、空間が大きいほど高次分岐は起こりやすいことがわかる。

加熱壁面から円筒内流体への伝熱量は、ヌッセルト数  $Nu$  として評価した。

- (12)  $Nu$  は、定常対流のとき  $Pr$  に関係なく、 $Ra$  と共に僅かずつ増加する。
- (13) 振動流が発生すると、平均  $\bar{Nu}$  は  $Pr$  依存性を示し、 $Ra$  と共に急に大きくなり伝熱量が増加する。また、対流の時間的空間的な2次的分岐は  $\bar{Nu}$  に対して大きな影響はないと考えられる。

## 謝辞

本論文をまとめるにあたり、信州大学工学部生産システム工学科教授 土屋良明先生より終始暖かい激励と細部にわたるご指導を賜りました。心より感謝の意を表する次第であります。

更に、大変ご多忙のところ本論文の査読・校閲をしていただきました信州大学工学部教授 玉木恕平先生、同教授 平田哲夫先生、同助教授 池田敏彦先生に心よりお礼申し上げます。

マランゴニ対流の研究については、沼津工業高等専門学校電子制御工学科教授 舟田敏雄先生に有益なご助言やご討論をいただきました。気泡塔に関する研究および熱対流の研究を進めるにあたり、東京大学工学部名誉教授 故宮内照勝先生に有益なご指導を受けました。また、熱対流の実験には、関東学院大学工学部教授 香川詔士先生に貴重なご助言をいただきました。ここに記して感謝いたします。熱対流数値計算の整理の折、ご指導およびご助言をいただきました同志社大学工学部教授 水島二郎先生に感謝いたします。

また、本論文をまとめるにあたり何かと御便宜いただきました信州大学工学部助教授 杉本公一先生に感謝いたします。和歌山工業高等専門学校の機械工学科および工業化学科（現物質工学科）の諸先生方には、研究を進めるにあたり何かとご支援いただきましたことをここに記して感謝申し上げます。



## 本論文に関する著者の関係論文

### 第2章に関するもの

- (1) Mitsuo SAKATA and Toshio FUNADA : Effects of the Surface Deformation on Marangoni Instability in Chemical Reaction, Journal of the Physical Society of Japan, Vol.50, No.2 (1981) pp.696-702.
- (2) Toshio FUNADA and Mitsuo SAKATA : Marangoni Instability Due to Chemical Absorption, Journal of the Physical Society of Japan, Vol.57, No.2 (1988) pp.476-489.

### 第3章に関するもの

- (3) 坂田光雄、宮内照勝 : 気泡塔における均一気泡流動域から乱流循環流動域への遷移について、化学工学論文集、第6巻、第4号(1980) pp.428-431.

### 第4章に関するもの

- (4) 香川詔士、野田清、坂田光雄、今里博教、宮内照勝 : 原油熱回収プロセスにおける温度観測井の実験的解析、石油学会誌、第35巻、第1号(1992) pp.56-64.

### 第5章に関するもの

- (5) 坂田光雄 : 側壁部分加熱による鉛直円筒キャビティ内自然対流の数値解析、日本流体力学会誌「ながれ」、第13巻、第2号(1994) pp.131-142.
- (6) Mitsuo SAKATA : Numerical Study of Natural Convection in a Cylindrical Cavity Bounded by a Partially-Heated Vertical Wall, Fluid Dynamics Research, Vol.18, No.4 (1996) pp.223-235.