

合成リカッチ変換法による非線形最適制御問題
の数値計算法の研究

蔡 大 維

①

合成リカッチ変換法による非線形最適制御問題 の数値計算法の研究

1995年3月

蔡 大 維

目次

1	序論	1
1.1	最適制御と数値計算法	1
1.2	研究内容	2
2	最適制御問題	5
2.1	最適制御問題	5
2.2	ハミルトン関数と最適性の必要条件	6
2.3	最大値原理	9
2.4	2点境界問題	10
2.5	不変埋込法	11
3	線形最適制御問題	13
3.1	終端状態自由の線形2次形式最適制御問題	13
3.1.1	2点境界問題の導出	13
3.1.2	線形2点境界値問題の解法	14
3.2	終端制約のある線形2次形式最適制御問題	15
3.2.1	ラグランジュ乗数法による問題の変換	15
3.2.2	合成リカッチ変換法の導入	18
4	非線形最適制御問題	21
4.1	非線形最適レギュレータ問題	21
4.1.1	リカッチ変換式の導入	21

4.1.2	ニューラルネットワークによるレギュレータの設計	23
4.2	非線形終端拘束をもつ非線形最適制御問題	29
4.2.1	合成リカッチ変換法の導入	29
4.2.2	計算アルゴリズム	34
4.3	未知終端時刻問題への拡張	35
4.3.1	時間変数の変換	35
4.3.2	計算アルゴリズム	39
4.4	制御制約をもつ非線形最適制御問題	40
4.4.1	制御修正量の導入	40
4.4.2	計算アルゴリズム	42
4.5	制御項が x の非線形関数になる場合への拡張	43
4.5.1	クロネッカ積の導入	43
4.5.2	計算アルゴリズム	45
5	合成リカッチ変換によるアルゴリズムの収束性	47
6	数値例	55
6.1	非線形最適レギュレータ問題数値例	55
6.2	終端点拘束問題の数値例	59
6.3	制御量制約問題の数値例	62
6.4	マニピュレータ制御への応用数値例	65
7	結論	73
8	謝辞	75
A	付録	77
A.1	記号	77
A.2	線形最適制御問題の合成リカッチ微分方程式とその補助方程式の導出	79
A.3	合成リカッチ変換式のリカッチ変数の性質について	81

A.4	x と h に関する微分方程式の導出	83
A.5	ニューラルネットワーク結合荷重の修正則の導出	84
A.6	非線形最適制御問題の合成リカッチ微分方程式と補助方程式の導出	85
A.7	参考文献	87
A.8	著者論文	89
A.9	筆者論文と各章との関係	90

Chapter 1

序論

1.1 最適制御と数値計算法

最適制御とはシステムの状態方程式と制約条件のもとで、与えられた評価関数を最小化する制御のことである。このとき制約条件や評価関数は、目的や要請に応じてどのように複雑な定式化も可能である。

最適制御理論には、1) 古典的変分法に基づくもの、2) Pontryagin の最大原理、3) Bellman の動的計画法 (Dynamic Programming) によるものがある。しかし、もっとも基礎的でかつ内容も豊富なのは変分法によるものである。多くの研究は変分法の諸結果を応用し、最適制御の必要条件を誘導できる。変分法の最適制御への応用研究は Berkovitz の論文^[1]が原典であり、それ以後、線形と非線形最適制御問題について、いろいろな研究論文が発表された。

変分法は 18 世紀に Euler, Lagrange らによって始められ、Legendre, Jacobi, Weierstrass, Bolza, Bliss, Mcshane らによって研究された。Euler の方程式や Weierstrass の条件は基本定理であるが、とくに最適制御の必要条件を誘導するときには、微分方程式制約付き変分法のラグランジュ乗数則が不可欠である。ハミルトン関数を定義して、最適性条件と横断条件を求め、問題の定式化を行う。これらの定式を基にして、Bellman と Kalaba らが代表的な研究を行った。彼らは 2 点境界値問題を解くために準線形化法と不変埋込法を併用した。

最適制御問題に対する計算法は初めは勾配法とくに降下方向を利用した最急降下法が用いられた。このために汎関数の勾配を計算しなければならないが、勾配法はアルゴリズムが簡単で良い安定性をもつが、収束は停留点近傍でますます遅くなるという性質がある。それは 1960 年代の初めころには公式化されたものと思われる^[2]。共役方向法と勾配方向を利用して漸次共役方向を見いだしてゆく共役勾配法における Fletcher-Reeves 法によるアルゴリズムは Lasdon, Mitter & Warren^[3] の 1967 年の論文に現れ、最急降下法よりもはるかに速い収束性を誇った。またニュートン法の一つで有力な計算法である Davidon-Fletcher-Powell 法 (DFP) の最適制御計算への応用法は、1969 年の Lasdon^[4]の

論文に示されている。共役勾配法は準ニュートン法と異なり、ヘッシアンの近似は行わない。一方、拘束条件のついた問題に対するアルゴリズムは、ペナルティ法 (penalty methods) や乗数法 (multiplier methods) などがあるが、上述の準ニュートン法を利用し、かつ探索の方向を許容な方向にとり続ける許容方向法 (feasible direction methods) もある。

また、最適入力によりハミルトン関数 H を最大にするという条件からの強変分法を利用した計算法が Jacobson & Mayne によって微分動的計画法 (Differential Dynamic Programming, DDP)^[5] として提案されているが、井前、箱守、Sakawa、Shindo らによって新しいアルゴリズムが開発されている。

1.2 研究内容

本論文では主に変分法から導かれた最適性の必要条件をもとにして、合成リカッチ変換法を導入し、2次形式非線形最適制御問題の計算アルゴリズムについて研究が行われる。

山浦らの研究^{[18]~[20]}に既に逆リカッチ変換法を用いれば終端点固定問題が扱えることを示した。本研究では、1) 終端点の拘束のない場合、2) 終端点の非線形拘束のある場合、3) 終端時刻未知の場合、4) 制御制約をもつ場合、5) 制御項に状態変数の非線形関数を含む場合などの非線形最適制御問題について、不変埋込法としてのリカッチ変換と合成リカッチ変換を用いて最適性の条件より2点境界問題として定式化し、それらの非線形最適制御問題の数値計算問題を解くための新しい計算アルゴリズムを提案する。さらに、合成リカッチ変換法を用いる計算アルゴリズムの収束性を調べ、計算アルゴリズムの収束を保証する十分条件を導く。その十分条件より、アルゴリズムの収束性とそれに影響する要素の関係を調べる。

また、線形システム方程式と2次形式評価関数からなる最適制御問題はLQ制御問題または最適レギュレータと呼ばれ、線形制御系設計法の中核をなしている。この線形最適制御問題についての研究がよく行われた。最適制御入力のための状態フィードバック制御則が与えられ、その結果、閉ループ制御系を構成できることである。しかし、一般の非線形制御問題においては、最適制御入力を開ループの時間関数としては計算できるが、状態フィードバック制御則を得るのは難しい。師玉らの研究^{[8]~[11]}では、ある非線形系に対して、非線形最適フィードバック問題を関数空間上の不動点問題として定式化される。本論文では、この不動点問題の近似解を求める手段として、階層型ニューラルネットワークを用いて非線形最適レギュレータの構成法を提案する。

本論文は7章からなっている。以下、各章の概要を述べる。

第2章では第3章と第4章の準備として、それぞれ最適制御問題、最大値原理、2点境界問題および不変埋込法に関して本論文の議論に必要な事項について説明する。

第3章では、線形2次形式最適制御問題について、終端自由と終端制約のある問題の解法について記述する。さらに、終端制約のある問題を解くために導入する合成リカッチ変換法について、そのリ

カッチ変数の性質を議論する.

第4章では, 非線形2次形式最適制御問題について, 非線形最適レギュレータ問題, 終端拘束をもつ非線形最適制御問題, 未知終端時刻問題, 制御量制約をもつ問題および制御項に x の非線形関数をもつ問題について理論的側面とアルゴリズムなどを記述する.

非線形最適制御レギュレータ問題については, 不変埋込法のリカッチ変換式を導入し, 状態変数 x とその非線形写像である変数 p に関する連立微分方程式の組を導く. さらに優れた非線形写像を近似する能力をもつ階層型ニューラルネットワークを用いて, 状態変数 x の非線形写像 $p(x)$ の近似解を求めて非線形最適レギュレータの構成法を提案する.

終端拘束をもつ非線形最適制御問題については, 合成リカッチ変換法を導入し, 合成リカッチ微分方程式とその補助微分方程式を導いて, ラグランジュ乗数の初期値を求める. それらの定式化によって, 二つの計算アルゴリズムを提案する. さらに時間変数の変換を行って, 合成リカッチ変換法を未知終端時刻問題へ拡張した計算アルゴリズムを提案する. 制御量制約をもつ問題について制御修正量の導入と最大原理によって, この問題の計算アルゴリズムを提案する. マニピュレータ制御のような非線形問題を解くために, クロネッカ積を導入して, 制御項の係数が状態変数 x の非線形関数になる問題を定式化し, その計算アルゴリズムを提案する.

第5章では, 合成リカッチ変換法を用いる計算アルゴリズムの収束性を調べ, 計算アルゴリズムの収束を保証する十分条件を導く. その十分条件をもとにして, アルゴリズムで用いられる微分方程式に関するリップシット係数と計算アルゴリズムの収束性の関係などを述べる.

第6章においては, 第4章で提案した非線形最適レギュレータの構成法および合成リカッチ変換法による非線形最適制御問題の数値計算法を用いて, 種々の数値例について, シミュレーションを行う. 2-リンクマニピュレータの軌道計画問題も計算する.

Chapter 2

最適制御問題

この章では、次章の準備として、最適制御 2 点境界値問題を必要な範囲で述べる。

2.1 最適制御問題

系の状態方程式が次のように与えられているものとする。

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (2.1)$$

ここで t は独立変数、 x と u は、それぞれ、状態変数（ないしは状態量）と制御変数（入力）で、次のような t に依存する n 次元、 m 次元ベクトル、

$$x^T(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \quad (2.2)$$

$$u^T(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \quad (2.3)$$

f は次のような n 次元ベクトル関数であるとする。

$$f^T = (f_1, f_2, \dots, f_n) \quad (2.4)$$

制御を行う t の区間

$$t_0 \leq t \leq t_f \quad (2.5)$$

において、次のようなスカラの評価関数

$$J(u) = \phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt \quad (2.6)$$

を最小にする $u(t)$ を見出す問題を考えよう。さしあたり初期時刻 t_0 および状態量の初期値 $x(t_0)$ は、次のように与えられているものとする。

$$x(t_0) = x_0 \quad (2.7)$$

ここでは、 t_0 と x_0 は既知とする。

一方、終端時刻 t_f および終端状態量 $x(t_f)$ にはいろいろな場合が考えられる。まず t_f が与えられている（あるいは指定されている）場合と、自由（すなわち未知）の場合とに大別される。前者を終端時刻固定問題、後者を終端時刻自由問題と呼んで区別することにする。後者の特別な場合として

$$\phi = 0, \quad L = 1, \quad J = t_f - t_0 \quad (2.8)$$

がある。これは制御に要する時間を最小にする問題で、最短時間問題と呼ばれる。

次に終端状態量 $x(t_f)$ についても、いろいろな場合が考えられる。まず $x(t_f)$ がすべて自由で、全く制限を受けない場合がある。最適レギュレータ問題はその典型である。逆に $x(t_f)$ がすべて特定の値に指定される場合もある。両者の間には終端状態量のいくつかが特定の値に指定され、残りの状態量は自由とする場合がある。さらに終端で状態量を指定する場合、それが特定の値ではなく、一般にベクトルの代数方程式

$$\psi(x(t_f), t_f) = 0 \quad (2.9)$$

の型であることがある。

したがって最適制御問題を、終端の状態と終端時間で分類すれば、次の4種類となる。

- (1) 終端時刻固定, 終端状態量自由
- (2) 終端時刻固定, 終端状態量拘束
- (3) 終端時刻自由, 終端状態量自由
- (4) 終端時刻自由, 終端状態量拘束

2.2 ハミルトン関数と最適性の必要条件

前述の問題を定式化するために、ラグランジュ乗数を用いて次式で定義されるスカラー関数 H を導入しよう。

$$H(x, u, \lambda, t) = L(x, u, t) + \lambda^T(t)f(x, u, t) \quad (2.10)$$

この関数はハミルトン関数とよばれている。ラグランジュ乗数法により、関数の付帯条件つき停留問題の結果を利用して、評価関数をさらに次のように拡張する。

$$J^*(x, u, \lambda, \nu) = [\phi + \nu^T \psi]_{t=t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \{L(x, u, t) + \lambda^T(t)(f(x, u, t) - \dot{x})\} dt \quad (2.11)$$

ここで J^* は合成評価関数とよばれる。 J^* の第1変分は次のように表される。

$$\begin{aligned} \delta J^* = & [\phi_x^T + \nu^T \psi_x^T]_{t=t_f} dx(t_f) \\ & + [\phi_t + \nu^T \psi_t]_{t=t_f} dt_f + [L + \lambda^T(f - \dot{x})]_{t=t_f} dt_f \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \{(L_x^T + \lambda^T f_x^T) \delta x - \lambda^T \delta \dot{x}\} dt \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \{(L_u^T + \lambda^T f_u^T) \delta u + \delta \lambda^T(f - \dot{x})\} dt \end{aligned} \quad (2.12)$$

ここで δx , $\delta \dot{x}$, δu , $\delta \lambda$ はそれぞれ x , \dot{x} , u , λ の摂動量である。また下つけの添字で表わされる変数 ϕ_x , ϕ_t , ψ_x , ψ_t , L_x , f_x , L_u , f_u などは偏微分を表し、付録 A.1 で定義される。さらに $\lambda^T \delta \dot{x}$ の項を部分積分すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} \delta J^* = & [\phi_t + \nu^T \psi_t + L + \lambda^T(f - \dot{x})]_{t=t_f} dt_f \\ & + [\phi_x^T + \nu^T \psi_x^T]_{t=t_f} dx(t_f) - [\lambda^T]_{t=t_f} \delta x(t_f) \\ & + [\lambda^T]_{t=t_0} \delta x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \{(L_x^T + \lambda^T f_x^T + \dot{\lambda}^T) \delta x\} dt \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \{(L_u^T + \lambda^T f_u^T) \delta u + \delta \lambda^T(f - \dot{x})\} dx \end{aligned} \quad (2.13)$$

ここで dt_f と $dx(t_f)$ との間には、

$$\delta x(t_f) = dx(t_f) - \dot{x}(t_f) dt_f \quad (2.14)$$

の関係があることに注意する (図 2.1 参照)。

式 (2.14) を用いて $\delta x(t_f)$ を消去すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \delta J^* = & [\phi_t + \nu^T \psi_t + L + \lambda^T f]_{t=t_f} dt_f \\ & + [\phi_x^T + \nu^T \psi_x^T - \lambda^T]_{t=t_f} dx(t_f) + [\lambda^T]_{t=t_f} \delta x(t_0) \end{aligned}$$

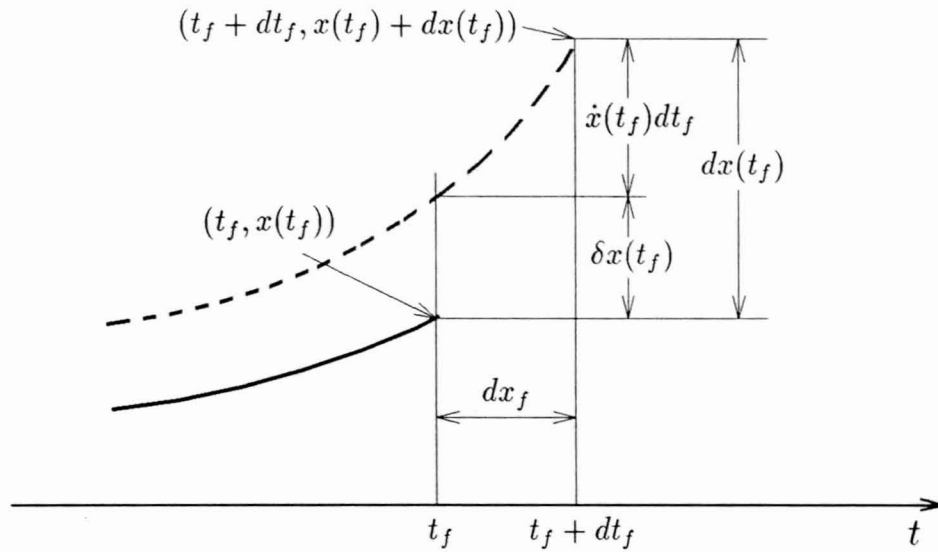


図 2.1: $dt_f, dx(t_f), \delta x(t_f)$ の関係

$$\begin{aligned}
 & + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ (L_x^T + \lambda^T f_x^T + \dot{\lambda}^T) \delta x \right\} dt \\
 & + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ (L_u^T + \lambda^T f_u^T) \delta u + \delta \lambda^T (f - \dot{x}) \right\} dt
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

t_0 と $x(t_0)$ が与えられているから、

$$\delta x(t_0) = 0 \tag{2.16}$$

である。さらにハミルトン関数の表示式を用いると、

$$\begin{aligned}
 \delta J^* = & \left[\phi_t + \nu^T \psi_t + H \right]_{t=t_f} dt_f + \left[\phi_x^T + \nu^T \psi_x^T - \lambda^T \right]_{t=t_f} dx(t_f) \\
 & + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ (H_x^T + \dot{\lambda}^T) \delta x + H_u^T \delta u + \delta \lambda^T (f - \dot{x}) \right\} dt
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

これより、 $\delta x, \delta u, \delta \lambda$ がそれぞれ任意であることから下の式が導かれることがわかる。これらの式は最適制御問題の最適性の必要条件である。

$$\text{随伴変数の微分方程式} \quad \dot{\lambda} = -H_x \tag{2.18}$$

$$\text{制御入力最適性の条件} \quad H_u = 0 \tag{2.19}$$

$$\text{運動方程式} \quad \dot{x} = f(x, u, t) \quad (2.20)$$

$$\text{状態量の初期条件} \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.21)$$

$$\text{状態量の終端条件} \quad \psi(x(t_f), t_f) = 0 \quad (2.22)$$

$$\text{随伴変数の終端条件} \quad \lambda(t_f) = [\phi_x + \psi_x \nu]_{t=t_f} \quad (2.23)$$

$$\text{未知 } t_f \text{ に対する条件} \quad [H + \phi_t + \nu^T \psi_t]_{t=t_f} = 0 \quad (2.24)$$

式 (2.19) は m 個の制御入力 u に関する m 個の方程式である。 u に関して解いてこれを式 (2.18) と式 (2.20) に代入して、 u を消去すれば、式 (2.18) と式 (2.20) は n 個の随伴変数 λ と n 個の状態変数 x に関する連立 1 階の微分方程式で、方程式数は n 個ずつ都合 $2n$ 個となる。 $2n$ 個の積分定数は境界条件式 (2.21) より決定できる。境界条件数は t_0 に n 個、 t_f に n 個、都合 $2n$ 個存在する。終端時刻 t_f が未知の場合は、式 (2.24) を用いればこれを消去することができる。以上によって、この問題は基本的には下の 2 点境界問題を解くことに帰着する。

2.3 最大値原理

制約条件 $G(u) \geq 0$ の下に微分方程式

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0$$

を満足する許容曲線 Γ に沿って汎関数

$$J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x(t), u(t)) dt$$

を最大 (最小) にする問題がポントリアギンその他によって研究された。文献 [10] p.108 – 109 を引用すれば、以下の定理が知られている。

《定理》 $u^* \in \mathcal{U}$ は最適制御関数、 K^* は対応する解曲線、 $x^*(t)$ は $t_0 \leq t \leq t_f$ で K^* を定義する関数とすれば、 K^* の角点 (ここで、 $\dot{K}^*(t)$ の不連続点を意味する) に対応する t の値を除いて $t_0 \leq t \leq t_f$ で連続で、 K^* の角点においては左右の極限值が存在する行ベクトル $\lambda(t)$ と一つの定数 $\lambda_0 \leq 0$ が存在し、かつ $(\lambda_0, \lambda(t)) \neq 0$ $t_0 \leq t \leq t_f$ が成立する。しかもつぎの関係が成立する:

1. K^* に沿って

$$\dot{x} = H_\lambda, \quad \dot{\lambda} = -H_x$$

2. 任意の $u \in \mathcal{U}$ に対して

$$H(t, x^*, u, \lambda_0, \lambda) \leq H(t, x^*, u^*, \lambda_0, \lambda)$$

2.4 2点境界問題

常微分方程式

$$f(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.25)$$

において x は実変数とする. 区間 I に属する点 a_1, \dots, a_k および nk 個の値 $y(a_i), y^{(1)}(a_i), \dots, y^{(n-1)}(a_i)$ ($i = 1, \dots, k$) に対する何個かの条件が与えられたとする. 解のみたすべきこれらの条件を境界条件という. $k = 2$ で a_1, a_2 が区間 I の両端になっている場合には, 2点境界値問題といわれる.

最適制御問題では, 一般的に2点境界問題は次の形になる.

$$\dot{x} = f(x, p, t) \quad (2.26)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (2.27)$$

$$\dot{p} = h(x, p, t) \quad (2.28)$$

$$p(t_f) = \theta(x(t_f), t_f) \quad (2.29)$$

たとえば, 上の終端時刻固定, 終端状態量自由問題について, $\rho : (x, \lambda, t) \in R^n \times R^n \times [t_0, t_f]$
 $\mapsto \rho(x, \lambda, t) \in R^m$ が存在して

$$\forall x. \quad \lambda \in R^n, \forall t \in [t_0, t_f]$$

$$H_u(x, \rho(x, \lambda, t), \lambda, t) = 0 \quad (2.30)$$

が成立すれば, $u(t) = \rho(x(t), \lambda(t), t)$ を式 (2.20), (2.21), (2.18) および (2.23) に代入して, 次式が得られる.

$$\dot{x}(t) = F(x(t), \lambda(t), t) \quad (2.31)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (2.32)$$

$$\dot{\lambda}(t) = G(x(t), \lambda(t), t) \quad (2.33)$$

$$\lambda(t_f) = [\phi_x]_{t=t_f} \quad (2.34)$$

これは2点境界問題である. しかし終端状態量拘束や終端時刻自由など最適問題については, 直接2点境界問題が導出されないから, なにかの手法を用いて, 2点境界問題に変換することを工夫しなければならない.

2.5 不変埋込法

2点境界問題の解法としては、不変埋込法がある。

式(2.26)~(2.29)の2点境界問題を考える。この問題について、 $p(t_0)$ が分かるとこの問題の解は決められる。この問題を解くために、まず下のような微分可能な関数 $P(x, t)$ が存在することが仮定される。

$$p(t) = P(x, t) \quad (2.35)$$

ただし、 $p(t_0) = P(x_0, t_0)$ である。これから $P(x, t)$ についてのある初期値境界問題が導かれる。終端時刻では

$$P(x, t_f) = \theta(x, t_f) \quad (2.36)$$

になる。さらに $P(x, t)$ について時間変数 t による微分を行うと

$$\dot{P} = P_t + P_x \dot{x} \quad (2.37)$$

となる。ところで、 \dot{p} と \dot{x} は式(2.38)と(2.39)で与えられる。

$$\dot{p} = h(x, P(x, t), t) \quad (2.38)$$

$$\dot{x} = f(x, P(x, t), t) \quad (2.39)$$

従って、 P は偏微分方程式

$$P_t + P_x f(x, P, t) = h(x, P, t) \quad (2.40)$$

を満たす。この偏微分方程式を解くためには、種々な方法がある。一つのは *Newton - Raphson* アルゴリズムで直接に偏微分方程式(2.40)を解くものである。もう一つの方法として、 $P(x, t)$ をある x の関数と t の関数の積と和の形に表して、その x の関数と t の関数についての微分方程式を解く手法がある。筆者がこれから紹介するリカッチ変換法と合成リカッチ変換法は後者に属する。

Chapter 3

線形最適制御問題

3.1 終端状態自由の線形 2 次形式最適制御問題

3.1.1 2 点境界問題の導出

ここでは、終端時刻固定、終端状態量自由の典型的問題として最適レギュレータ問題を考察し、その必要条件を導いてみよう。

線形状態微分方程式

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (3.1)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (3.2)$$

のとき、2 次形式評価関数

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{1}{2} x(t)^T Q(t) x(t) + \frac{1}{2} u(t)^T R(t) u(t) \right\} dt + \frac{1}{2} x^T(t_f) F x(t_f) \quad (3.3)$$

を最小にする制御入力 $u(t) (t_0 \leq t \leq t_f)$ を求めてみる。ただし以下を仮定する。

- (1) $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ は $[t_0, t_f]$ 上 t に関し連続な $n \times n$, $n \times m$ 実数行列、対 (A, B) は可制御である。
- (2) $Q(t)$ と $R(t)$ は $[t_0, t_f]$ 上 t に関し連続な n , m 次実対称行列、かつ任意の $t \in [t_0, t_f]$ について $R(t)$ は正定で、 $Q(t)$ は準正定である。
- (3) F は n 次の実対称行列、かつ準正定である。

簡単のため、混乱するおそれがない限り、 $x(t)$, $u(t)$, $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$ および $R(t)$ を略して、単に x , u , A , B , Q および R と記すことにする。

ハミルトン関数 H

$$H = \frac{1}{2}x^T Qx + \frac{1}{2}u^T Ru + \lambda^T (Ax + Bu) \quad (3.4)$$

を定義すると上述の定式 (2.19)

$$H_u = Ru + B^T \lambda = 0$$

より

$$u = -R^{-1}B^T \lambda \quad (3.5)$$

となる. この u を式 (3.1) に代入し,

$$\dot{x} = A(t)x - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\lambda \quad (3.6)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (3.7)$$

さらに式 (2.18) と (2.23) から

$$\dot{\lambda} = -Qx - A^T \lambda \quad (3.8)$$

$$\lambda(t_f) = Fx(t_f) \quad (3.9)$$

を得る. この問題は式 (3.6) から式 (3.9) までの 2 点境界問題に帰着する.

3.1.2 線形 2 点境界値問題の解法

式 (3.6) と (3.8) より

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

を得る. 式 (3.9) を用いて, 式 (3.10) の解は

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = \Phi(t, t_f) \begin{bmatrix} x(t_f) \\ \lambda(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_3 & \phi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t_f) \\ \lambda(t_f) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

のように書ける. ここで, Φ は式 (3.10) の状態遷移行列である. $t > 0$ に対して $(\phi_1 + \phi_2 F)$ が非特異であれば,

$$x(t) = \phi_1 x(t_f) + \phi_2 \lambda(t_f) = (\phi_1 + \phi_2 F)x(t_f) \quad (3.12)$$

†この行列の非特異性の証明は文献 [29] を参照されたい.

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= (\phi_3 + \phi_4 F)x(t_f) \\
&= (\phi_3 + \phi_4 F)(\phi_1 + \phi_2 F)^{-1}x(t) \\
&= K(t)x(t)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

を得る. 不変埋込法を使って, 2点境界問題 (3.10) を解こう. 式 (3.13) を用いると式 (3.6)~(3.9) より $K(t)$ について次のリカッチ型微分方程式が導かれる.

$$\dot{K} = -Q - A^T K - K A + K B R^{-1} B^T K \tag{3.14}$$

$$K(t_f) = F \tag{3.15}$$

ここでは F は準正定であるから, 3.1.1 の仮定 1), 2) により, $t_0 \leq t \leq t_f$ ではリカッチ微分方程式 (3.14) には唯一の準正定解 $K(t)$ が存在する.^[30]

3.2 終端制約のある線形 2 次形式最適制御問題

3.2.1 ラグランジュ乗数法による問題の変換

式 (3.1) から (3.3) までの最適問題を考える. ただし, 終端制約のある線形 2 次形式最適制御問題として, ここでは, 式 (3.16) 終端制約を満たさなければならない.

$$\psi(t_f) \equiv Dx(t_f) + E = 0 \tag{3.16}$$

ここで, D は $s \times n$ 実数行列, E は s 次元実数ベクトルである. D については

$$\text{rank } D = s \tag{3.17}$$

とする.

上記の最適制御問題の最適制御量 $u^{opt}(t)$ を求めるために, まず二つの新しいベクトル y, z を導入する. このベクトル y とベクトル z の構成は次のようにする. 状態ベクトル x の要素から適当に s 個の要素を選んで (その要素の構成の規則はあとで述べる), それらによって構成されるベクトルを y と表す. そして残りの $n - s$ 個の要素によって構成されるベクトルを z と表す. そこで新しい状態ベクトル y と z を用いると, 式 (3.1), (3.2), (3.16), (3.3) は次のように書き直される.

非線形システム方程式:

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \tag{3.18}$$

$$\begin{bmatrix} y(t_0) \\ z(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

線形終端拘束：

$$\psi(t_f) \equiv [D_1 \ D_2] \begin{bmatrix} y(t_f) \\ z(t_f) \end{bmatrix} + E = 0 \quad (3.20)$$

2次形式評価関数：

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} \left\{ [y^T \ z^T] \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} + u^T R u \right\} dt + \phi(t_f) \quad (3.21)$$

ここで

$$\phi(t_f) = \frac{1}{2} [y^T(t_f) \ z^T(t_f)] \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ F_2^T & F_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t_f) \\ z(t_f) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

D_1 と D_2 はそれぞれ $s \times s$ と $s \times (n-s)$ 次元定数マトリックスであるが、ベクトル y を構成するときに、一般性を失うことなく条件(3.23)を満たすようにその要素を選ぶことができる。すなわち

$$\text{rank } D_1 = s \quad (3.23)$$

そこで、方程式(3.20)より、 $y(t_f)$ を求めると

$$y(t_f) = -D_1^{-1} D_2 z(t_f) - D_1^{-1} E \quad (3.24)$$

を得る。

ハミルトン関数 H は

$$\begin{aligned} H(y, z, u, \lambda, \mu, t) &= \frac{1}{2} [y^T \ z^T] \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} + \frac{1}{2} u^T R u \\ &\quad + [\lambda^T \ \mu^T] \left(\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \right) \\ &= \frac{1}{2} y^T Q_1 y + \frac{1}{2} y^T Q_2 z + \frac{1}{2} z^T Q_2^T y + \frac{1}{2} z^T Q_3 z \\ &\quad + \frac{1}{2} u^T R u + \lambda^T (A_1 y + A_2 z + B_1 u) \\ &\quad + \mu^T (A_3 y + A_4 z + B_2 u) \end{aligned} \quad (3.25)$$

で与えられる。ここで、 λ と μ はそれぞれ s 次元と $n-s$ 次元のラグランジュ乗数ベクトルである。最適性の必要条件から λ と μ に関する随伴方程式は

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{\mu} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} H_y \\ H_z \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_1^T & A_3^T \\ A_2^T & A_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

となり, 制御入力 u の最適性の条件

$$H_u = Ru + B_1^T \lambda + B_2^T \mu = 0$$

より

$$u^{opt} = -R^{-1} B_1^T \lambda - R^{-1} B_2^T \mu \quad (3.27)$$

となる. この u^{opt} を式(3.18)に代入すると

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_1 R^{-1} B_1^T & B_1 R^{-1} B_2^T \\ B_2 R^{-1} B_1^T & B_2 R^{-1} B_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

随伴変数 λ と μ の終端条件は

$$\begin{aligned} \lambda(t_f) &= \phi_y(t_f) + \psi_y(t_f) \nu \\ &= F_1 y(t_f) + F_2 z(t_f) + D_1^T \nu \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \mu(t_f) &= \phi_z(t_f) + \psi_z(t_f) \nu \\ &= F_2^T y(t_f) + F_3 z(t_f) + D_2^T \nu \end{aligned} \quad (3.30)$$

となる.

ここで, ν は s 次元ラグランジュ乗数ベクトルである. 式(3.24), (3.29), (3.30)より, ν を消去して次式を得る.

$$\begin{aligned} \mu(t_f) = & [F_3 - D_2^T D_1^T F_2 - F_2^T D_1^{-1} D_2 + D_2^T D_1^T F_1 D_1^{-1} D_2] z(t_f) \\ & + D_2^T D_1^T \lambda(t_f) - [F_2^T - D_2^T D_1^T F_1] D_1^{-1} E. \end{aligned} \quad (3.31)$$

微分方程式(3.26)と(3.28)に対する境界条件は $2n$ 個必要である. このうち n 個は式(3.19)より初期値条件として与えられる. また s 個は式(3.20)より, 残りの $n-s$ 個は式(3.31)より終端条件として与えられる. $y(t_0)$ と $z(t_0)$, $\lambda(t_f)$ と $\mu(t_f)$ は既知であるから, これは2点境界値問題である. $\lambda(t_0)$ と $\mu(t_0)$ を求めるために, 不変埋込法を用いて初期値問題化する必要がある.

3.2.2 合成リカッチ変換法の導入

この問題を解決するために、不変埋込法の一つである合成リカッチ変換式

$$\begin{bmatrix} y \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

を導入する。ここで K_1, K_2, K_3 および K_4 はそれぞれ $s \times (n-s), s \times s, (n-s) \times (n-s)$ および $(n-s) \times s$ 次元マトリックスであり、 g_1 と g_2 は s 次元と $n-s$ 次元ベクトルである。合成リカッチ変換式 (3.32) を適用して、微分方程式 (3.26) と (3.28) より、次の合成リカッチ微分方程式 (3.33) とその補助方程式 (3.34) が導かれる。(付録 A.2 参照)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{K}_1 & \dot{K}_2 \\ \dot{K}_3 & \dot{K}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_2 & -B_1 R^{-1} B_1^T \\ -Q_3 & -A_2^T \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 R^{-1} B_2^T \\ -Q_2 & -A_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_4 & -B_2 R^{-1} B_1^T \\ -Q_2 & -A_1^T \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & -B_2 R^{-1} B_2^T \\ -Q_1 & -A_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{g}_1 \\ \dot{g}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 R^{-1} B_2^T \\ -Q_2^T & -A_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & -B_2 R^{-1} B_2^T \\ -Q_1 & -A_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.34)$$

微分方程式 (3.33) と (3.34) を逆時間で解くためには、 K_1, K_2, K_3, K_4 および g_1 と g_2 の終端値が必要である。式 (3.24), (3.31), (3.32) より、次の終端条件が得られる。

$$K_1(t_f) = -D_1^{-1} D_2 \quad (3.35)$$

$$K_2(t_f) = 0 \quad (3.36)$$

$$K_3(t_f) = F_3 - D_2^T D_1^{-T} F_2 - F_2^T D_1^{-1} D_2 + D_2^T D_1^{-T} F_1 D_1^{-1} D_2 \quad (3.37)$$

$$K_4(t_f) = D_2^T D_1^{-T} \quad (3.38)$$

$$g_1(t_f) = -D_1^{-1} E \quad (3.39)$$

$$g_2(t_f) = -(F_2^T - D_2^T D_1^{-T} F_1) D_1^{-1} E \quad (3.40)$$

合成リカッチ変換式 (3.32) を $\lambda(t)$ と $\mu(t)$ について解くと

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \lambda(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} K_2^{-1} & -K_2^{-1} K_1 \\ K_4 K_2^{-1} & K_3 - K_4 K_2^{-1} K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -K_2^{-1} & 0 \\ -K_4 K_2^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.41)$$

となる。ただし \mathbf{I} は $(n-s) \times (n-s)$ 単位行列である。

計算方法として、終端条件 (3.35) ~ (3.40) を利用し、微分方程式 (3.33) と (3.34) を逆時間方向に積分して、初期値 $K_1(t_0)$, $K_2(t_0)$, $K_3(t_0)$, $K_4(t_0)$ および $g_1(t_0)$, $g_2(t_0)$ を記憶する。そして式 (3.41) により、 $\lambda(t_0)$ と $\mu(t_0)$ を計算する。さらに $\lambda(t_0)$ と $\mu(t_0)$ および初期値条件 (3.19) を用いて、微分方程式 (3.26) と (3.28) を解く。以上は線形微分方程式であるから、解析的または数値的な計算方法が利用できる。

ただし、ここで注意しなければならないことがある。式 (3.41) の計算する時に、 $K_2^{-1}(t_0)$ の存在が保証されることが必要である。この $K_2^{-1}(t_0)$ の存在条件については、まだ全部解明されていないが、合成リカッチ変換法について、次の結果が得られる。

《定理》 合成リカッチ変換式 (3.32) において、リカッチ微分方程式 (3.33) の解が $0 \leq t \leq t_f$ で存在すれば、次の性質がある。

- 1) $K_1 = K_4^T$
- 2) K_2 と K_3 が実対称行列、準正定、 t の減少に対して単調非減少である。

(証明は付録 A.3 に参照)

Chapter 4

非線形最適制御問題

4.1 非線形最適レギュレータ問題

4.1.1 リカッチ変換式の導入

時不変係数の非線形状態方程式

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + C(x(t)) \quad (4.1)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (4.2)$$

が与えられて、2次形式評価関数

$$J = \int_{t_0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} x^T(t) Q x(t) + \frac{1}{2} u^T(t) R u(t) \right\} dt \quad (4.3)$$

が与えられる最適制御問題を考察する。ここで $x(t)$ は n 次元状態変数ベクトル、 $u(t)$ は m 次元制御ベクトル ($m \leq n$) であり、 A と B はそれぞれ $n \times n$ 、 $n \times m$ マトリックスである。 $C(x(t))$ は n 次元非線形関数で、 R 、 Q と F はそれぞれ $m \times m$ 次元正定対称マトリックス、 $n \times n$ 次元準正定対称マトリックスである。

また、次の仮定がある。

- 1) $C(x)$ は C^2 級関数で、 $C(0) = 0$ が満たされる。
- 2) A 、 B が可制御、かつ A 、 $Q^{\frac{1}{2}}$ が可観測である。

まず、 n 次元のラグランジュ乗数ベクトル λ を用いてハミルトン関数 H を

$$H(x, \lambda, u) = \frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} u^T R u + \lambda^T (Ax + Bu + C) \quad (4.4)$$

のように定義する. 制御入力の最適性の条件

$$H_u = Ru + B^T \lambda = 0 \quad (4.5)$$

より

$$u = -R^{-1} B^T \lambda \quad (4.6)$$

となる.

随伴変数の微分方程式

$$\dot{\lambda} = -H_x^T \quad (4.7)$$

より

$$\dot{\lambda}(t) = -A^T \lambda(t) - Qx(t) - C_x \lambda(t) \quad (4.8)$$

となる. さらに, 随伴変数終端条件

$$\lambda(\infty) = 0 \quad (4.9)$$

が与えられる.

この問題を解くために, 不変埋込法のリカッチ変換式

$$\lambda = Kx + h \quad (4.10)$$

を導入する. ここでは, K が次のリカッチ代数方程式の解である.

$$-KA - A^T K + KBR^{-1}B^T K - Q \quad (4.11)$$

仮定の2)より, このリカッチ代数方程式(4.11)の解 K は唯一の正定解である. これによるリカッチ変換式(4.10)を使って, x と h の微分方程式

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}x(t) + \tilde{B}h(t) + \Theta(x(t)) \quad (4.12)$$

$$\dot{h}(t) = -\tilde{A}^T h(t) + F(x(t), h(t)) \quad (4.13)$$

と境界条件

$$x(t_0) = x_0 \quad (4.14)$$

$$h(\infty) = 0 \quad (4.15)$$

が導かれる。(付録 A.4 参照)

ここで,

$$\tilde{A} = A - BR^{-1}B^TK \quad (4.16)$$

$$\tilde{B} = -BR^{-1}B^T \quad (4.17)$$

$$\Theta(y) = C(y) \quad (4.18)$$

$$F(y, v) = -KC(y) - C_y(y)(Ky + v) \quad (4.19)$$

である。条件 (4.14) と (4.15) で、式 (4.12) と (4.13) の解はこの $x(t)$ と $h(t)$ が存在すれば、式 (4.12) と (4.13) の解はこの $x(t)$ と $\lambda(t) = Kx(t) + h(t)$ で表示できる。この x と λ について、 x のみに依存する関数 $p(x)$ によって、関数関係

$$u(t) = -R^{-1}B^T f(x(t)) \quad (4.20)$$

が構成できる。

上の議論によって、もし微分方程式の解が一意に存在すれば、 $h(t)$ は $x(t)$ の非線形写像と見られる。すなわち

$$h(t) = p(x(t))$$

ここで、この $p(x)$ は微分方程式

$$\dot{p}(x(t)) = -\tilde{A}^T p(x(t)) + F(x(t), p(x(t))) \quad (4.21)$$

の解である。もしこの $p(x)$ が存在すれば、非線形フィードバックをもつある非線形レギュレータが構成される。そこで、最適フィードバック則は

$$u^{opt} = -R^{-1}B(Kx + p(x)) \quad (4.22)$$

で与えられる。これは図 4.1 により図式化される。しかし、この $p(x)$ は $x(t)$ のある任意の非線形関数であるから、その解析的な表示式を見つけるのはたいへんに困難である。この非線形レギュレータを実現できるかどうかはどのようにして、この $p(x)$ を実現するかという問題になる。

4.1.2 ニューラルネットワークによるレギュレータの設計

ニューラルネットワークが優れた学習能力をもつという性質はよく知られているが、ニューラルネットワークに対する理論的と応用的な研究が盛んに行われている。最適非線形レギュレータを実現

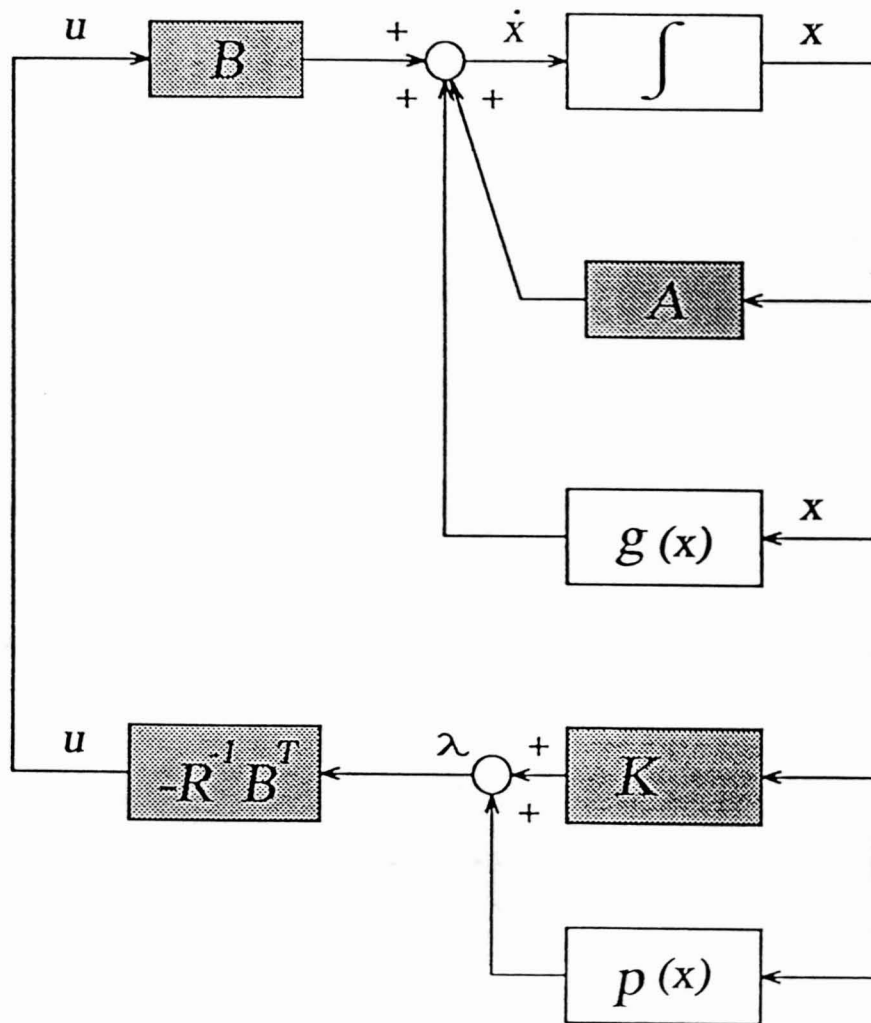


図 4.1: 非線形最適制御システム

するために、非線形写像能力をもつ階層型ニューラルネットワークを用いて上の非線形関数 $p(x)$ の近似解を求めてみよう。階層型ニューラルネットワークの非線形写像の性質については次の定理がある[24]。

《定理》 $\phi(x)$ をシグモイド関数（単調増加、定数ではない有界な連続関数）とする。 K を R^n の有界閉集合、 $f(x_1, \dots, x_n)$ を K 上の連続関数とする。そのとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある自然数 N 、定数 C_i, θ_i ($i = 1, \dots, N$)、 w_{ij} ($i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, n$) が存在して、

$$\max_{x \in K} \left| f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^N c_i \phi \left(\sum_{j=1}^n w_{ij} x_j - \theta_i \right) \right| < \varepsilon \quad (4.23)$$

が成立する。

この定理は、出力層が線形ユニットからなる3層ニューラルネットワークによって、任意の連続写像 $f: R^n \rightarrow R^m$ が、任意の有界閉集合上で任意の精度で一様に近似的に実現される。同様の結果は、Cybenko, Hornik–Stinchcombe–White によっても得られている。この定理によって、ニューラルネットワークを使って、非線形写像を近似的に実現することが可能である。

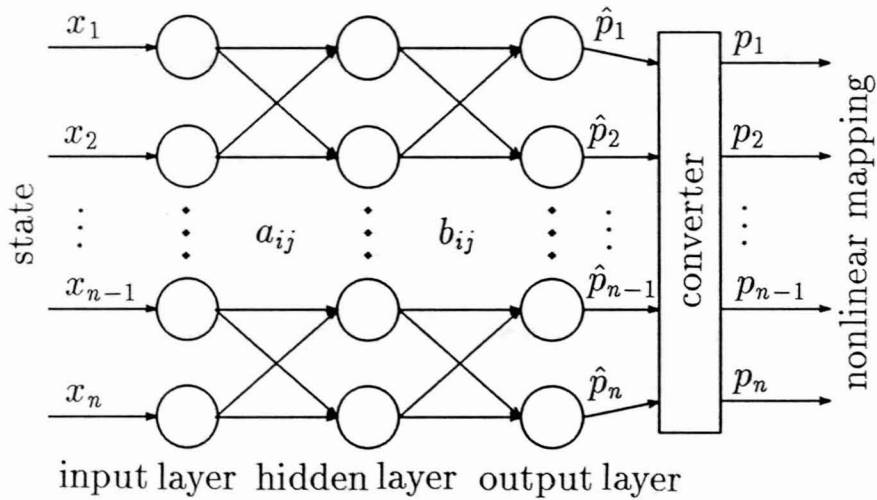


図 4.2: 3層ニューラルネットワーク

本研究では、式 (4.22) の非線形関数 $p(x)$ を学習の終了した階層型ニューラルネットワークで近似することを考える。ここで、図 4.2 のような3層ニューラルネットワークを用いる。出力層も非線形シグモイド関数で、入力層、中間層及び出力層にそれぞれ n 個、 q 個、 n 個ユニットがあるとする。中間層と出力層のユニットの出力関数はそれぞれ

$$z_i = \phi(x, a_i) = \phi \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right), \quad (4.24)$$

$$\hat{p}_i = \phi(z, b_i) = \phi\left(\sum_{j=1}^q b_{i,j} z_j\right), \quad (4.25)$$

となり、ここで $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in R^n$ が入力層の入力ベクトル、 $z = [z_1, \dots, z_q]^T$ と $\hat{p} = [\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n]^T$ が中間層と出力層の出力ベクトルである。 $a_{i,j}$ は入力層の第 j 個ユニットから中間層の第 i 個ユニットまでの結合荷重で、 $b_{i,j}$ は中間層の第 j ユニットから出力層第 i 個ユニットまでの結合荷重である。非線形関数 $\phi(\cdot)$ は区間 $(-\infty, +\infty)$ に連続単調増加で、下のように定義される。

$$\phi(y) = \frac{1 - e^{-y/T}}{1 + e^{-y/T}}, \quad (4.26)$$

ここで、パラメータ T は非線形関数 $\phi(\cdot)$ の形状を決める。

$\phi(\cdot)$ が連続単調増加であるから、前の定理を使って、この3層ニューラルネットワークを用いれば、任意の連続写像 $f: R^n \rightarrow (-1, 1)^m$ が有界閉集合で任意の精度で近似的に実現できるということが証明できる。

結合荷重 $a_{i,j}$ と $b_{i,j}$ の修正則を求めるために、誤差関数

$$E = \frac{1}{2}(\hat{h} - \hat{p})^T(\hat{h} - \hat{p}) \quad (4.27)$$

が定義される。ここで、 \hat{h} は正規化された微分方程式 (4.12) と (4.13) の解で、最急降下法を応用して、結合荷重の修正則が次のように導かれる。(付録 A.5 参照.)

$$a_{i,j}^{(k)} = a_{i,j}^{(k-1)} + \Delta a_{i,j}^{(k)} \quad (4.28)$$

$$(i = 1, \dots, q; j = 1, \dots, n),$$

$$b_{i,j}^{(k)} = b_{i,j}^{(k-1)} + \Delta b_{i,j}^{(k)} \quad (4.29)$$

$$(i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, q),$$

$$\Delta a_{i,j}^{(k)} = \frac{c_1}{4T^2} x_j \sum_{l=1}^n \{b_{i,l}(\hat{h}_l - \hat{p}_l)(1 - \hat{p}_l^2)(1 - z_l^2)\}, \quad (4.30)$$

$$\Delta b_{i,j}^{(k)} = \frac{c_2}{2T} (\hat{h}_i - \hat{p}_i)(1 - \hat{p}_i^2) z_j. \quad (4.31)$$

ここで k は今回の学習を表し、 c_1 と c_2 は学習係数とする。

よりよい学習結果を得るために、ノルム $\|\Delta x(t)\|$ と $\|x(t)\|$ が導入される。

$$\|\Delta x(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i(t) - x_i(t_{k-1}))^2},$$

$$\|x(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2(t)},$$

ここで, $x(t_{k-1})$ が t_{k-1} 時刻での学習点で, $x(t)$ は微分方程式 (4.12) の解である. もし

$$\|\Delta x(t_k)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i(t_k) - x_i(t_{k-1}))^2} \geq L(\|x(t_k)\|) \quad (4.32)$$

が満たされると, $x(t_k)$ は今回の学習点になる. $L(r)$ は $[0, r_{max}]$ で単調増加関数として定義される.

$$L(r) = L_{min} + \frac{1 - e^{-\beta r}}{1 - e^{-\beta r_{max}}}(L_{max} - L_{min}), \quad (4.33)$$

ここで, r_{max} は $\|x\|$ ($t \in [0, \infty)$) の上界で, L_{min} と L_{max} は最小と最大の学習ステップとする.

また, このように最適性の必要条件とニューラルネットワークにより構成する非線形フィードバックは最適フィードバック則の候補として, 原点 (平衡点) の近傍で最適性の十分条件も満たすことを示そう. (4.26) のような C^∞ 級のシグモイド関数を用いているから, このニューラルネットワークの特性によって近似される非線形関数は微分可能な連続関数になり, 評価関数が微分可能であることがわかる. さらに

$$J_x(x, u^{opt}) = Kx + p(x)$$

$$B^T J_x(x, u^{opt}) + Ru^{opt} = 0$$

であるから, 文献 [31] の Lemma 2.4 を適用すれば, この非線形フィードバックが最適であることが示せる.

以上の議論をもとにして, 非線形関数 $p(x)$ の近似解を求めて最適非線形レギュレータを次のように構成できる.

step 1. 十分大きな終端時刻 t_f と必要なニューラルネットワークのパラメータを選ぶ.

step 2. リカッチ代数方程式 (4.11) を解き, 定数マトリックス K を求める.

step 3. 決められた状態空間に初期値点 $x^{(i)}(0)$ ($i = 1, \dots, m$) を選択する. ここでは, 平均的にこの状態空間の頂点に分布している 2^n 個の初期値点が含まれるものが選択される.

step 4. **step 3** で決められた初期値点を用いて微分方程式 (4.12) を逆時間方向に, 微分方程式 (4.13) を順時間方向に解く. さらに, $h(t)$ の正規化を行うために $h(t)$ ($t \in [0, t_f]$) の上界を求める.

step 5. 条件 (4.32) を満たすように学習点 $x(t_k)$ ($k = 1, 2, \dots$) を選択し, 正規化された $h(t_k)$ すなわち $\hat{h}(t_k)$ を教師信号として, x 軌道に沿って, ニューラルネットワークの学習を行う.

step 6. 学習の効果を評価するために,

$$J_m = \frac{\sum_{j=1}^m \int_0^{\infty} (x^j - \hat{x}^j)^2 dt}{\sum_{j=1}^m \int_0^{\infty} (x^j)^2 dt} < \varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$$

を計算する. ここで x^j は微分方程式 (4.12) と (4.13) の解で, \hat{x}^j は微分方程式 (4.13) と学習中のニューラルネットワークからの解である. もし $J_m \leq \varepsilon$ ならば, 学習過程を終了する. もし $J_m > \varepsilon$ ならば, ある新しい学習点を選んで, **step 4** に戻って学習を続ける.

ニューラルネットワークによる非線形最適制御レギュレータの設計例は **6.1** で述べる.

4.2 非線形終端拘束をもつ非線形最適制御問題

4.2.1 合成リカッチ変換法の導入

時変非線形システム方程式

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + C(x(t), t) \quad (4.34)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (4.35)$$

と非線形終端拘束

$$\psi(t_f) \equiv Dx(t_f) + E(x(t_f)) = 0 \quad (4.36)$$

が与えられて、2次形式評価関数

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{1}{2}x^T(t)Q(t)x(t) + \frac{1}{2}u^T(t)R(t)u(t) \right\} dt + \frac{1}{2}x^T(t_f)Fx(t_f) \quad (4.37)$$

を最小にする最適制御量 $u^{opt}(t)$ を求める問題を考える。

ここで、 $x(t)$ は n 次元状態ベクトル、 $u(t)$ は m 次元制御ベクトル ($m \leq n$) であり、 $C(x(t), t)$ と $E(x(t_f))$ はそれぞれ n 次元と s 次元 ($1 \leq s \leq n$) の非線形関数とする。 $A(t)$ 、 $B(t)$ 、 D はそれぞれ $n \times n$ 、 $n \times m$ 、 $s \times n$ 次マトリックスであり、 $R(t)$ 、 $Q(t)$ と F はそれぞれ $m \times m$ 次元正定対称マトリックス、 $n \times n$ 次元準正定対称マトリックスである。なお、ここで終端時刻 t_f は固定されているものとする。

次の仮定をおく。

- (1) $A(t)$ 、 $B(t)$ 、 $C(x, t)$ 、 $Q(t)$ 、 $R(t)$ は $[t_0, t_f]$ 上 t に関し連続。
- (2) 閉区間 $[t_0, t_f]$ に対して $C(x, t)$ と $E(x)$ は連続微分可能で、 $C(x, t)$ は x に対して C^2 級関数で。
- (3) $\text{rank } D = s$ 。

簡単のため、混乱するおそれがない限り、 $x(t)$ 、 $u(t)$ 、 $A(t)$ 、 $B(t)$ 、 $C(x(t), t)$ 、 $E(x(t_f))$ 、 $Q(t)$ および $R(t)$ を略して、単に x 、 u 、 A 、 B 、 C 、 E 、 Q および R と記すことにする。

上記の最適制御問題の最適制御量 $u^{opt}(t)$ を求めるために、まず二つの新しいベクトル y 、 z を導入する。このベクトル y とベクトル z の構成は次のようにする。状態ベクトル x の要素から適当に s 個の要素を選んで（その要素の構成の規則はあとで述べる）、それらによって構成されるベクトルを y と表す。そして残りの $n - s$ 個の要素によって構成されるベクトルを z と表す。そこで新しい状態ベ

ベクトル y と z を用いると、式 (4.34), (4.35), (4.36), (4.37) は次のように書き直される。

非線形システム方程式：

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

$$\begin{bmatrix} y(t_0) \\ z(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

非線形終端拘束：

$$\psi(t_f) \equiv [D_1 \ D_2] \begin{bmatrix} y(t_f) \\ z(t_f) \end{bmatrix} + E(y(t_f), z(t_f)) = 0 \quad (4.40)$$

2次形式評価関数：

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} \left\{ [y^T \ z^T] \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} + u^T R u \right\} dt + \phi(t_f) \quad (4.41)$$

ここで

$$\phi(t_f) = \frac{1}{2} [y^T(t_f) \ z^T(t_f)] \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ F_2^T & F_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t_f) \\ z(t_f) \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

D_1 と D_2 はそれぞれ $s \times s$ と $s \times (n-s)$ 次元定数マトリックスであるが、ベクトル y を構成するときに、一般性を失うことなく条件 (4.43) を満たすようにその要素を選ぶことができる。すなわち

$$\text{rank } D_1 = \text{rank } (D_1 + E_y)|_{t=t_f} = s \quad (4.43)$$

そこで、方程式 (4.40) より、 $y(t_f)$ を求めると

$$y(t_f) = -D_1^{-1} D_2 z(t_f) - D_1^{-1} E(y(t_f), z(t_f)) \quad (4.44)$$

を得る。

ハミルトン関数 H は

$$\begin{aligned} H(y, z, u, \lambda, \mu, t) &= \frac{1}{2} [y^T \ z^T] \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} + \frac{1}{2} u^T R u \\ &\quad + [\lambda^T \ \mu^T] \left(\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} y^T Q_1 y + \frac{1}{2} y^T Q_2 z + \frac{1}{2} z^T Q_2^T y + \frac{1}{2} z^T Q_3 z \\ &\quad + \frac{1}{2} u^T R u + \lambda^T (A_1 y + A_2 z + B_1 u + C_1) \\ &\quad + \mu^T (A_3 y + A_4 z + B_2 u + C_2) \end{aligned} \quad (4.45)$$

で与えられる。ここで、 λ と μ はそれぞれ s 次元と $n - s$ 次元のラグランジュ乗数ベクトルである。最適性の必要条件から λ と μ に関する随伴方程式は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{\mu} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} H_y \\ H_z \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_1^T + C_{1y} & A_3^T + C_{2y} \\ A_2^T + C_{1z} & A_4^T + C_{2z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.46)$$

となり、制御入力 u の最適性の条件

$$H_u = Ru + B_1^T \lambda + B_2^T \mu = 0$$

より

$$u^{opt} = -R^{-1} B_1^T \lambda - R^{-1} B_2^T \mu \quad (4.47)$$

となる。この u^{opt} を式 (4.38) に代入すると

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_1 R^{-1} B_1^T & B_1 R^{-1} B_2^T \\ B_2 R^{-1} B_1^T & B_2 R^{-1} B_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} . \quad (4.48)$$

随伴変数 λ と μ の終端条件は

$$\begin{aligned} \lambda(t_f) &= \phi_y(t_f) + \psi_y(t_f) \nu \\ &= F_1 y(t_f) + F_2 z(t_f) + (D_1^T + E_y(t_f)) \nu \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} \mu(t_f) &= \phi_z(t_f) + \psi_z(t_f) \nu \\ &= F_2^T y(t_f) + F_3 z(t_f) + (D_2^T + E_z(t_f)) \nu \end{aligned} \quad (4.50)$$

となる。

ここで、 ν は s 次元ラグランジュ乗数ベクトルである。式 (4.44), (4.49), (4.50) より、 ν を消去して次式を得る。

$$\begin{aligned} \mu(t_f) &= [F_3 - (D_2^T + E_z(t_f))(D_1^T + E_y(t_f))^{-1} F_2 - F_2^T D_1^{-1} D_2 \\ &\quad + (D_2^T + E_z(t_f))(D_1^T + E_y(t_f))^{-1} F_1 D_1^{-1} D_2] z(t_f) \\ &\quad + (D_2^T + E_z(t_f))(D_1^T + E_y(t_f))^{-1} \lambda(t_f) \\ &\quad - [F_2^T - (D_2^T + E_z(t_f))(D_1^T + E_y(t_f))^{-1} F_1] D_1^{-1} E(t_f) . \end{aligned} \quad (4.51)$$

微分方程式 (4.46) と (4.48) に対する境界条件は $2n$ 個必要である。微分方程式 (4.48) に対して (4.39)

が初期値条件として与えられる。微分方程式 (4.46) に対して (4.49) と (4.50) が終端値条件として与えられる。状態変数 y と z , λ と μ に対してこれは 2 点境界値問題である。しかし、終端値条件 (4.49) と (4.50) には、未知の定数 ν が含まれているから、終端拘束条件 (4.40) を使ってこの未知の定数を消去する。 $y(t_0)$ と $z(t_0)$ は既知であるが、 $\lambda(t_0)$ と $\mu(t_0)$ は未知である。これは初期値問題ではないので、不変埋込法を用いて初期値問題化を行なって、 $\lambda(t_0)$ と $\mu(t_0)$ を求め、微分方程式 (4.46) と (4.48) が解かれる。

この問題を解決するために、合成リカッチ変換式

$$\begin{bmatrix} y \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

を導入する。ここで K_1, K_2, K_3 および K_4 はそれぞれ $s \times (n-s)$, $s \times s$, $(n-s) \times (n-s)$ および $(n-s) \times s$ 次元マトリックスであり、 g_1 と g_2 は s 次元と $n-s$ 次元ベクトルである。合成リカッチ変換式 (4.52) を適用して、微分方程式 (4.46) と (4.48) より、次のリカッチ微分方程式 (4.53) とその補助方程式 (4.54) が導かれる。(付録 A.6 参照)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{K}_1 & \dot{K}_2 \\ \dot{K}_3 & \dot{K}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_2 & -B_1 R^{-1} B_1^T \\ -Q_3 & -A_2^T - C_{1z} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 R^{-1} B_2^T \\ -Q_2 & -A_4^T - C_{2z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_4 & -B_2 R^{-1} B_1^T \\ -Q_2 & -A_1^T - C_{1y} \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & -B_2 R^{-1} B_2^T \\ -Q_1 & -A_3^T - C_{2y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{g}_1 \\ \dot{g}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 R^{-1} B_2^T \\ -Q_2^T & -A_4^T - C_{2z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & -B_2 R^{-1} B_2^T \\ -Q_1 & -A_3^T - C_{2y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.54)$$

微分方程式 (4.53) と (4.54) を逆時間で解くためには、 K_1, K_2, K_3, K_4 および g_1 と g_2 の終端値が必要である。式 (4.44), (4.51), (4.52) より、次の終端条件が得られる。

$$K_1(t_f) = -D_1^{-1} D_2 \quad (4.55)$$

$$K_2(t_f) = 0 \quad (4.56)$$

$$K_3(t_f) = F_3 - (D_2^T + E_z(t_f))(D_1^T + E_y(t_f))^{-1}F_2 - F_2^T D_1^{-1}D_2 \\ + (D_2^T + E_z(t_f))(D_1^T + E_y(t_f))^{-1}F_1 D_1^{-1}D_2 \quad (4.57)$$

$$K_4(t_f) = (D_2^T + E_z(t_f))(D_1^T + E_y(t_f))^{-1} \quad (4.58)$$

$$g_1(t_f) = -D_1^{-1}E(t_f) \quad (4.59)$$

$$g_2(t_f) = -[F_2^T - (D_2^T + E_z(t_f))(D_1^T + E_y(t_f))^{-1}F_1]D_1^{-1}E(t_f) \quad (4.60)$$

合成リカッチ変換式 (4.52) を $\lambda(t)$ と $\mu(t)$ について解くと

$$\begin{bmatrix} \lambda(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_2^{-1} & -K_2^{-1}K_1 \\ K_4K_2^{-1} & K_3 - K_4K_2^{-1}K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} -K_2^{-1} & 0 \\ -K_4K_2^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

となる。ただし \mathbf{I} は $(n-s) \times (n-s)$ 単位行列である。ここで二つの数値計算法が構成される。一つは終端条件 (4.55) ~ (4.60) を利用し、微分方程式 (4.53) と (4.54) を逆時間方向に積分して、初期値 $K_1(t_0)$, $K_2(t_0)$, $K_3(t_0)$, $K_4(t_0)$ および $g_1(t_0)$, $g_2(t_0)$ だけを記憶する。そして式 (4.61) により、 $\lambda(t_0)$ と $\mu(t_0)$ を計算する。さらに $\lambda(t_0)$ と $\mu(t_0)$ および初期値条件 (4.39) を用いて、微分方程式 (4.46) と (4.48) を解く。

もう一つは終端条件 (4.55) ~ (4.60) を利用し、制御期間 $[t_0, t_f]$ について $K_1(t)$, $K_2(t)$, $K_3(t)$, $K_4(t)$ および $g_1(t)$, $g_2(t)$ を連続的に記憶する。式 (4.61) を式 (4.48) に代入すると、

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 - B_1\Gamma & A_2 - B_1R^{-1}B_2^TK_3 + B_1^T\Gamma K_1 \\ A_3 - B_2\Gamma & A_4 - B_2R^{-1}B_2^TK_3 + B_2^T\Gamma K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} B_1\Gamma & -B_1R^{-1}B_2^T \\ B_2\Gamma & -B_2R^{-1}B_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

を得る。ここで

$$\Gamma = R^{-1}(B_1^T + B_2^TK_4)K_2^{-1}$$

そして初期値条件 (4.39) を用いてこの微分方程式を順時間方向に積分する。このとき $u^{opt}(t)$ は次式より求められる。

$$u^{opt} = -\Gamma y + (\Gamma K_1 - R^{-1}B_2^TK_4)z + \Gamma g_1 - R^{-1}B_2^Tg_2 \quad (4.63)$$

4.2.2 計算アルゴリズム

以上述べたことを整理すると、非線形終端拘束をもつ非線形最適制御問題の数値計算アルゴリズムは以下ようになる。この計算アルゴリズムを SRTM(Synthetic Riccati Transformation Method) とよぶことにする。合成リカッチ変換式にもとづき、次の二つの計算アルゴリズムを提案する。

〈 計算アルゴリズム 1 〉

- setp 1.** 制御量の推定値 $u^{(0)}(t)$ を与え、状態方程式 (4.38) を順時間方向に解き、 $y^{(0)}(t)$, $z^{(0)}(t)$ を記憶し、同時に評価関数 $J^{(0)}$ を求め記憶する。そして $i = 0$ とする。
- setp 2.** 終端条件 (4.55) ~ (4.60) と $y^{(i)}(t)$ と $z^{(i)}(t)$ を用いて微分方程式 (4.53) と (4.54) を逆時間方向に解き $K_1(t_0)$, $K_2(t_0)$, $K_3(t_0)$, $K_4(t_0)$, $g_1(t_0)$ および $g_2(t_0)$ を求めて記憶する。
- setp 3.** 式 (4.61) 式を用いて、 $\lambda(t_0)$ と $\mu(t_0)$ を求める。
- setp 4.** 式 (4.46) と式 (4.48) を順時間方向に解き、同時に式 (4.47) を計算する。そして $J^{(i+1)}$ を計算する。
- setp 5.** もし $\|\psi(t_f)\| < \varepsilon_1$ ($\varepsilon_1 > 0$), $|J^{(i+1)} - J^{(i)}|/|J^{(i)}| < \varepsilon_2$ ($\varepsilon_2 > 0$) ならば、繰返し計算を終了し、そうでなければ、次の置き換え: $y^{(i+1)}(t) \rightarrow y^{(i)}(t)$, $z^{(i+1)}(t) \rightarrow z^{(i)}(t)$, $u^{(i+1)}(t) \rightarrow u^{(i)}(t)$, $J^{(i+1)}(t) \rightarrow J^{(i)}(t)$ および $i + 1 \rightarrow i$ を行い **step 2** に戻る。

〈 計算アルゴリズム 2 〉

- setp 1.** 制御量の推定値 $u^{(0)}(t)$ を与え、状態方程式 (4.38) を順時間方向に解き、 $y^{(0)}(t)$, $z^{(0)}(t)$ を記憶し、同時に評価関数 $J^{(0)}$ を求め、記憶する。そして $i = 0$ とする。
- setp 2.** 終端条件 (4.55) ~ (4.60) と $y^{(i)}(t)$ と $z^{(i)}(t)$ を用いて微分方程式 (4.53) と (4.54) を逆時間方向に解き、制御期間 $[t_0, t_f]$ について $K_1(t)$, $K_2(t)$, $K_3(t)$, $K_4(t)$, $g_1(t)$ および $g_2(t)$ を求めて、記憶する。
- setp 3.** 初期値条件 (4.39) を用いて、式 (4.62) を順時間方向に解き、同時に式 (4.63) を計算して、 $y^{(i+1)}(t)$, $z^{(i+1)}(t)$, $u^{(i+1)}(t)$ を記憶する。そして $J^{(i+1)}$ を計算する。
- setp 4.** もし $\|\psi(t_f)\| < \varepsilon_1$ ($\varepsilon_1 > 0$), $|J^{(i+1)} - J^{(i)}|/|J^{(i)}| < \varepsilon_2$ ($\varepsilon_2 > 0$) ならば、繰返し計算を終了し、そうでなければ、次の置き換え: $y^{(i+1)}(t) \rightarrow y^{(i)}(t)$, $z^{(i+1)}(t) \rightarrow z^{(i)}(t)$, $u^{(i+1)}(t) \rightarrow u^{(i)}(t)$, $J^{(i+1)}(t) \rightarrow J^{(i)}(t)$ および $i + 1 \rightarrow i$ を行い **step 2** に戻る。

この合成リカッチ変換法による数値計算例は 6.2 で述べる。

4.3 未知終端時刻問題への拡張

4.3.1 時間変数の変換

終端時刻未知の最適制御問題として、4.2 と同じシステムを考えるが、終端時刻 t_f は未知である。終端拘束と評価関数の表し方を修正して、次のように表す。

$$\psi(t_f) \equiv D(t_f)x(t_f) + E(x(t_f), t_f) = 0 \quad (4.64)$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{1}{2}x^T(t)Q(t)x(t) + \frac{1}{2}u^T(t)R(t)u(t) \right\} dt + \phi(t_f) \quad (4.65)$$

ここで

$$\phi(t_f) = \frac{1}{2}x^T(t_f)F(t_f)x(t_f).$$

まず、この問題を解くために、時間変数 t について次の変換を行う。

$$t = \theta\tau + t_0, \quad 0 \leq \tau \leq 1 \quad (4.66)$$

ここで、 θ は未知パラメータであり、 τ は新しい独立変数である。明らかに終端時刻 t_f では $\theta + t_0$ に等しい。そこで、 τ についてのシステム微分方程式、終端拘束および評価関数は

$$\dot{\tilde{x}}(\tau) = \theta\tilde{A}(\tau)x(\tau) + \theta\tilde{B}(\tau)\tilde{u}(\tau) + \theta\tilde{C}(\tilde{x}(\tau), \tau) \quad (4.67)$$

$$\tilde{x}(0) = x_0 \quad (4.68)$$

$$\psi(1) \equiv \tilde{D}(1)\tilde{x}(1) + \tilde{E}(\tilde{x}(1), 1) = 0 \quad (4.69)$$

$$J = \int_0^1 \left\{ \frac{\theta}{2}\tilde{x}^T(\tau)\tilde{Q}(\tau)\tilde{x}(\tau) + \frac{\theta}{2}\tilde{u}^T(\tau)\tilde{R}(\tau)\tilde{u}(\tau) \right\} d\tau + \frac{1}{2}\tilde{x}^T(1)\tilde{F}(1)\tilde{x}(1) \quad (4.70)$$

になる。そこで4.2 と同じ手法を用いて、二つの新しいベクトル \tilde{y}, \tilde{z} を導入し、ベクトル \tilde{y}, \tilde{z} についての微分方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{y}} \\ \dot{\tilde{z}} \end{bmatrix} = \theta \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 & \tilde{A}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} \tilde{u} + \theta \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 \\ \tilde{C}_2 \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}(0) \\ \tilde{z}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_0 \\ \tilde{z}_0 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

非線形終端拘束：

$$\psi(1) \equiv [\tilde{D}_1(1) \ \tilde{D}_2(1)] \begin{bmatrix} \tilde{y}(1) \\ \tilde{z}(1) \end{bmatrix} + \tilde{E}(\tilde{y}(1), \tilde{z}(1), 1) = 0 \quad (4.73)$$

2次形式評価関数：

$$J = \int_0^1 \frac{\theta}{2} \left\{ [\tilde{y}^T \ \tilde{z}^T] \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1 & \tilde{Q}_2 \\ \tilde{Q}_2^T & \tilde{Q}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} + \tilde{u}^T \tilde{R} \tilde{u} \right\} d\tau + \phi(1) \quad (4.74)$$

ここで

$$\phi(1) = \frac{1}{2} [\tilde{y}^T(1) \ \tilde{z}^T(1)] \begin{bmatrix} \tilde{F}_1 & \tilde{F}_2 \\ \tilde{F}_2^T & \tilde{F}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y}(1) \\ \tilde{z}(1) \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

ハミルトン関数 H は

$$\begin{aligned} H(\tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{u}, \lambda, \mu, \tau) &= \frac{\theta}{2} [\tilde{y}^T \ \tilde{z}^T] \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1 & \tilde{Q}_2 \\ \tilde{Q}_2^T & \tilde{Q}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} + \frac{\theta}{2} \tilde{u}^T \tilde{R} \tilde{u} \\ &\quad + \theta [\lambda^T \ \mu^T] \left(\begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 & \tilde{A}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} \tilde{u} + \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 \\ \tilde{C}_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{\theta}{2} \tilde{y}^T \tilde{Q}_1 \tilde{y} + \frac{\theta}{2} \tilde{y}^T \tilde{Q}_2 \tilde{z} + \frac{\theta}{2} \tilde{z}^T \tilde{Q}_2^T \tilde{y} + \frac{\theta}{2} \tilde{z}^T \tilde{Q}_3 \tilde{z} \\ &\quad + \frac{\theta}{2} \tilde{u}^T \tilde{R} \tilde{u} + \theta \lambda^T (\tilde{A}_1 \tilde{y} + \tilde{A}_2 \tilde{z} + \tilde{B}_1 \tilde{u} + \tilde{C}_1) \\ &\quad + \theta \mu^T (\tilde{A}_3 \tilde{y} + \tilde{A}_4 \tilde{z} + \tilde{B}_2 \tilde{u} + \tilde{C}_2) \end{aligned} \quad (4.76)$$

で与えられる。ここで、 λ と μ はそれぞれ s 次元と $n-s$ 次元のラグランジュ乗数ベクトルである。最適性の必要条件から λ と μ に関する随伴方程式は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{\mu} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} H_{\tilde{y}} \\ H_{\tilde{z}} \end{bmatrix} \\ &= -\theta \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1 & \tilde{Q}_2 \\ \tilde{Q}_2^T & \tilde{Q}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} - \theta \begin{bmatrix} \tilde{A}_1^T + \tilde{C}_{1\tilde{y}} & \tilde{A}_3^T + \tilde{C}_{2\tilde{y}} \\ \tilde{A}_2^T + \tilde{C}_{1\tilde{z}} & \tilde{A}_4^T + \tilde{C}_{2\tilde{z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.77)$$

となり、制御入力 \tilde{u} の最適性の条件

$$H_{\tilde{u}} = \tilde{R} \tilde{u} + \tilde{B}_1^T \lambda + \tilde{B}_2^T \mu = 0$$

より

$$\tilde{u}^{opt} = -\tilde{R}^{-1} \tilde{B}_1^T \lambda - \tilde{R}^{-1} \tilde{B}_2^T \mu \quad (4.78)$$

となる. この \ddot{u}^{opt} を式(4.77)に代入すると

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{y}} \\ \dot{\tilde{z}} \end{bmatrix} = \theta \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 & \tilde{A}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} - \theta \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \tilde{R}^{-1} \tilde{B}_1^T & \tilde{B}_1 \tilde{R}^{-1} \tilde{B}_2^T \\ \tilde{B}_2 \tilde{R}^{-1} \tilde{B}_1^T & \tilde{B}_2 \tilde{R}^{-1} \tilde{B}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 \\ \tilde{C}_2 \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

を得る. 4.2のように合成リカッチ変換式

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{y}} \\ \dot{\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z} \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

を用いて, 次のリカッチ微分方程式(4.81)とその補助方程式(4.82)が導かれる.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{K}_1 & \dot{K}_2 \\ \dot{K}_3 & \dot{K}_4 \end{bmatrix} &= \theta \begin{bmatrix} \tilde{A}_2 & -\tilde{B}_1 \tilde{R}^{-1} \tilde{B}_1^T \\ -\tilde{Q}_3 & -\tilde{A}_2^T - \tilde{C}_1 \tilde{z} \end{bmatrix} \\ &+ \theta \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & -\tilde{B}_1 \tilde{R}^{-1} \tilde{B}_2^T \\ -\tilde{Q}_2 & -\tilde{A}_1^T - \tilde{C}_2 \tilde{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \\ &- \theta \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}_4 & -\tilde{B}_2 \tilde{R}^{-1} \tilde{B}_1^T \\ -\tilde{Q}_2 & -\tilde{A}_1^T - \tilde{C}_1 \tilde{y} \end{bmatrix} \\ &- \theta \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}_3 & -\tilde{B}_2 \tilde{R}^{-1} \tilde{B}_2^T \\ -\tilde{Q}_1 & -\tilde{A}_3^T - \tilde{C}_2 \tilde{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.81)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{g}_1 \\ \dot{g}_2 \end{bmatrix} &= \theta \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & -\tilde{B}_1 \tilde{R}^{-1} \tilde{B}_2^T \\ -\tilde{Q}_2^T & -\tilde{A}_1^T - \tilde{C}_2 \tilde{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \\ &- \theta \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}_3 & -\tilde{B}_2 \tilde{R}^{-1} \tilde{B}_2^T \\ -\tilde{Q}_1 & -\tilde{A}_3^T - \tilde{C}_2 \tilde{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \\ &- \theta \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C}_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.82)$$

4.2.1と同じように次の終端条件が得られる.

$$K_1(1) = -\tilde{D}_1^{-1} \tilde{D}_2 \quad (4.83)$$

$$K_2(1) = 0 \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned} K_3(1) &= \tilde{F}_3 - (\tilde{D}_2^T + \tilde{E}_z)(\tilde{D}_1^T + \tilde{E}_y)^{-1} \tilde{F}_2 - \tilde{F}_2^T \tilde{D}_1^{-1} \tilde{D}_2 \\ &+ (\tilde{D}_2^T + \tilde{E}_z)(\tilde{D}_1^T + \tilde{E}_y)^{-1} \tilde{F}_1 \tilde{D}_1^{-1} \tilde{D}_2 \end{aligned} \quad (4.85)$$

$$K_4(1) = (\tilde{D}_2^T + \tilde{E}_z)(\tilde{D}_1^T + \tilde{E}_y)^{-1} \quad (4.86)$$

$$g_1(1) = -\tilde{D}_1^{-1}\tilde{E} \quad (4.87)$$

$$g_2(1) = -[\tilde{F}_2^T - (\tilde{D}_2^T + \tilde{E}_z)(\tilde{D}_1^T + \tilde{E}_y)^{-1}\tilde{F}_1]\tilde{D}_1^{-1}\tilde{E} \quad (4.88)$$

合成リカッチ変換式 (4.80) を $\lambda(0)$ と $\mu(0)$ について解くと

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \lambda(0) \\ \mu(0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} K_2^{-1} & -K_2^{-1}K_1 \\ K_4K_2^{-1} & K_3 - K_4K_2^{-1}K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y}(0) \\ \tilde{z}(0) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -K_2^{-1} & 0 \\ -K_4K_2^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1(0) \\ g_2(0) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.89)$$

となる.

第2章の未知 t_f に対する条件 (2.24) より, 終端時刻未知の最適制御問題の必要条件は

$$[H(t) + \phi_t + \nu^T \psi_t]_{t=t_f} = 0 \quad (4.90)$$

である. 式 (4.90) により, θ に関する関数 $H^*(\theta)$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} H^*(\theta) &= \left\{ \frac{\theta}{2} \tilde{y}^T \tilde{Q}_1 \tilde{y} + \frac{\theta}{2} \tilde{y}^T \tilde{Q}_2 \tilde{z} + \frac{\theta}{2} \tilde{z}^T \tilde{Q}_2^T \tilde{y} + \frac{\theta}{2} \tilde{z}^T \tilde{Q}_3 \tilde{z} + \frac{\theta}{2} \tilde{u}^T \tilde{R} \tilde{u} \right. \\ &\quad + \theta \lambda^T (\tilde{A}_1 \tilde{y} + \tilde{A}_2 \tilde{z} + \tilde{B}_1 \tilde{u} + \tilde{C}_1) \\ &\quad + \theta \mu^T (\tilde{A}_3 \tilde{y} + \tilde{A}_4 \tilde{z} + \tilde{B}_2 \tilde{u} + \tilde{C}_2) \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \tilde{x} \tilde{F}_\tau \tilde{x} + \nu^T (\tilde{D}_\tau \tilde{x} + \tilde{E}_\tau) \right\}_{\tau=1} \end{aligned} \quad (4.91)$$

ここで,

$$\tilde{u} = -\tilde{R}^{-1} \tilde{B}_1^T \lambda - \tilde{R}^{-1} \tilde{B}_2^T \mu \quad (4.92)$$

$$\nu^T = (\tilde{D}_1^T + \tilde{E}_y)^{-1} (\lambda - \tilde{F}_1 \tilde{y} - \tilde{F}_2 \tilde{z}) \quad (4.93)$$

である.

この関数 $H^*(\theta)$ は一意であれば, この終端時刻未知の問題を解くことは式 (4.94) が成り立つような θ^* を求める問題に帰着する.

$$H^*(\theta^*) = 0 \quad (4.94)$$

この式は θ を陽に含まないから, 直接にこの θ^* を求めることはできない. その θ^* を求めるため線形補間法を用いた次のような計算アルゴリズムを提案する.

4.3.2 計算アルゴリズム

setp 1. 制御量の推定値 $\hat{u}^{(0)}(t)$ および $\theta_1^{(0)}$ と $\theta_2^{(0)}$ を与え, SRTM と式 (4.91) より, $H^*(\theta_1^{(0)})$ と $H^*(\theta_2^{(0)})$ を計算し, $i = 0$ とする.

setp 2.

$$\theta_3^{(i+1)} = \frac{\theta_1^{(i)} H^*(\theta_2^{(i)}) - \theta_2^{(i)} H^*(\theta_1^{(i)})}{H^*(\theta_2^{(i)}) - H^*(\theta_1^{(i)})} \quad (4.95)$$

により, $\theta_3^{(i+1)}$ を計算してから, 式 (4.91) より, $H^*(\theta_3^{(i+1)})$ を求める. $\hat{y}^{(i+1)}(t)$, $\hat{z}^{(i+1)}(t)$ と $J^{(i+1)}$ を記憶する. もし $|H^*(\theta_3^{(i+1)})| < \varepsilon$ ならば, 繰返し計算を終了する.

setp 3. 式 (4.96) と式 (4.97) により, 勾配 $S_0^{(i)}$ と $S_1^{(i)}$ を計算する.

$$S_0^{(i)} = \frac{H^*(\theta_1^{(i)}) - H^*(\theta_2^{(i)})}{\theta_1^{(i)} - \theta_2^{(i)}} \quad (4.96)$$

$$S_1^{(i)} = \frac{H^*(\theta_3^{(i+1)}) - H^*(\theta_1^{(i)})}{\theta_3^{(i+1)} - \theta_1^{(i)}} \quad (4.97)$$

setp 4. もし $H^*(\theta_1^{(i)})H^*(\theta_2^{(i)}) < 0$ で $H^*(\theta_2^{(i)})H^*(\theta_3^{(i+1)}) < 0$, あるいは $H^*(\theta_1^{(i)})H^*(\theta_2^{(i)}) > 0$ で $|H^*(\theta_1^{(i)})| > |H^*(\theta_2^{(i)})|$, あるいは $|S_0^{(i)}| > |S_1^{(i)}|$ ならば $\theta_3^{(i+1)} \rightarrow \theta_1^{(i)}$, $H^*(\theta_3^{(i+1)}) \rightarrow H^*(\theta_1^{(i)})$ とする. そうでなければ $\theta_3^{(i+1)} \rightarrow \theta_2^{(i)}$, $H^*(\theta_3^{(i+1)}) \rightarrow H^*(\theta_2^{(i)})$ とする.

step 5. $\hat{y}^{(i+1)}(\tau) \rightarrow \hat{y}^{(i)}(\tau)$, $\hat{z}^{(i+1)}(\tau) \rightarrow \hat{z}^{(i)}(\tau)$, $J^{(i+1)} \rightarrow J^{(i)}$, $i = i + 1$ として, **step 2** に戻る.

未知の時間をもつ問題の計算例は 6.2 で述べる.

4.4 制御制約をもつ非線形最適制御問題

4.4.1 制御修正量の導入

4.2 の時変非線形システム方程式と非線形終端拘束および2次形式評価関数を考えるが、制御量には次のような不等式制約がある。

$$u(t) \in \mathcal{U} \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad (4.98)$$

ここで、 \mathcal{U} はある凸多面体で、 $\tilde{\mathcal{U}}$ はこの凸多面体の境界である。

この問題を解くためには、まず4.2と同じ手法を用いて、二つの新しいベクトル y, z を導入し、ハミルトン関数 H を定義して最適性の必要条件から λ と μ に関する随伴方程式を導出する。

制御入力のお適性の条件：

$$H_u = Ru + B_1^T \lambda + B_2^T \mu = 0$$

より

$$u^* = -R^{-1}B_1^T \lambda - R^{-1}B_2^T \mu \quad (4.99)$$

となる。

制御量制約があるので、式(4.99)の u^* が \mathcal{U} の中に存在するとき、この u^* は最適制御 u^{opt} である。もしこの u^* が \mathcal{U} の中に存在しないときは、最大原理より最適制御 u^{opt} はかならず \mathcal{U} の境界 $\tilde{\mathcal{U}}$ にあるはずである。そこで、上の議論より、修正量 ρ を導入し、 u^{opt} を次式のように表す。

$$\begin{aligned} u^{opt} &= \rho - R^{-1}B_1^T \lambda - R^{-1}B_2^T \mu \\ &= \rho + u^* \end{aligned} \quad (4.100)$$

ここで、 ρ は制御量に制約を与えるための m 次元修正量ベクトルであり、制御期間の修正によりハミルトン関数 H を最小とし、終端拘束を保証する役割をもつ量である。修正量 ρ は次のように決められる。

$$\rho(t) = \begin{cases} 0 & u^* \in \mathcal{U} \\ \alpha - u^* & u^* \notin \mathcal{U} \end{cases} \quad (4.101)$$

α は $\tilde{\mathcal{U}}$ の一つの点で、同時に不等式(4.102)を満たす。

$$\begin{aligned} \forall \alpha' \in \tilde{\mathcal{U}}, \quad \alpha' \neq \alpha, \\ \|\alpha' - u^*\| > \|\alpha - u^*\| \end{aligned} \quad (4.102)$$

式 (4.100) を式 (4.38) に代入すると

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_1 R^{-1} B_1^T & B_1 R^{-1} B_2^T \\ B_2 R^{-1} B_1^T & B_2 R^{-1} B_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \rho \end{aligned} \quad (4.103)$$

4.2 と同じように、合成リカッチ変換式を用いて、次の合成リカッチ微分方程式 (4.104) と補助方程式 (4.105) が導かれる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{K}_1 & \dot{K}_2 \\ \dot{K}_3 & \dot{K}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_2 & -B_1 R^{-1} B_1^T \\ -Q_3 & -A_2^T - C_{1z} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 R^{-1} B_2^T \\ -Q_2 & -A_4^T - C_{2z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_4 & -B_2 R^{-1} B_1^T \\ -Q_2 & -A_1^T - C_{1y} \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & -B_2 R^{-1} B_2^T \\ -Q_1 & -A_3^T - C_{2y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.104)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{g}_1 \\ \dot{g}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 R^{-1} B_2^T \\ -Q_2^T & -A_4^T - C_{2z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & -B_2 R^{-1} B_2^T \\ -Q_1 & -A_3^T - C_{2y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \rho \\ &- \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix} \rho \end{aligned} \quad (4.105)$$

4.4.2 計算アルゴリズム

上で述べた式を基にして、次の計算アルゴリズムを構成する。

- step 1.** 制御量の推定値 $u^{(0)}(t) \in \mathcal{U}$ と最適制御の修正量 $\rho^{(0)}(t) = 0$ を与え、状態方程式 (4.38) を順時間方向に解き、 $y^{(0)}(t)$ と $z^{(0)}(t)$ を記憶し、同時に評価関数 $J^{(0)}$ を求め、記憶する。そして $i = 0$ とする。
- step 2.** 終端条件 (4.55)~(4.60) と $y^{(i)}(t)$ と $z^{(i)}(t)$ および $\rho^{(i)}(t)$ を用いて、微分方程式 (4.104) と (4.105) を逆時間方向に解き、 $K_1(t_0)$, $K_2(t_0)$, $K_3(t_0)$, $K_4(t_0)$, $g_1(t_0)$ および $g_2(t_0)$ を求める。
- step 3.** 式 (4.61) より $\lambda(t_0)$ と $\mu(t_0)$ を求める。
- step 4.** 式 (4.46) と式 (4.103) を順時間方向に解き、同時に式 (4.99) ~ (4.102) より $\rho^{(i+1)}(t)$ と $u^{(i+1)}(t)$ を計算する。そして $J^{(i+1)}$ を計算する。
- step 5.** もし $\|\psi(t_f)\| < \varepsilon_1$ ($\varepsilon_1 > 0$), $|J^{(i+1)} - J^{(i)}|/|J^{(i)}| < \varepsilon_2$ ($\varepsilon_2 > 0$) ならば、繰り返し計算を終了し、そうでなければ、次の置き換え、 $u^{(i+1)}(t) \rightarrow u^{(i)}(t)$, $y^{(i+1)}(t) \rightarrow y^{(i)}(t)$, $z^{(i+1)}(t) \rightarrow z^{(i)}(t)$, $\rho^{(i+1)}(t) \rightarrow \rho^{(i)}(t)$ および $i + 1 \rightarrow i$ を行い、**step 2** へ戻る。

制御量の制約のある計算例は **6.3** で述べる。

4.5 制御項が x の非線形関数になる場合への拡張

4.5.1 クロネッカ積の導入

今までは、システム方程式の形として $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + C(x(t), t)$ なるものを考えた。すなわち右辺の第1項と第2項が線形項で、これに第3項の非線形項が加わっている。この形はある分野の非線形問題に有効であることがわかっている。しかしマニピュレータ制御のような問題などでは、この形にあてはまらず制御量 $u(t)$ の係数が $x(t)$ の非線形関数になっている。そこで、ここでは式(4.106)に示すようにこの係数が $x(t)$ の非線形関数になる場合を考察しよう。この問題では合成リカッチ変換式とクロネッカ積を用いて新しい計算法を導く。非線形システム方程式

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(x(t), t)u(t) + C(x(t), t) \quad (4.106)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (4.107)$$

を考える。ここで、 $B(x(t), t)$ が連続微分可能な非線形関数とする。非線形終端拘束と2次形式評価関数は4.2と同じである。クロネッカ積を導入すれば最適性の必要条件から λ と μ に関する随伴方程式は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{\mu} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} H_y \\ H_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} A_1^T + C_{1y} & A_3^T + C_{2y} \\ A_2^T + C_{1z} & A_4^T + C_{2z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} (I_s \otimes u_{opt}^T)B_{1y} & (I_s \otimes u_{opt}^T)B_{2y} \\ (I_{n-s} \otimes u_{opt}^T)B_{1z} & (I_{n-s} \otimes u_{opt}^T)B_{2z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} A_1^T + C_{1y} + \alpha_{11} & A_3^T + C_{2y} + \alpha_{12} \\ A_2^T + C_{1z} + \alpha_{21} & A_4^T + C_{2z} + \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.108)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= (I_s \otimes u_{opt}^T)B_{1y} \\ &= -(I_s \otimes (\lambda^T B_1 R^{-1}))B_{1y} - (I_s \otimes (\mu^T B_2 R^{-1}))B_{1y} \\ \alpha_{12} &= (I_s \otimes u_{opt}^T)B_{2y} \\ &= -(I_s \otimes (\lambda^T B_1 R^{-1}))B_{2y} - (I_s \otimes (\mu^T B_2 R^{-1}))B_{2y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{21} &= (I_{n-s} \otimes u_{opt}^T) B_{1z} \\
&= -(I_{n-s} \otimes (\lambda^T B_1 R^{-1})) B_{1z} - (I_{n-s} \otimes (\mu^T B_2 R^{-1})) B_{1z} \\
\alpha_{22} &= (I_{n-s} \otimes u_{opt}^T) B_{2z} \\
&= -(I_{n-s} \otimes (\lambda^T B_1 R^{-1})) B_{2z} - (I_{n-s} \otimes (\mu^T B_2 R^{-1})) B_{2z}
\end{aligned}$$

合成リカッチ変換式 (4.52) を適用して、微分方程式 (4.108) と (4.48) より、次の合成リカッチ微分方程式 (4.109) とその補助方程式 (4.110) が導かれる。

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{K}_1 & \dot{K}_2 \\ \dot{K}_3 & \dot{K}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_2 & -B_1 R^{-1} B_1^T \\ -Q_3 & -A_2^T - C_{1z} - \alpha_{21} \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 R^{-1} B_2^T \\ -Q_2 & -A_4^T - C_{2z} - \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \\
&- \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_4 & -B_2 R^{-1} B_1^T \\ -Q_2 & -A_1^T - C_{1y} - \alpha_{11} \end{bmatrix} \\
&- \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & -B_2 R^{-1} B_2^T \\ -Q_1 & -A_3^T - C_{2y} - \alpha_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \quad (4.109)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{g}_1 \\ \dot{g}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 R^{-1} B_2^T \\ -Q_2^T & -A_4^T - C_{2z} - \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \\
&- \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & -B_2 R^{-1} B_2^T \\ -Q_1 & -A_3^T - C_{2y} - \alpha_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \\
&- \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.110)
\end{aligned}$$

そこで 4.2 の定式化などを利用して、この問題を解くアルゴリズムを構成できる。まず終端条件 (4.55) ~ (4.60) を利用し、微分方程式 (4.109) と (4.110) を逆時間方向に積分して、初期値 $K_1(t_0)$, $K_2(t_0)$, $K_3(t_0)$, $K_4(t_0)$ および $g_1(t_0)$, $g_2(t_0)$ だけを記憶する。もし $K_2(t_0) \neq 0$ という条件が満たされると、式 (4.61) により、 $\lambda(t_0)$ と $\mu(t_0)$ が計算できる。さらに $\lambda(t_0)$ と $\mu(t_0)$ および初期値条件 (4.39) を用いて微分方程式 (4.108) と (4.48) を解く。

4.5.2 計算アルゴリズム

以上述べたことを整理すると、合成リカッチ変換式を用いる非線形終端拘束をもつある非線形最適制御問題の数値計算アルゴリズムを提案する。

setp 1. 制御量の推定値 $u^{(0)}(t)$ を与え、状態方程式 (4.38) を順時間方向に解き、 $y^{(0)}(t)$, $z^{(0)}(t)$ を記憶し、同時に評価関数 $J^{(0)}$ を求め記憶する。そして $i = 0$ とする。

setp 2. 終端条件 (4.55) ~ (4.60) と $y^{(i)}(t)$ と $z^{(i)}(t)$ を用いて微分方程式 (4.109) と (4.110) を逆時間方向に解き、 $K_1(t_0)$, $K_2(t_0)$, $K_3(t_0)$, $K_4(t_0)$, $g_1(t_0)$ および $g_2(t_0)$ を求めて記憶する。

setp 3. 式 (4.61) を用いて $\lambda(t_0)$ と $\mu(t_0)$ を求める。

setp 4. 式 (4.108) と式 (4.48) を順時間方向に解き、同時に式 (4.47) を計算する。そして $J^{(i+1)}$ を計算する。

setp 5. もし $\|\psi(t_f)\| < \varepsilon_1$ ($\varepsilon_1 > 0$), $|J^{(i+1)} - J^{(i)}|/|J^{(i)}| < \varepsilon_2$ ($\varepsilon_2 > 0$) ならば、繰返し計算を終了し、そうでなければ、次の置き換え: $y^{(i+1)}(t) \rightarrow y^{(i)}(t)$, $z^{(i+1)}(t) \rightarrow z^{(i)}(t)$, $u^{(i+1)}(t) \rightarrow u^{(i)}(t)$, $J^{(i+1)} \rightarrow J^{(i)}$ および $i + 1 \rightarrow i$ を行い **step 2** に戻る。ただし ε_1 , ε_2 , ε_3 は微小パラメータ。

このアルゴリズムの応用例は 6.4 で述べる。

Chapter 5

合成リカッチ変換によるアルゴリズムの収束性

第4章で提案した合成リカッチ変換法による非線形最適制御問題の数値計算法 SRTM の収束性を考察することにする。まず 区間 $[t_0, t_f]$ に新しいベクトル変数 σ , γ と w を次のように定義する。

$$\sigma(t) \equiv (y(t), z(t))^T$$

$$\gamma(t) \equiv (\lambda(t), \mu(t))^T$$

$$w(t) \equiv (K_1(t), K_2(t), K_3(t), K_4(t), g_1(t), g_2(t))^T$$

簡単のため、混乱するおそれがない限り、 $\sigma(t)$, $\gamma(t)$ および $w(t)$ を略して、単に σ , γ および w と記すことにする。

微分方程式 (4.48), (4.108) と初期値条件 (4.39), (4.61) 式から求められる $t = t_0$ における値 $\lambda(t_0)$, $\mu(t_0)$ により

$$\dot{\sigma}^n = \mathcal{X}(\sigma^n, \gamma^n, t) \tag{5.1}$$

$$\sigma^n(t_0) = \sigma_0 \tag{5.2}$$

$$\dot{\gamma}^n = \mathcal{T}(\sigma^n, \gamma^n, t) \tag{5.3}$$

$$\gamma(t_0) = \mathcal{I}(w^n(t_0), \sigma_0) \tag{5.4}$$

となり、リカッチ微分方程式 (4.109) とその補助方程式 (4.110) および終端条件 (4.55) ~ (4.60) より

$$\dot{w}^n = \mathcal{W}(\sigma^{n-1}, \gamma^{n-1}, w^n, t) \tag{5.5}$$

$$w^n(t_f) = \mathcal{F}(\sigma^{n-1}(t_f)) \quad (5.6)$$

となる. 式 (5.1) と式 (5.2) より 閉区間 $[t_0, t_f]$ に対して

$$\sigma^n = \sigma_0 + \int_{t_0}^t \mathcal{X}(\sigma^n(\tau), \gamma^n(\tau), \tau) d\tau$$

となり そして

$$\begin{aligned} & \|\sigma^{n+1}(t) - \sigma^n(t)\| \\ & \leq \int_{t_0}^t \|\mathcal{X}(\sigma^{n+1}(\tau), \gamma^{n+1}(\tau), \tau) - \mathcal{X}(\sigma^n(\tau), \gamma^n(\tau), \tau)\| d\tau \\ & \leq \int_{t_0}^t \|\mathcal{X}(\sigma^{n+1}(\tau), \gamma^{n+1}(\tau), \tau) - \mathcal{X}(\sigma^n(\tau), \gamma^{n+1}(\tau), \tau)\| d\tau \\ & \quad + \int_{t_0}^t \|\mathcal{X}(\sigma^n(\tau), \gamma^{n+1}(\tau), \tau) - \mathcal{X}(\sigma^n(\tau), \gamma^n(\tau), \tau)\| d\tau \\ & \leq \int_{t_0}^t L_\sigma^{\mathcal{X}} \|\sigma^{n+1}(\tau) - \sigma^n(\tau)\| d\tau + \int_{t_0}^t L_\gamma^{\mathcal{X}} \|\gamma^{n+1}(\tau) - \gamma^n(\tau)\| d\tau \end{aligned} \quad (5.7)$$

ここで, $L_\sigma^{\mathcal{X}}$ と $L_\gamma^{\mathcal{X}}$ は閉区間 $[t_0, t_f]$ 上のそれぞれ σ と γ に対する非線形関数 $\mathcal{X}(\sigma, \gamma, t)$ のリプシッツ係数であり, 次の条件を満たす.

$$\|\mathcal{X}(\sigma, \gamma, t) - \mathcal{X}(\sigma', \gamma, t)\| \leq L_\sigma^{\mathcal{X}} \|\sigma - \sigma'\|$$

$$\|\mathcal{X}(\sigma, \gamma, t) - \mathcal{X}(\sigma, \gamma', t)\| \leq L_\gamma^{\mathcal{X}} \|\gamma - \gamma'\|$$

$$(\forall \sigma, \sigma' \in R^s; \forall \gamma, \gamma' \in R^{n-s}; t \in [t_0, t_f])$$

式 (5.3) と式 (5.4) より 閉区間 $[t_0, t_f]$ に対して

$$\gamma^n(t) = \mathcal{I}(w^n(t_0), \sigma_0) + \int_{t_0}^t \mathcal{T}(\sigma^n(\tau), \gamma^n(\tau), \tau) d\tau$$

となり そして

$$\begin{aligned} & \|\gamma^{n+1}(t) - \gamma^n(t)\| \\ & \leq \|\mathcal{I}(w^{n+1}(t_0), \sigma_0) - \mathcal{I}(w^n(t_0), \sigma_0)\| \\ & \quad + \int_{t_0}^t \|\mathcal{T}(\sigma^{n+1}(\tau), \gamma^{n+1}(\tau), \tau) - \mathcal{T}(\sigma^n(\tau), \gamma^n(\tau), \tau)\| d\tau \\ & \leq \|\mathcal{I}(w^{n+1}(t_0), \sigma_0) - \mathcal{I}(w^n(t_0), \sigma_0)\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t_0}^t \|\mathcal{T}(\sigma^{n+1}(\tau), \gamma^{n+1}(\tau), \tau) - \mathcal{T}(\sigma^n(\tau), \gamma^{n+1}(\tau), \tau)\| d\tau \\
& + \int_{t_0}^t \|\mathcal{T}(\sigma^n(\tau), \gamma^{n+1}(\tau), \tau) - \mathcal{T}(\sigma^n(\tau), \gamma^n(\tau), \tau)\| d\tau \\
& \leq L_w^{\mathcal{I}} \|w^{n+1}(t_0) - w^n(t_0)\| \\
& + \int_{t_0}^t L_{\sigma}^{\mathcal{I}} \|\sigma^{n+1}(\tau) - \sigma^n(\tau)\| d\tau \\
& + \int_{t_0}^t L_{\gamma}^{\mathcal{I}} \|\gamma^{n+1}(\tau) - \gamma^n(\tau)\| d\tau \tag{5.8}
\end{aligned}$$

ここで、前の $L_{\sigma}^{\mathcal{X}}$ と $L_{\gamma}^{\mathcal{X}}$ と同じに、 $L_{\sigma}^{\mathcal{I}}$ と $L_{\gamma}^{\mathcal{I}}$ はそれぞれ σ と γ に対する非線形関数 $\mathcal{T}(\sigma, \gamma)$ のリプシッツ係数である。式 (5.7) と式 (5.8) より

$$\begin{aligned}
& \|\sigma^{n+1}(t) - \sigma^n(t)\| + \|\gamma^{n+1}(t) - \gamma^n(t)\| \\
& \leq L_w^{\mathcal{I}} \|w^{n+1}(t_0) - w^n(t_0)\| \\
& + \int_{t_0}^t (L_{\sigma}^{\mathcal{X}} + L_{\sigma}^{\mathcal{I}}) \|\sigma^{n+1}(\tau) - \sigma^n(\tau)\| d\tau \\
& + \int_{t_0}^t (L_{\gamma}^{\mathcal{X}} + L_{\gamma}^{\mathcal{I}}) \|\gamma^{n+1}(\tau) - \gamma^n(\tau)\| d\tau \\
& \leq L_w^{\mathcal{I}} \|w^{n+1}(t_0) - w^n(t_0)\| \\
& + \int_{t_0}^t \beta_1 \{ \|\sigma^{n+1}(\tau) - \sigma^n(\tau)\| + \|\gamma^{n+1}(\tau) - \gamma^n(\tau)\| \} d\tau \tag{5.9}
\end{aligned}$$

ここで

$$\beta_1 = \max\{L_{\sigma}^{\mathcal{X}} + L_{\sigma}^{\mathcal{I}}, L_{\gamma}^{\mathcal{X}} + L_{\gamma}^{\mathcal{I}}\}.$$

グロンウェル不等式を利用して

$$\begin{aligned}
& \|\sigma^{n+1}(t) - \sigma^n(t)\| + \|\gamma^{n+1}(t) - \gamma^n(t)\| \\
& \leq L_w^{\mathcal{I}} \|w^{n+1}(t_0) - w^n(t_0)\| e^{\beta_1(t-t_0)} \tag{5.10}
\end{aligned}$$

が導かれる。

次に $s = t_f + t_0 - t$ ($t_0 \leq s \leq t_f$) とおいて、式 (5.5) と式 (5.6) より

$$\dot{w}^n = \mathcal{W}(\bar{\sigma}^{n-1}, \bar{\gamma}^{n-1}, \bar{w}^n, s) \tag{5.11}$$

$$\dot{w}^n(t_0) = \mathcal{F}(\dot{\sigma}^{n-1}(t_0)) = \mathcal{F}(\sigma^{n-1}(t_f)) \quad (5.12)$$

となり, ここで

$$\dot{\sigma}(s) = \sigma(t_f + t_0 - s)$$

$$\dot{\gamma}(s) = \gamma(t_f + t_0 - s)$$

$$\dot{w}(s) = w(t_f + t_0 - s)$$

式(5.11)と式(5.12)より

$$\dot{w}^n(s) = \mathcal{F}(\dot{\sigma}^{n-1}(t_0)) + \int_{t_0}^s \dot{\mathcal{W}}(\dot{\sigma}^{n-1}(\tau), \dot{\gamma}^{n-1}(\tau), \dot{w}^n(\tau), \tau) d\tau$$

となり, そして

$$\begin{aligned} \|\dot{w}^{n+1}(s) - \dot{w}^n(s)\| &\leq \|\mathcal{F}(\dot{\sigma}^n(t_0)) - \mathcal{F}(\dot{\sigma}^{n-1}(t_0))\| \\ &\quad + \int_{t_0}^s \|\dot{\mathcal{W}}(\dot{\sigma}^n(\tau), \dot{\gamma}^n(\tau), \dot{w}^{n+1}(\tau), \tau) - \dot{\mathcal{W}}(\dot{\sigma}^{n-1}(\tau), \dot{\gamma}^{n-1}(\tau), \dot{w}^n(\tau), \tau)\| d\tau \\ &\leq \|\mathcal{F}(\dot{\sigma}^n(t_0)) - \mathcal{F}(\dot{\sigma}^{n-1}(t_0))\| \\ &\quad + \int_{t_0}^s \|\dot{\mathcal{W}}(\dot{\sigma}^n(\tau), \dot{\gamma}^n(\tau), \dot{w}^{n+1}(\tau), \tau) - \dot{\mathcal{W}}(\dot{\sigma}^n(\tau), \dot{\gamma}^n(\tau), \dot{w}^n(\tau), \tau)\| d\tau \\ &\quad + \int_{t_0}^s \|\dot{\mathcal{W}}(\dot{\sigma}^n(\tau), \dot{\gamma}^n(\tau), \dot{w}^n(\tau), \tau) - \dot{\mathcal{W}}(\dot{\sigma}^{n-1}(\tau), \dot{\gamma}^n(\tau), \dot{w}^n(\tau), \tau)\| d\tau \\ &\quad + \int_{t_0}^s \|\dot{\mathcal{W}}(\dot{\sigma}^{n-1}(\tau), \dot{\gamma}^n(\tau), \dot{w}^n(\tau), \tau) - \dot{\mathcal{W}}(\dot{\sigma}^{n-1}(\tau), \dot{\gamma}^{n-1}(\tau), \dot{w}^n(\tau), \tau)\| d\tau \\ &\leq L_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}} \|\dot{\sigma}^n(t_0) - \dot{\sigma}^{n-1}(t_0)\| \\ &\quad + \int_{t_0}^s \{L_{\dot{w}}^{\dot{\mathcal{W}}} \|\dot{w}^{n+1}(\tau) - \dot{w}^n(\tau)\| + L_{\dot{\sigma}}^{\dot{\mathcal{W}}} \|\dot{\sigma}^n(\tau) - \dot{\sigma}^{n-1}(\tau)\| + L_{\dot{\gamma}}^{\dot{\mathcal{W}}} \|\dot{\gamma}^n(\tau) - \dot{\gamma}^{n-1}(\tau)\|\} d\tau \\ &\leq \int_{t_0}^s L_{\dot{w}}^{\dot{\mathcal{W}}} \|\dot{w}^{n+1}(\tau) - \dot{w}^n(\tau)\| d\tau + L_{\dot{\sigma}}^{\mathcal{F}} \|\dot{\sigma}^n(t_0) - \dot{\sigma}^{n-1}(t_0)\| \\ &\quad + \int_{t_0}^s \beta_2 \{\|\dot{\sigma}^n(\tau) - \dot{\sigma}^{n-1}(\tau)\| + \|\dot{\gamma}^n(\tau) - \dot{\gamma}^{n-1}(\tau)\|\} d\tau \end{aligned}$$

が導かれる. ここで $L_{\dot{w}}^{\dot{\mathcal{W}}}$, $L_{\dot{\sigma}}^{\dot{\mathcal{W}}}$, $L_{\dot{\gamma}}^{\dot{\mathcal{W}}}$ および $L_{\dot{\sigma}}^{\mathcal{F}}$ は閉区間 $[t_0, t_f]$ にそれぞれ変数 \dot{w} , $\dot{\sigma}$ と $\dot{\gamma}$ に対する関数 $\dot{\mathcal{W}}(\dot{\sigma}, \dot{\gamma}, \dot{w}, s)$ と $\mathcal{F}(\dot{\sigma}(t_0))$ のリプシッツ係数であり,

$$\beta_2 = \max\{L_{\dot{\sigma}}^{\dot{\mathcal{W}}}, L_{\dot{\gamma}}^{\dot{\mathcal{W}}}\}$$

も定義される.

さらに式 (5.9) を使って

$$\begin{aligned} \|\tilde{w}^{n+1}(s) - \tilde{w}^n(s)\| &\leq \int_{t_0}^s L_{\tilde{w}}^{\mathcal{W}} \|\tilde{w}^{n+1}(\tau) - \tilde{w}^n(\tau)\| d\tau \\ &\quad + L_{\tilde{\sigma}}^{\mathcal{F}} \|\tilde{\sigma}^n(t_0) - \tilde{\sigma}^{n-1}(t_0)\| + \frac{\beta_2 L_w^{\mathcal{I}}}{\beta_1} \|w^{n+1}(t_0) - w^n(t_0)\| (e^{\beta_1 T} - 1) \end{aligned}$$

となり, ここで $T = t_f - t_0$. グロンウエル不等式を利用して

$$\begin{aligned} \|\tilde{w}^{n+1}(s) - \tilde{w}^n(s)\| &\leq \{L_{\tilde{\sigma}}^{\mathcal{F}} \|\tilde{\sigma}^n(t_0) - \tilde{\sigma}^{n-1}(t_0)\| \\ &\quad + \frac{\beta_2 L_w^{\mathcal{I}} (e^{\beta_1 T} - 1)}{\beta_1} \|w^n(t_0) - w^{n-1}(t_0)\|\} e^{L_{\tilde{w}}^{\mathcal{W}}(s-t_0)} \end{aligned}$$

$s = t_f$ のとき $\tilde{w}^n(t_f) = w^n(t_0)$ ということに注意し

$$\begin{aligned} &\|w^{n+1}(t_0) - w^n(t_0)\| \\ &\leq L_{\tilde{\sigma}}^{\mathcal{F}} e^{L_{\tilde{w}}^{\mathcal{W}} T} \{\|\sigma^n(t_f) - \sigma^{n-1}(t_f)\| + \|\gamma^n(t_f) - \gamma^{n-1}(t_f)\|\} \\ &\quad + \frac{\beta_2 L_w^{\mathcal{I}} (e^{\beta_1 T} - 1) e^{L_{\tilde{w}}^{\mathcal{W}} T}}{\beta_1} \|w^n(t_0) - w^{n-1}(t_0)\| \\ &\leq \left(L_{\tilde{\sigma}}^{\mathcal{F}} L_w^{\mathcal{I}} e^{L_{\tilde{w}}^{\mathcal{W}} T} e^{\beta_1 T} + \frac{\beta_2 L_w^{\mathcal{I}} (e^{\beta_1 T} - 1) e^{L_{\tilde{w}}^{\mathcal{W}} T}}{\beta_1} \right) \|w^n(t_0) - w^{n-1}(t_0)\| \\ &\leq \beta_3 \|w^n(t_0) - w^{n-1}(t_0)\| \end{aligned}$$

ここで

$$\beta_3 = L_{\tilde{\sigma}}^{\mathcal{F}} L_w^{\mathcal{I}} e^{L_{\tilde{w}}^{\mathcal{W}} T} e^{\beta_1 T} + \frac{\beta_2 L_w^{\mathcal{I}} (e^{\beta_1 T} - 1) e^{L_{\tilde{w}}^{\mathcal{W}} T}}{\beta_1}$$

したがってこのアルゴリズムの収束性の十分条件は

$$0 < \beta_3 < 1$$

で与えられる. 上の式においてリプシッツ係数 $L^{\mathcal{X}}$, $L^{\mathcal{T}}$, $L^{\mathcal{W}}$ および $L^{\mathcal{I}}$ と $L^{\mathcal{F}}$ はそれぞれ微分方程式 (4.48), (4.108), (4.109) と (4.110) および初期値と終端値条件 (4.61) と (4.55) ~ (4.60) によって決められる, β_3 はこれらのリプシッツ係数と T によって決められる.

これらのリプシッツ係数を考察してみよう. 4.5 の (4.106) を考える.

$$\tilde{a} \equiv A(t) - \frac{\partial C(0, t)}{\partial x} \tag{5.13}$$

$$\tilde{b} \equiv B(0, t) \quad (5.14)$$

$$\tilde{f}(x, t) \equiv C(x, t) - C(0, t) \quad (5.15)$$

$$\tilde{h}(x, t) \equiv B(x, t) - B(0, t) \quad (5.16)$$

をおくと (4.106) は

$$\dot{x}(t) = \tilde{a}x(t) + \tilde{b}u(t) + \tilde{f}(x, t)\tilde{h}(x, t)u(t) \quad (5.17)$$

と書き換えられる. ここで,

$$\frac{\partial \tilde{f}(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (5.18)$$

$$\tilde{f}(0, t) = 0 \quad (5.19)$$

$$\tilde{h}(0, t) = 0 \quad (5.20)$$

が成り立つ.

新しいベクトル y と z の導入によって, \tilde{a} , \tilde{b} , $\tilde{f}(x, t)$ と $\tilde{h}(x, t)$ は a , b , $f(x, t)$ と $h(x, t)$ になる. そこで, 最適制御量は

$$u^{opt} = -R^{-1}[b_1 + h_1]^T \lambda - R^{-1}[b_2 + h_2]^T \mu \quad (5.21)$$

と書き直す. 式 (4.48) と (4.108) より,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 R^{-1} b_1^T & b_1 R^{-1} b_2^T \\ b_2 R^{-1} b_1^T & b_2 R^{-1} b_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} + \Theta(y, z, \lambda, \mu, t) \\ &= a\sigma - bR^{-1}b^T\gamma + \Theta(\sigma, \gamma, t) \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{\mu} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1^T & a_3^T \\ a_2^T & a_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} + \Phi(y, z, \lambda, \mu, t) \\ &= -Q\sigma - a^T\gamma + \Phi(\sigma, \gamma, t) \end{aligned} \quad (5.23)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \Theta(\sigma, \gamma, t) &= - \begin{bmatrix} b_1 R^{-1} h_1^T + h_1 R^{-1} (b_1 + h_1)^T & b_1 R^{-1} h_2^T + h_1 R^{-1} (b_2 + h_2)^T \\ b_2 R^{-1} h_1^T + h_2 R^{-1} (b_1 + h_1)^T & b_2 R^{-1} h_2^T + h_2 R^{-1} (b_2 + h_2)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\Phi(\sigma, \gamma, t) = - \begin{bmatrix} f_{1y} + \alpha_{11} & f_{2y} + \alpha_{12} \\ f_{1z} + \alpha_{21} & f_{2z} + \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

式 (5.24) と (5.25) から、 Θ と Φ について、

$$\Theta(0, 0, t) = 0 \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, 0, t)}{\partial \sigma} = 0 \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, 0, t)}{\partial \gamma} = 0 \quad (5.28)$$

$$\Phi(0, 0, t) = 0 \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial \Phi(0, 0, t)}{\partial \sigma} = 0 \quad (5.30)$$

$$\frac{\partial \Phi(0, 0, t)}{\partial \gamma} = 0 \quad (5.31)$$

が導かれる。これらの性質があるから、 Θ と Φ の局所的なリプシッツ条件について、つぎのことがいえる。

閉区間 $[t_0, t_f]$ に、任意の正数 η_1 と η_2 について正数 $L_{\Theta}^{\eta_1, \eta_2}$ と $L_{\Phi}^{\eta_1, \eta_2}$ が存在し、各 $\sigma, \sigma' \in R^s$; $|\sigma|, |\sigma'| \leq \eta_1$ 及び $\gamma, \gamma' \in R^{n-s}$; $|\gamma|, |\gamma'| \leq \eta_2$ に対して

$$|\Theta(\sigma, \gamma, t) - \Theta(\sigma', \gamma', t)| \leq L_{\Theta}^{\eta_1, \eta_2} (|\sigma - \sigma'| + |\gamma - \gamma'|) \quad (5.32)$$

$$|\Phi(\sigma, \gamma, t) - \Phi(\sigma', \gamma', t)| \leq L_{\Phi}^{\eta_1, \eta_2} (|\sigma - \sigma'| + |\gamma - \gamma'|) \quad (5.33)$$

またリプシッツ係数 $L_{\Theta}^{\eta_1, \eta_2}$ と $L_{\Phi}^{\eta_1, \eta_2}$ が η_1 と η_2 について単調減少で、また

$$\lim_{\eta_1, \eta_2 \rightarrow 0} L_{\Theta}^{\eta_1, \eta_2} = 0 \quad (5.34)$$

$$\lim_{\eta_1, \eta_2 \rightarrow 0} L_{\Phi}^{\eta_1, \eta_2} = 0 \quad (5.35)$$

を満たす。そこで、式 (5.7) の L_{σ}^X と L_{γ}^X 及び式 (5.8) の L_{σ}^T と L_{γ}^T について、

$$L_{\sigma}^X, L_{\gamma}^X \leq \max\{\|a\|, \|bR^{-1}b^T\|\} + L_{\Theta}^{\eta_1, \eta_2} \quad (5.36)$$

$$L_{\sigma}^T, L_{\gamma}^T \leq \max\{\|a\|, \|Q\|\} + L_{\Phi}^{\eta_1, \eta_2} \quad (5.37)$$

であるから、解軌道が原点に近いほどリプシッツ係数が小さくなることが明らかになる。他のリプシッツ係数についても、同じ解析も行われる。

以上の議論によって、制御期間が短いほどと原点に近いほど、十分条件 (5.13) が満たされやすくなるということが分かる。

Chapter 6

数値例

6.1 非線形最適レギュレータ問題数値例

4.1 で提案したニューラルネットワークによる非線形最適レギュレータ構成法の数値例を示す.

非線形システム方程式

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad ,$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + (1 - \alpha x_1^2)x_2 + u \quad ,$$

ここで $\alpha = 3.0$

2次形式評価関数

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x_1^2 + x_2^2 + u^2) dt \quad .$$

が与えられたとする. この非線形制御問題に対して, ニューラルネットワークによる非線形最適レギュレータを設計する. ここでは, 入力層に2個のユニット, 中間層に8個のユニット, 出力層に2個のユニットがあるという3階層ニューラルネットワークを構成する. すなわち $n = 2, q = 8$. さらにこの例について十分大きな終端時間をとって, $t_f = 30$ とする. 学習係数は $c_1 = c_2 = 0.07$ で, $T = 1$ とする. 状態変数 x_1 と x_2 はこのニューラルネットワークの入力として, これらの状態変数は四角形

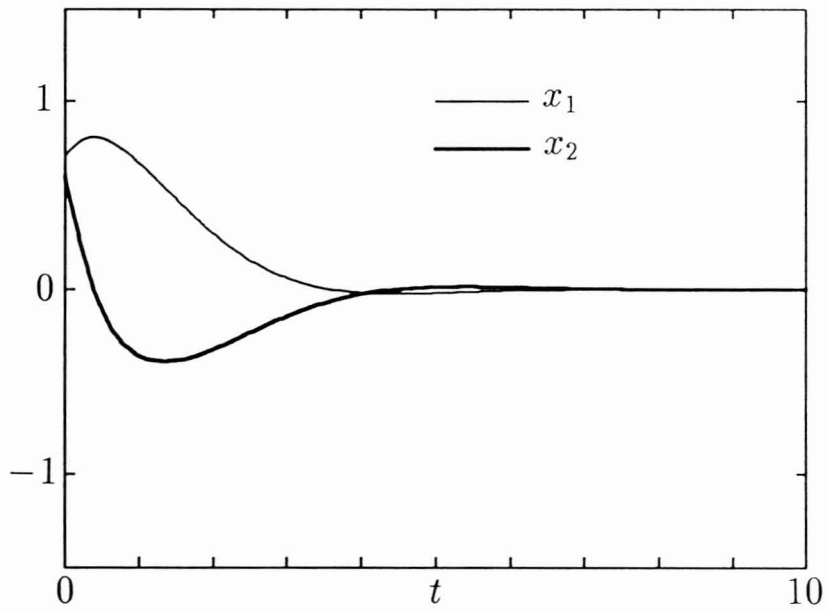
$$-2 \leq x_1 \leq 2$$

$$-2 \leq x_2 \leq 2$$

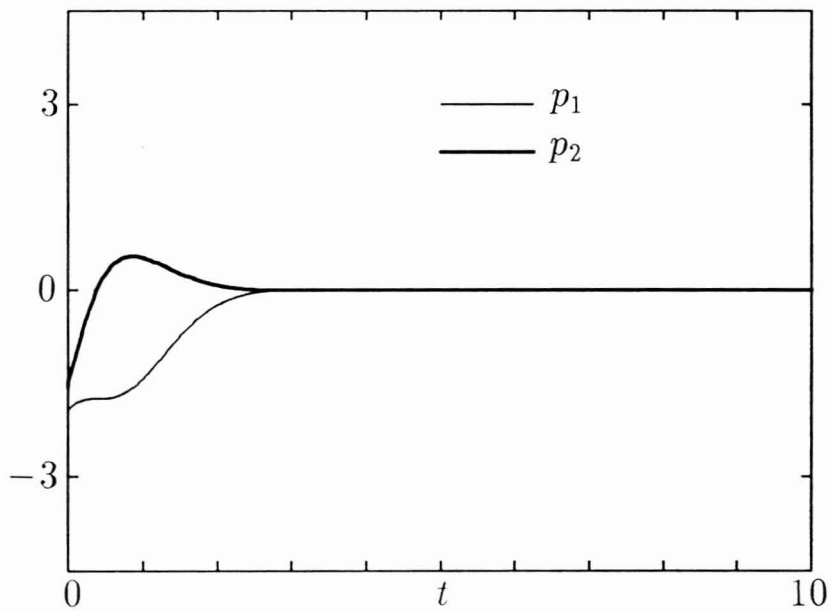
の中にある. 4.1 によって, 下のような4対の初期値点 $x_1(0)$ と $x_2(0)$ が選ばれる.

$$[-2, -2], [-2, 2], [2, -2], [2, 2] \quad .$$

微分方程式 (4.12) と (4.13) を解くと、4 対の x と h の軌道がとられる。これらの軌道に沿って、状態変数 x を選択し、その x に相応の h の正規化された \hat{h} を用いて、ニューラルネットワークの学習を行う。図 6.1 と図 6.2 は異なる初期値で状態変数 x とニューラルネットワークの出力 p を示す。図 6.1 の場合には、初期値点は $[0.7, 0.6]$ で、評価関数値は 1.02897 (1.10775 は線形フィードバックの場合) である。この評価関数値は微分方程式 (4.12) と (4.13) から求めた評価関数値 1.02886 とほとんど同じである。この例については、中間層に 8 個のユニットでずいぶん良い精度が達成した。中間層のユニット数をもっと増加すれば、より良い精度が達成できる。必要な近似の精度を達成するために、実験で適当な中間層のユニットの数を決めなければならない。図 6.2 の場合には、評価関数値は 1.20487 で、線形フィードバックの 1.41499 より小さい。さらにパラメータ α は -200 から 200 に変化しても、システムはまだ安定しているのが明らかになった。

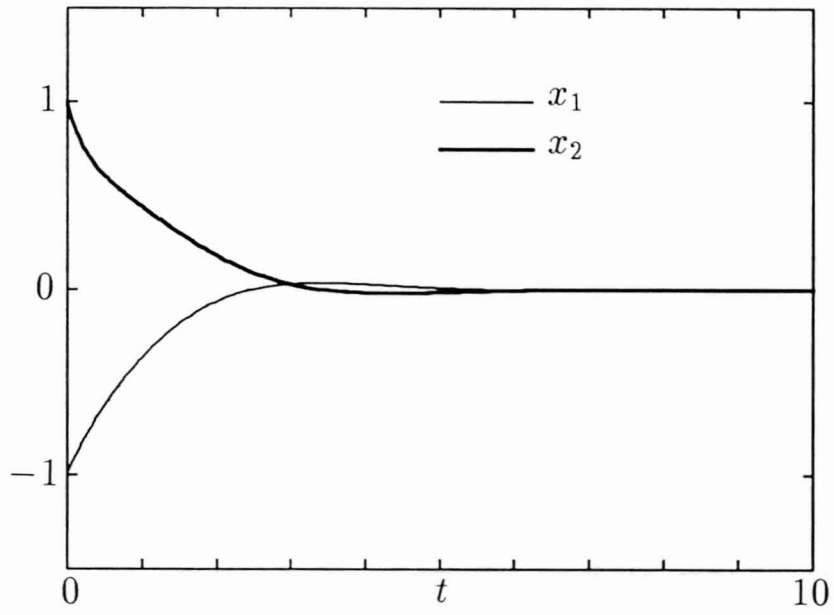


(a) 状態変数

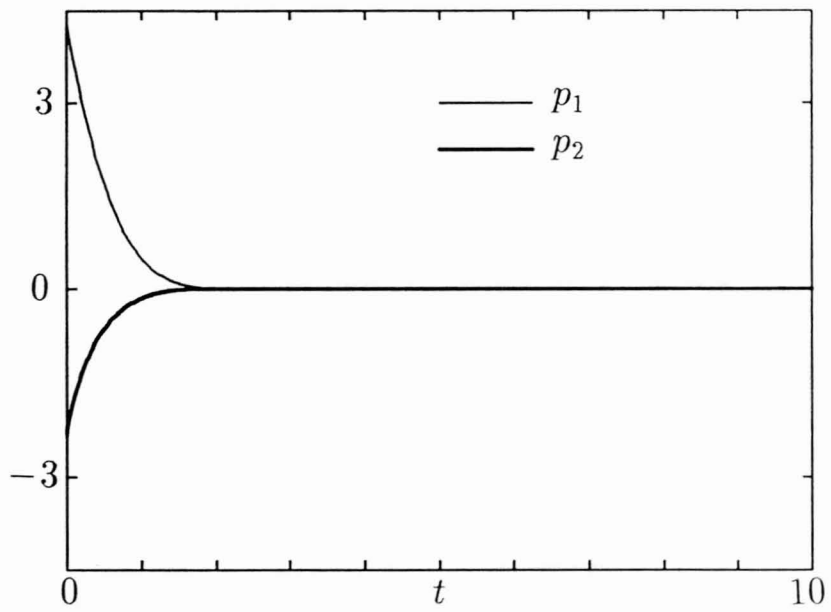


(b) 非線形写像 p

図 6.1: 数值例 1



(a) 状態変数



(b) 非線形写像 p

図 6.2: 数値例 2

6.2 終端点拘束問題の数値例

終端時刻が固定の場合と未知の場合について、4.2 と 4.3 に述べた計算アルゴリズムの有効性を検証するために、次の数値シミュレーションを行う。

はじめに終端時刻固定の 2 次非線形最適制御問題を考える。

システム方程式：

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad x_1(0) = 1$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + (1 - x_1^2)x_2 + u \quad x_2(0) = 0$$

評価関数：

$$J = \frac{1}{2} \int_0^5 (x_1^2 + x_2^2 + u^2) dt$$

$$\text{場合 1) } \psi(5) = \begin{pmatrix} x_1(5) \\ x_2(5) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{場合 2) } \psi(5) = -1 - x_1(5) + x_2(5) = 0$$

$$\text{場合 3) } \psi(5) = \frac{2}{5}x_1^2(5) - x_2(5) + 1 = 0$$

図 6.3, 図 6.4 と図 6.5 はそれぞれアルゴリズム 2 を用いた結果を示す。ここで $u^{(0)} = 0.8$ とした。評価関数値はそれぞれ 2.0556, 1.6857 および 1.6866 であった。図 6.3, 図 6.4, 図 6.5 に示すように終端拘束は十分満たされた。場合 2 では 4 回の繰返し計算で、終端誤差は 1.0×10^{-4} となった。同じ計算精度を実現するには、2 次アルゴリズムの第 2 変分法と 1 次アルゴリズムの勾配法ではそれぞれ 9 回と 29 回の繰返し計算が必要であった。図 6.6 は場合 2 の収束状況を他の方法と比較して示した。場合 1 と場合 3 についても、同様の結果を得た。アルゴリズム 1 を用いても同じ計算を行った。その結果、場合 3 についてはアルゴリズム 2 より収束はやゝ遅くなった。

終端時刻未知の問題について、4.3 で提案したアルゴリズムを用いて、シミュレーションを行った。前のシミュレーションと同じシステムを使ったが、評価関数は

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x_1^2 + x_2^2 + u^2) dt$$

とした。

前の終端条件の三つの場合について、求められた最適終端時刻はそれぞれ 3.5196, 4.3157, 5.1080 であった。このとき評価関数値は 1.8945, 1.6758, 1.6859 となった。図 6.7 は場合 2 の t_f の収束状況を示す。

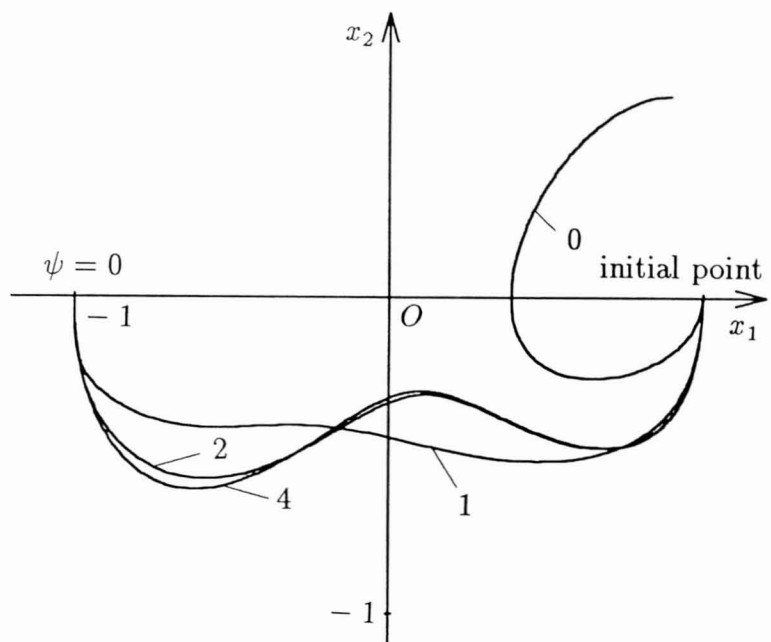


図 6.3: SRTM による状態軌道 (場合 1)

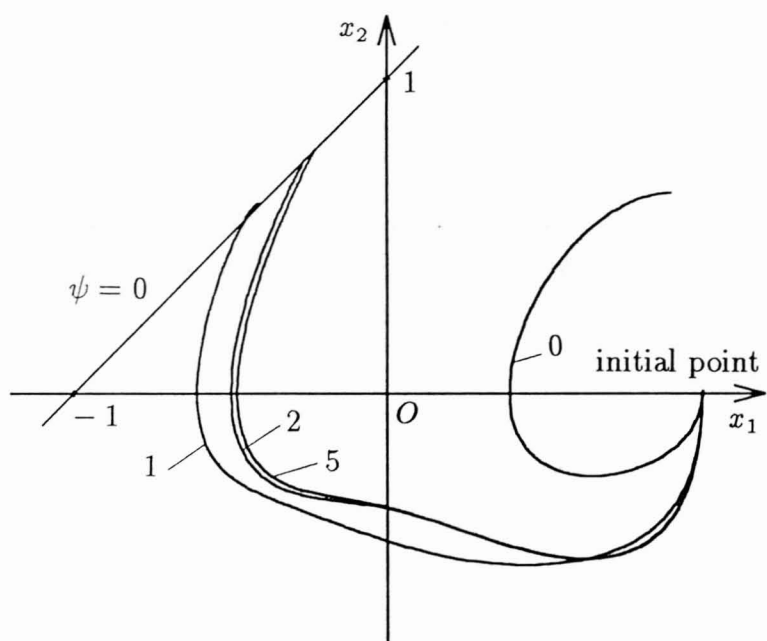


図 6.4: SRTM による状態軌道 (場合 2)

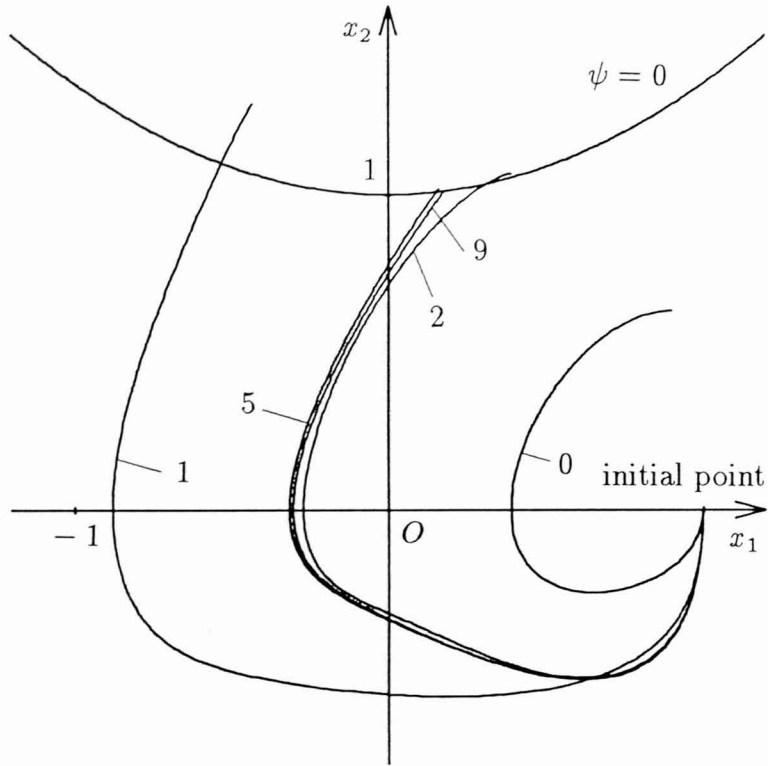


図 6.5: SRTM による状態軌道 (場合 3)

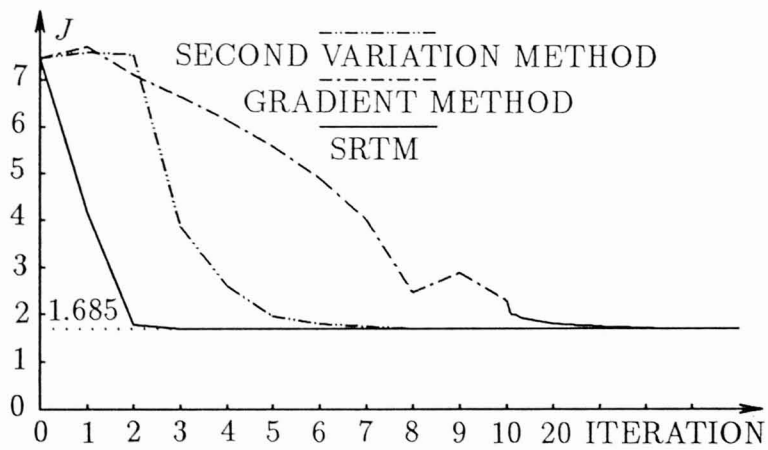


図 6.6: SRTM, 勾配法と第 2 変分法による収束の比較

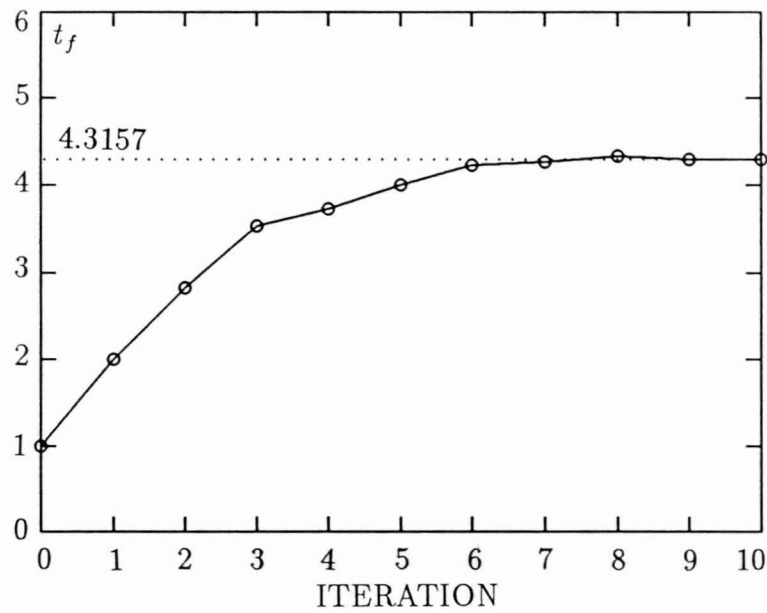


図 6.7: t_f の収束状況 (場合 2)

6.3 制御量制約問題の数値例

4.3.3 で提案したアルゴリズムを検証するため上と同じシステムを考える. ただし, 次のような制御量制約:

$$|u(t)| \leq 1$$

と評価関数:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^3 (x_1^2 + x_2^2 + 0.5 u^2) dt$$

が与えられている.

場合 1)

$$x_1(0) = 1.0$$

$$x_2(0) = 0.0$$

$$\psi(3) = x_1(3) + x_2(3) - 1 = 0$$

場合 2)

$$x_1(0) = 1.1$$

$$x_2(0) = 0.0$$

$$\psi(3) = 0.3x_1^2(3) - x_2(3) + 1 = 0$$

場合1について、図6.8、図6.9は合成リカッチ変換法の計算法を用いた結果を示す。ここで、評価関数値は $J = 1.4720$ 、終端誤差は $\psi(3) = 0.000041$ であった。7回の繰り返し計算で、充分収束することを確認した。場合2について、計算結果は図6.10と図6.11に示す。この場合、非線形の終端拘束をもっており、それにも拘らず8回の繰り返し計算だけで、充分収束した。このとき、評価関数は $J = 1.5528$ 、終端誤差は $\psi(3) = 0.000058$ であった。シミュレーションの結果より、本アルゴリズムの良好な収束性と計算精度をもつことが明らかになった。

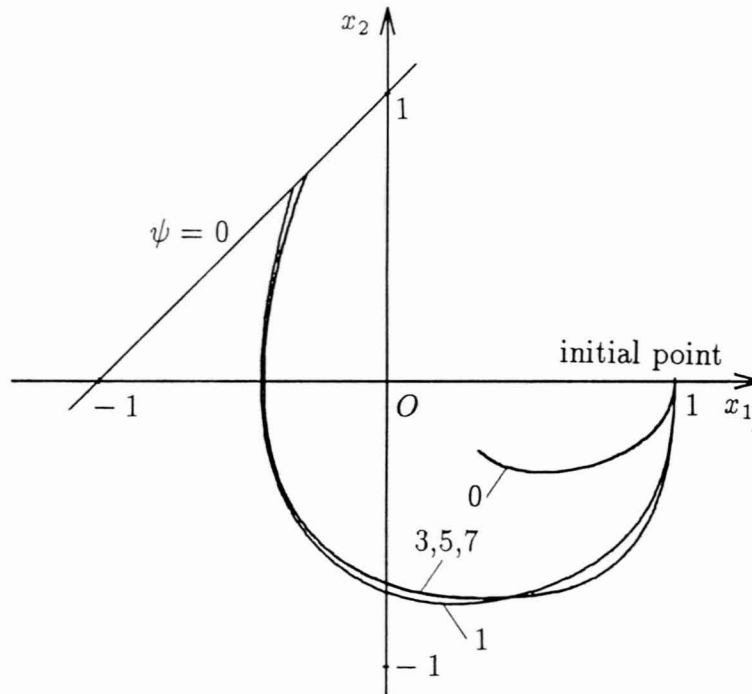


図 6.8: SRTM による状態軌道 (場合1)

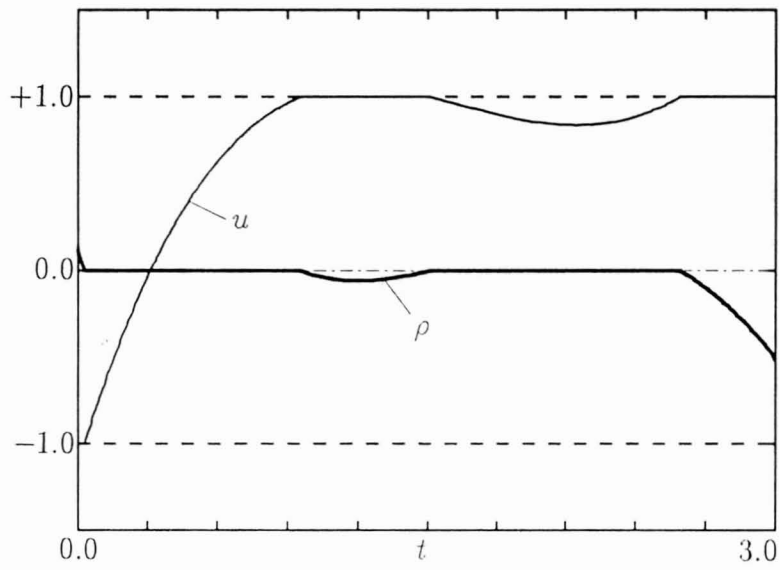


図 6.9: 制御量 u と修正量 ρ (場合 1)

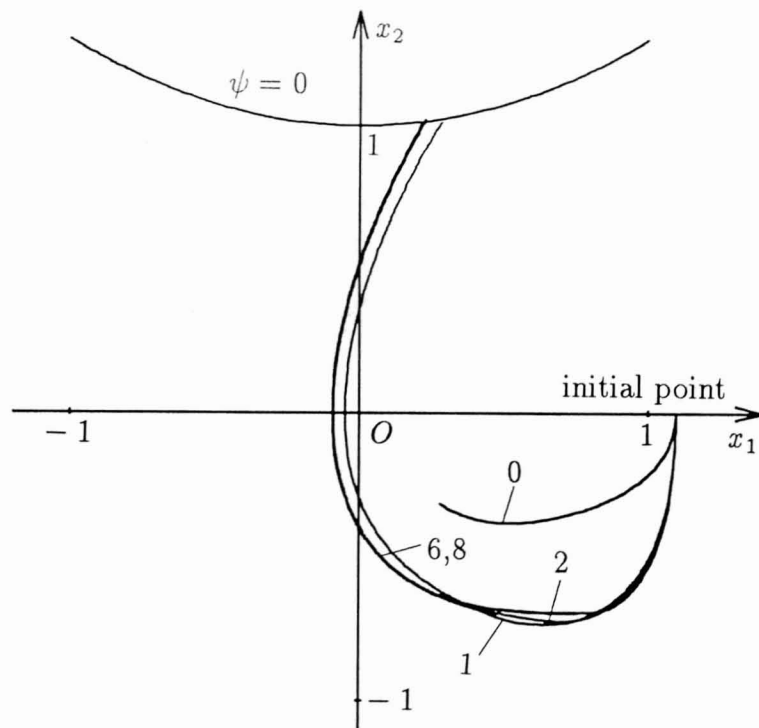


図 6.10: SRTM による状態軌道 (場合 2)

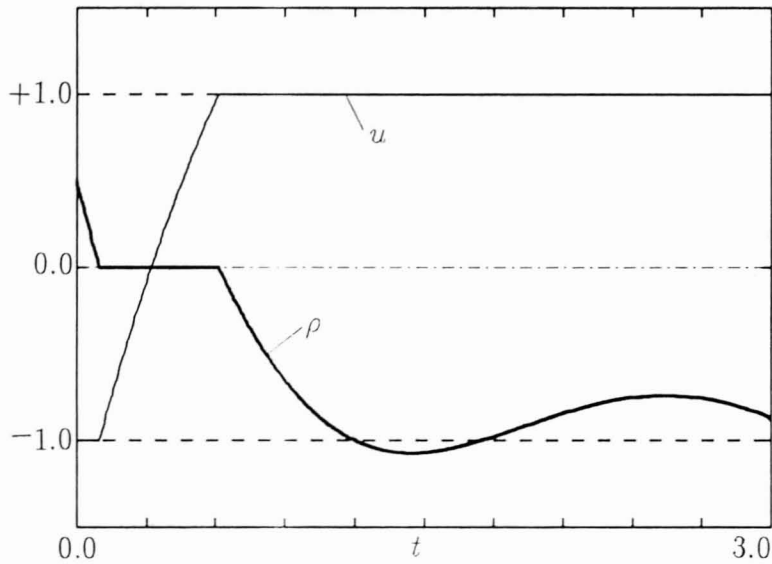


図 6.11: 制御量 u と修正量 ρ (場合 2)

6.4 マニピュレータ制御への応用数値例

4.5 のアルゴリズムを利用してマニピュレータの最適軌道制御への応用を試みる. n 自由度のマニピュレータの運動方程式は一般に次式で記述できる.²⁷⁾

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) + F(\dot{q}) = \tau \quad (6.1)$$

ここで, $q \in R^n$ はジョイント変数ベクトル, $M(q) \in R^{n \times n}$ はアームの慣性行列, $C(q, \dot{q}) \in R^n$ は遠心力とコリオリ力を表すベクトル, $G(q) \in R^n$ は重力の影響を表すベクトル, $F \in R^n$ は摩擦力ベクトル, $\tau \in R^n$ はジョイントトルクである. $x = [q, \dot{q}] \in R^{2n}$ を定義すると, 式 (6.1) は式 (4.106) の形に書ける. そして, SRTM 法を利用して, ある終端拘束をもつマニピュレータの最適軌道制御を実現できる. ここで例として図 6.12 の垂直平面内 2-リンクマニピュレータを考える. 各リンクは均質で, 質量は m_1, m_2 , 長さは $2l_1, 2l_2$ で, また関節の粘性摩擦係数は d_1, d_2 とする. 時計回り方向に第 1 リンクにトルクに τ_1 が, 第 1 リンクと第 2 リンクの間にはトルク τ_2 が働くものとする. このマニピュレータの最適軌道と最適制御量を計算する. このマニピュレータの運動方程式は式 (6.2) と式 (6.3) のようになる¹⁰⁾.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

$$\begin{bmatrix} J_1 + J_2 + 2\beta \cos x_2 & J_2 + \beta \cos x_2 \\ J_2 + \beta \cos x_2 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix}$$

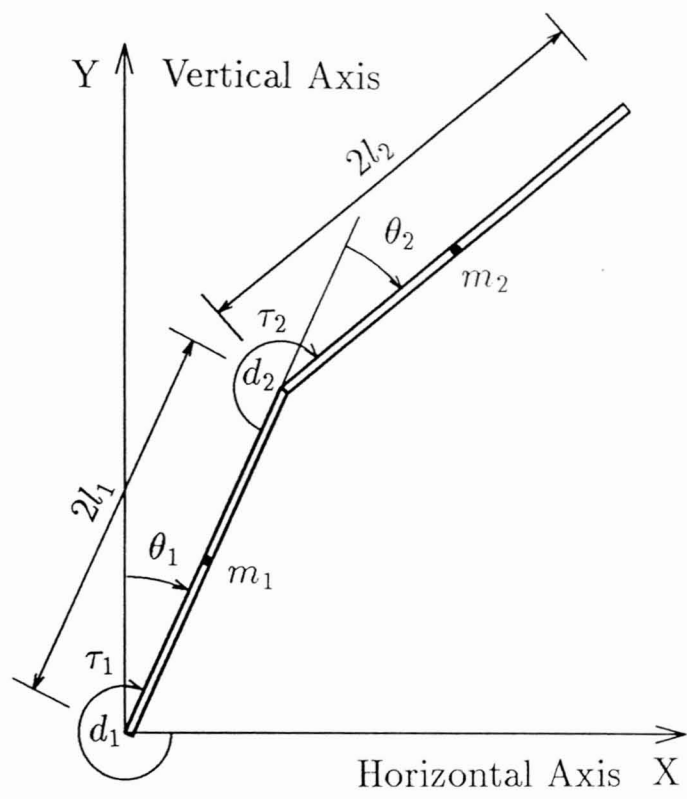


図 6.12: 平面内 2-リンクマニピュレータ

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} -\beta(2x_3x_4 + x_4^2) \sin x_2 \\ \beta x_3^2 \sin x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \\
& - \begin{bmatrix} (m_1 + 2m_2)l_1g \sin x_1 + m_2l_2g \sin(x_1 + x_2) \\ m_2l_2g \sin(x_1 + x_2) \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.3}$$

ここで

$$J_1 = \frac{1}{3}m_1l_1^2 + (m_1 + 4m_2)l_1^2$$

$$J_2 = \frac{1}{3}m_2l_2^2 + m_2l_2^2$$

$$\beta = 2m_2l_1l_2$$

$$x_1 = \theta_1, \quad x_2 = \theta_2, \quad x_3 = \dot{\theta}_1, \quad x_4 = \dot{\theta}_2$$

であり、 θ_1, θ_2 は図 6.12 に示される各リンクの角度である。式 (6.3) より

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} &= \mathcal{M}^{-1}(x_2) \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \\
& \quad + \mathcal{M}^{-1}\{\mathcal{G}(x_1, x_2) - \mathcal{C}(x_2, x_3, x_4) + \mathcal{D} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\} \\
&= \mathcal{B}(x)u + \mathcal{A}(x)
\end{aligned} \tag{6.4}$$

となる。ここで

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} J_1 + J_2 + 2\beta \cos x_2 & J_2 + \beta \cos x_2 \\ J_2 + \beta \cos x_2 & J_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} (m_1 + 2m_2)l_1g \sin x_1 + m_2l_2g \sin(x_1 + x_2) \\ m_2l_2g \sin(x_1 + x_2) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} -\beta(2x_3x_4 + x_4^2) \sin x_2 \\ \beta x_3^2 \sin x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}(x) = \mathcal{M}^{-1}, \quad u = [\tau_1 \quad \tau_2]^T$$

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{M}^{-1}\{\mathcal{G}(x_1, x_2) - \mathcal{C}(x_2, x_3, x_4) + \mathcal{D} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\}$$

式 (6.2) と式 (6.4) を式 (4.106) の形に書くと

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \\ x_{40} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

ここで, $x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40}$ はそれぞれマニピュレータの各リンクの角度と角速度の初期値であり,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \mathcal{A}_{X_1}^T|_{x=0}, \quad A_4 = \mathcal{A}_{X_2}^T|_{x=0}$$

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \mathcal{M}^{-1}$$

$$X_1 = [x_1, x_2]^T, \quad X_2 = [x_3, x_4]^T$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = C - A_3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - A_4 \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

さらに数値計算のため

$$m_1 = m_2 = 1, \quad l_1 = l_2 = 1, \quad g = 9.8$$

$$d_1 = d_2 = 1$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = 0, \quad F = 0$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} x_{1d} \\ x_{2d} \end{bmatrix}$$

を与える。 いろいろな初期値と終端拘束条件について, 提案したアルゴリズムによりこの問題を計算した。

場合 1) 図 6.13 は $t_f = 3.0$, $x(0) = [-40^\circ, -20^\circ, 0, 0]^T$, $x_{1d} = 50^\circ$, $x_{2d} = 90^\circ$ のときに SRTM で 10 回の繰り返し計算後におけるマニピュレータの動作を示す。 このとき終端拘束誤差は 0.000029 で, 評価関数値は 230.3 であった。 図 6.14 はその場合の評価関数値と終端誤差の収束状況を示す。

場合 2) 図 6.15 は $t_f = 2.5$, $x(0) = [-40^\circ, 0^\circ, 0, 0]^T$, $x_{1d} = 60^\circ$, $x_{2d} = 0^\circ$ のときに SRTM で 6 回

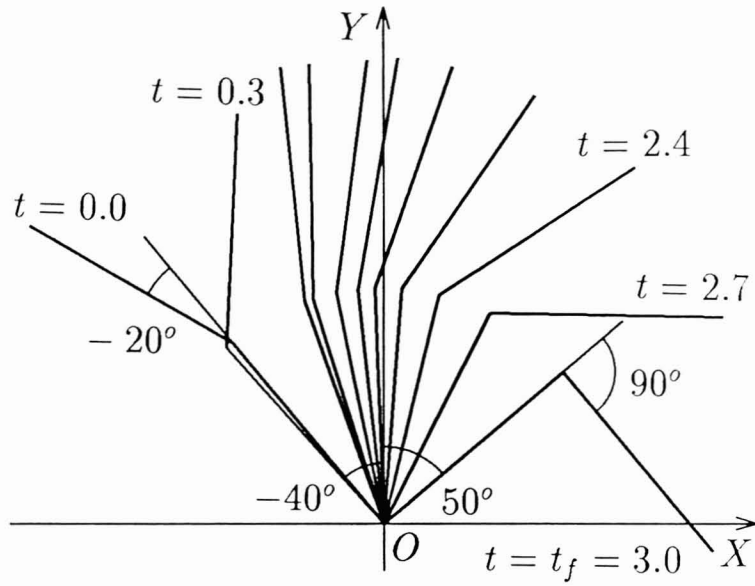


図 6.13: SRTM によるマニピュレータ動作 (場合 1)

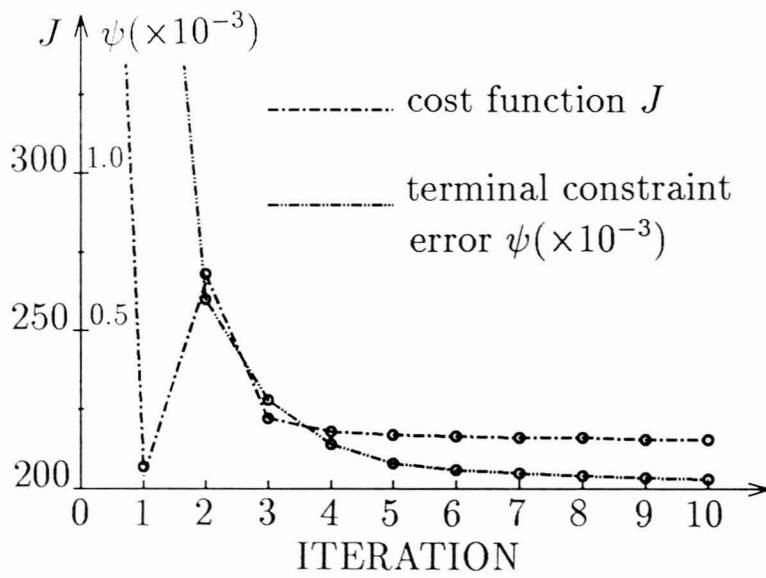


図 6.14: 終端拘束誤差 ψ と評価関数 J の収束 (場合 1)

の繰り返し計算後におけるマニピュレータの動作を示す。この場合、終端拘束誤差は 0.000892 で、評価関数値は 1196.5 であった。

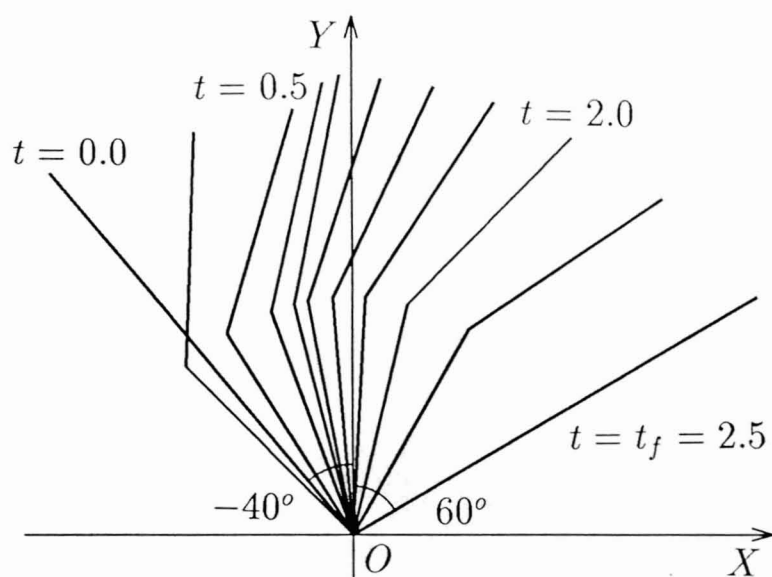


図 6.15: SRTM によるマニピュレータ動作 (場合 2)

場合 3) 図 6.16 は $t_f = 4.0$, $x(0) = [-20^\circ, -30^\circ, 0, 0]^T$, $x_{1d} = 30^\circ$, $x_{2d} = 30^\circ$ のときに SRTM で 5 回の繰り返し計算後におけるマニピュレータの動作を示す。この場合終端拘束誤差は 0.00066 で、評価関数値は 233.9 であった。結論

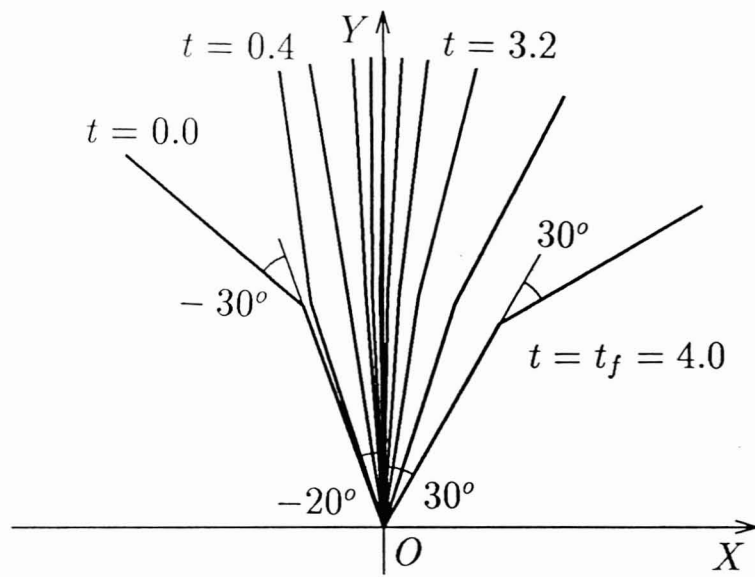


図 6.16: SRTM によるマニピュレータ動作 (場合 3)

Chapter 7

結論

本論文では、筆者は非線形最適制御の数値計算法の研究を行い、非線形最適レギュレータ問題や終端拘束をもつ非線形問題や制御量制約をもつ問題や終端時刻未知問題などについて、ニューラルネットワークと合成リカッチ変換法を導入して、新しい計算アルゴリズムを提案した。

第3章では、終端制約のある問題を解くために導入する合成リカッチ変換法を紹介し、さらに、この合成リカッチ変数の準正定性を証明した。

第4章の4.1では、リカッチ変換式を用いて構成した x と h に関する微分方程式より導かれた最適非線形フィードバック則を実現するために、優れた非線形写像を近似する能力をもつ階層型ニューラルネットワークでこの非線形制御則の近似解を構成する方法を示し、階層型ニューラルネットワークによる非線形最適レギュレータの構成法を提案した。シミュレーションによって、この非線形最適レギュレータ構成法の有効性を確認した。

第4章の4.2、4.3、4.4、4.5では、終端拘束をもつ問題や制御量制約をもつ問題や終端時刻未知問題などについて、合成リカッチ変換法を導入して、新しい計算アルゴリズムを提案した。合成リカッチ変換法を用いる2次形式最適制御問題の数値計算法の特徴として、本法はシステム方程式中の非線形関数の1階微分だけを使って、原理的には1階微分を使う1次アルゴリズムに属するため、アルゴリズムが簡単で、いくつかの数値シミュレーションを行った限りでは収束は勾配法などの1次アルゴリズムより、ずっと速い収束が得られたばかりでなく、2階微分を使う2次アルゴリズム程度に速く、またオーバーフロー対策を必要としなかった。同時に、終端誤差も十分小さいことが確認された。本手法を2-リンクマニピュレータの最適制御問題に応用したが、安定した速い収束と十分小さな終端誤差を得ることができた。いろいろな数値例とマニピュレータ制御問題へのシミュレーションの結果などから、本手法の有効性と実用性が確認された。第5章では、合成リカッチ変換法の収束性を考察し、その収束の十分条件を導いた。

Chapter 8

謝辞

博士後期課程において、また本論文の作成にあたり、ご指導を賜りました信州大学工学部情報工学科山浦弘夫教授と師玉康成助教授に深甚の謝意を表します。

中野康明教授、中村八東教授におかれましては、本論文を通読していただくとともに有益なご助言、討論を賜り厚くお礼申し上げます。

さらに日本留学のあいだ、いろいろお世話になった日本の友人たちに深く感謝いたします。

Appendix A

付録

A.1 記号

(1) m 次元ベクトル関数 $f(x)$ と n 次元ベクトル変数 x を

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^m \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と表す.

(2) 変数 x に関する関数 f の偏微分は

$$\frac{\partial}{\partial x} f = f_x$$

と表す.

(3) n 次元ベクトル変数 x に関するスカラー関数 h の偏微分は

$$h_x = \begin{pmatrix} h_{x_1} \\ \vdots \\ h_{x_n} \end{pmatrix}$$

と表す.

(4) n 次元ベクトル変数 x に関するベクトル関数 g の偏微分は

$$g_x = \begin{pmatrix} g_{x_1}^1 & \cdots & g_{x_1}^m \\ \vdots & & \vdots \\ g_{x_n}^1 & \cdots & g_{x_n}^m \end{pmatrix}$$

と表す.

(5) ベクトル変数 x に関する行列 $A \in R^{p \times q}$ の微分は次のように定義する.

$$A_x = \begin{pmatrix} A_{x_1}^T \\ \vdots \\ A_{x_n}^T \end{pmatrix}$$

ここで

$$A_{x_i} = \begin{pmatrix} a_{x_i}^{11} & \cdots & a_{x_i}^{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{x_i}^{p1} & \cdots & a_{x_i}^{pq} \end{pmatrix}$$

(6) 添字 T はベクトルあるいは行列の転置を表す.

(7) 環 R 上の任意の二つのマトリクス $A \in R^{m \times n}$ と $B \in R^{p \times q}$ について, クロネッカ積 (あるいは直積) をつぎのように定義する.

$$A \otimes B \equiv \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in R^{mp \times nq}$$

つまりクロネッカ積 $A \otimes B$ は, $a_{ij}B$ を (i, j) ブロックとするブロックマトリクスである. クロネッカ積については, 参考文献 [28] を参照されたい.

A.2 線形最適制御問題の合成リカッチ微分方程式とその補助方程式の導出

まず微分方程式 (3.26) と (3.28) を書き直して

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 R^{-1} B_2^T \\ -Q_2^T & -A_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_2 & -B_1 R^{-1} B_1^T \\ -Q_3 & -A_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_3 & -B_2 R^{-1} B_2^T \\ -Q_1 & -A_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_4 & -B_2 R^{-1} B_1^T \\ -Q_2 & -A_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

が得られる。合成リカッチ変換式 (3.32) を用いて式 (A.1) と式 (A.2) のベクトル $[y^T, \mu^T]^T$ を入れ替えると

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\mu} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 R^{-1} B_2^T \\ -Q_2^T & -A_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} A_2 & -B_1 R^{-1} B_1^T \\ -Q_3 & -A_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 R^{-1} B_2^T \\ -Q_2^T & -A_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_3 & -B_2 R^{-1} B_2^T \\ -Q_1 & -A_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} A_4 & -B_2 R^{-1} B_1^T \\ -Q_2 & -A_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_3 & -B_2 R^{-1} B_2^T \\ -Q_1 & -A_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

となる。式 (3.32) の両辺を t で微分すると

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{K}_1 & \dot{K}_2 \\ \dot{K}_3 & \dot{K}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{g}_1 \\ \dot{g}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

が得られる。式 (A.3) と式 (A.4) を、式 (A.5) の $[y^T, \mu^T]^T$ と $[z^T, \lambda^T]^T$ に代入すると次の等式が得られる。

$$\Theta_1 = \Theta_2 \quad (\text{A.6})$$

ここで

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 R^{-1} B_2^T \\ -Q_2^T & -A_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_2 & -B_1 R^{-1} B_1^T \\ -Q_3 & -A_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 R^{-1} B_2^T \\ -Q_2^T & -A_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_2 = & \begin{bmatrix} \dot{K}_1 & \dot{K}_2 \\ \dot{K}_3 & \dot{K}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_4 & -B_2 R^{-1} B_1^T \\ -Q_2 & -A_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} A_3 & -B_2 R^{-1} B_2^T \\ -Q_1 & -A_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & -B_2 R^{-1} B_2^T \\ -Q_1 & -A_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{g}_1 \\ \dot{g}_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

等式 (A.6) の両辺が変数ベクトル $[z^T, \lambda^T]^T$ に無関係に成り立つことを条件とすると、微分方程式 (3.33) と (3.34) が導かれる。

A.3 合成リカッチ変換式のリカッチ変数の性質について

まず, 行列 \mathcal{K} を次のように定義する.

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_1 & \mathcal{K}_2 \\ \mathcal{K}_3 & \mathcal{K}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{K}_2 & \bar{K}_1 \\ -\bar{K}_4 & \bar{K}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

この行列 \mathcal{K} を使って, 微分方程式 (3.33) を書き直すと

$$\begin{aligned} -\dot{\mathcal{K}} = & \begin{bmatrix} -B_1 R^{-1} B_1^T & -A_2 \\ -A_2^T & Q_3 \end{bmatrix} + \mathcal{K} \begin{bmatrix} -A_1^T & Q_2 \\ B_2 R^{-1} B_1^T & A_4 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} -A_1 & B_1 R^{-1} B_2^T \\ Q_2^T & -A_4^T \end{bmatrix} \mathcal{K} + \mathcal{K} \begin{bmatrix} A_3 & -B_2 R^{-1} B_2^T \\ -Q_1 & -A_3^T \end{bmatrix} \mathcal{K} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

になる. さらに, 終端条件式 (3.35) から (3.38) までを書き直して,

$$\mathcal{K}_1(t_f) = 0 \quad (\text{A.9})$$

$$\mathcal{K}_2(t_f) = -D_1^{-1} D_2 \quad (\text{A.10})$$

$$\mathcal{K}_3(t_f) = -D_2^T D_1^{-T} = -(D_1^{-1} D_2)^T \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_4(t_f) &= F_3 - D_2^T D_1^{-T} F_2 - F_2^T D_1^{-1} D_2 + D_2^T D_1^{-T} F_1 D_1^{-1} D_2 \\ &= [-(D_1^{-1} D_2 \quad I) \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ F_2^T & F_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D_1^{-1} D_2 \\ I \end{bmatrix}] \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$(\text{A.13})$$

になる. 式 (A.9)~(A.12) から, $\mathcal{K}(t_f)$ が対称行列ということが明らかになる. 線形微分方程式 (A.8) は対称であるから, \mathcal{K} の定義式 (A.7) によって

$$\bar{K}_1 = \bar{K}_2 = \bar{K}_3^T = -\bar{K}_4^T \quad (\text{A.14})$$

が簡単に得られる.

また, 微分方程式 (A.8) を展開すると, \mathcal{K}_1 すなわち \bar{K}_2 についてのリカッチ型非線形微分方程式 (A.15) が得られる.

$$\begin{aligned} -\dot{\bar{K}}_2 &= B_1 R^{-1} B_1^T - \bar{K}_1 B_2 R^{-1} B_1^T - B_1 R^{-1} B_2^T \bar{K}_1 + \bar{K}_1 B_2 R^{-1} B_2^T \bar{K}_1^T \\ &\quad - \bar{K}_2 A_1^T - A_1 \bar{K}_2 + \bar{K}_1 A_3 \bar{K}_2 + \bar{K}_2 A_3^T \bar{K}_1^T - \bar{K}_2 Q_1 \bar{K}_2 \\ &= \Gamma R^{-1} \Gamma^T + \Delta \bar{K}_2 + \bar{K}_2 \Delta^T + \bar{K}_2 Q_1 \bar{K}_2 \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$K_2(t_f) = 0 \quad (\text{A.16})$$

ここで,

$$\Gamma = B_2 - K_1 B_2, \quad \Delta = -A_1 + K_1 A_3$$

参考文献 [28] の補題 13.5 により, 微分方程式 (A.15) の解が $0 \leq t \leq t_f$ で存在すれば, $K_2(t)$ が実対称行列である. さらに,

$$\Gamma R^{-1} \Gamma^T \geq 0, \quad K_2(t_f) = 0$$

であるから, $K_2(t)$ は準正定, t の減少に対して単調非減少である. すなわち,

$$K_2(t_1) \leq K_2(t_2) \quad t_f \geq t_1 \geq t_2 \geq 0 \quad (\text{A.17})$$

同様に, 微分方程式 (A.8) を展開すると, K_4 すなわち K_3 についてのリカッチ型非線形微分方程式 (A.18) が得られる.

$$\begin{aligned} -\dot{K}_3 &= Q_3 + K_1^T Q_2 + Q_2^T K_2 + K_1^T Q_1 K_1 \\ &\quad + K_3 A_4 + K_3 A_3 K_1 + A_4^T K_3 + K_1^T A_3^T K_3 - K_3 B_2 R^{-1} B_2^T K_3 \\ &= \Upsilon Q \Upsilon^T + K_3 \Lambda + \Lambda^T K_3 + K_3 B_2 R^{-1} B_2^T K_3 \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

$$K_3(t_f) = [-D_2^T D_1^{-T} \quad I] F \begin{bmatrix} -D_1^{-1} D_2 \\ I \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

ここで,

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} K_1 \\ I \end{bmatrix}, \quad \Lambda = A_4 + A_3 K_1$$

K_2 の場合と同じように, 微分方程式 (A.18) の解が $0 \leq t \leq t_f$ で存在すれば, $K_3(t)$ が実対称行列である. さらに,

$$\Upsilon Q \Upsilon^T \geq 0, \quad K_3(t_f) \geq 0$$

であるから, $K_3(t)$ も準正定, t の減少に対して単調非減少である. すなわち,

$$K_3(t_1) \leq K_3(t_2) \quad t_f \geq t_1 \geq t_2 \geq 0 \quad (\text{A.20})$$

A.4 x と h に関する微分方程式の導出

式 (4.6) を式 (4.1) に代入し

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BR^{-1}B^T\lambda + C(x(t)) \quad (\text{A.21})$$

となる. リカッチ変換式 (4.10) を式 (A.21) に代入すると

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) - BR^{-1}B^TKx - BR^{-1}B^Th + C(x(t)) \\ &= (A - BR^{-1}B^TK)x - BR^{-1}B^Th + C(x) \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

さらに, 式 (4.10) の両辺を t について微分して,

$$\dot{\lambda} = K\dot{x} + \dot{h} \quad (\text{A.23})$$

となる. 式 (A.22), 式 (4.8) を式 (A.23) に代入して

$$\begin{aligned} -A^T(Kx + h) - Qx - C_x(Kx + h) &= \\ K(A - BR^{-1}B^TK)x - KBR^{-1}B^Th + KC(x) + \dot{h} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

となり, 整理すると

$$\begin{aligned} [\dot{h} + (A^T - KBR^{-1}B^T)h + KC + C_x(Kx + h)] \\ + [KA + A^TK + Q - KBR^{-1}B^TK]x = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

となる. 式 (A.25) を x と無関係に成立させるためには,

$$-KA - A^TK - Q + KBR^{-1}B^TK = 0 \quad (\text{A.26})$$

$$\dot{h} = -(A - BR^{-1}B^TK)^T h + KC + C_x(Kx + h) \quad (\text{A.27})$$

となることが必要である. 式 (4.16) ~ (4.19) を用いて, 式 (A.22) と (A.27) から, 式 (4.12) と式 (4.13) が導かれる.

また, 変数 $h(t)$ の終端条件については, レギュレータ問題として, $x(\infty) = 0$ が要求されるから,

$$h(\infty) = \lambda(\infty) - Kx(\infty) = 0$$

が得られる.

A.5 ニューラルネットワーク結合荷重の修正則の導出

最急降下手法を用いて、

$$\Delta a_{i,j} = -c_1 \frac{\partial E}{\partial a_{i,j}} \quad (\text{A.28})$$

$$\Delta b_{i,j} = -c_2 \frac{\partial E}{\partial b_{i,j}} \quad (\text{A.29})$$

$b_{i,j}$ は出力層の結合荷重であるから、

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial b_{i,j}} &= \frac{\partial E}{\partial \hat{p}_i} \frac{\partial \hat{p}_i}{\partial b_{i,j}} \\ &= -(\hat{h}_i - \hat{p}_i) \phi' \left(\sum_{l=1}^q b_{i,l} z_l \right) z_j, \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

シグモイド関数 $\phi(\cdot)$ が

$$\phi(y) = \frac{1 - e^{-y/T}}{1 + e^{-y/T}}, \quad (\text{A.31})$$

であるから、その微分は

$$\phi'(y) = \frac{(1 - \phi(y)^2)}{2T}. \quad (\text{A.32})$$

で表される。式 (A.29), (A.30), (A.32), (4.24) と (4.25) から式 (4.28) が導かれる。

$a_{i,j}$ は中間層の結合荷重であるから、

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a_{i,j}} &= \frac{\partial E}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a_{i,j}} \\ &= \sum_{l=1}^n \frac{\partial E_l}{\partial \hat{p}_l} \frac{\partial \hat{p}_l}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial a_{i,j}} \\ &= -\sum_{l=1}^n (\hat{h}_l - \hat{p}_l) \phi' \left(\sum_{m=1}^q b_{i,m} z_m \right) b_{i,l} \phi' \left(\sum_{m=1}^n a_{i,m} x_m \right) x_j, \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

ここで $E_l = (\hat{h}_l - \hat{p}_l)^2/2$.

同様に、式 (A.28), (A.32), (A.33), (4.24) と (4.25) を使って、(4.29) が導かれる。

A.6 非線形最適制御問題の合成リカッチ微分方程式と補助方程式の導出

(4.53) 式と (4.54) 式の導出について, まず微分方程式 (4.46) と (4.48) を書き直して

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\mu} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 R^{-1} B_2^T \\ -Q_2^T & -A_4^T - C_{2z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \mu \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} A_2 & -B_1 R^{-1} B_1^T \\ -Q_3 & -A_2^T - C_{1z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_3 & -B_2 R^{-1} B_2^T \\ -Q_1 & -A_3^T - C_{2y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \mu \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} A_4 & -B_2 R^{-1} B_1^T \\ -Q_2 & -A_1^T - C_{1y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

が得られる. 合成リカッチ変換式 (4.52) を用いて式 (A.34) と式 (A.35) のベクトル $[y^T, \mu^T]^T$ を入れ替えると

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\mu} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 R^{-1} B_2^T \\ -Q_2^T & -A_4^T - C_{2z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} A_2 & -B_1 R^{-1} B_1^T \\ -Q_3 & -A_2^T - C_{1z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 R^{-1} B_2^T \\ -Q_2^T & -A_4^T - C_{2z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_3 & -B_2 R^{-1} B_2^T \\ -Q_1 & -A_3^T - C_{2y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} A_4 & -B_2 R^{-1} B_1^T \\ -Q_2 & -A_1^T - C_{1y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} A_3 & -B_2 R^{-1} B_2^T \\ -Q_1 & -A_3^T - C_{2y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

となる. 式 (4.52) の両辺を t で微分すると

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{K}_1 & \dot{K}_2 \\ \dot{K}_3 & \dot{K}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{g}_1 \\ \dot{g}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.38})$$

が得られる. 式 (A.36) と式 (A.37) を, 式 (A.38) の $[\dot{y}^T, \dot{\mu}^T]^T$ と $[z^T, \dot{\lambda}^T]^T$ に代入すると次の等式が得られる.

$$\Theta_1 = \Theta_2 \tag{A.39}$$

ここで

$$\begin{aligned} \Theta_1 = & \begin{bmatrix} A_1 & -B_2 R^{-1} B_2^T \\ -Q_2^T & -A_4^T - C_{2z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} A_2 & -B_1 R^{-1} B_1^T \\ -Q_3 & -A_2^T - C_{1z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} A_1 & -B_2 R^{-1} B_2^T \\ -Q_2^T & -A_4^T - C_{2z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Theta_2 = & \begin{bmatrix} \dot{K}_1 & \dot{K}_2 \\ \dot{K}_3 & \dot{K}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_4 & -B_2 R^{-1} B_1^T \\ -Q_2 & -A_1^T - C_{1y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} A_3 & -B_2 R^{-1} B_2^T \\ -Q_1 & -A_3^T - C_{2y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & -B_2 R^{-1} B_2^T \\ -Q_1 & -A_3^T - C_{2y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{g}_1 \\ \dot{g}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

等式 (A.39) の両辺が変数ベクトル $[z^T, \lambda^T]^T$ に無関係に成り立つことを条件とすると, 微分方程式 (4.53) と (4.54) が導かれる.

A.7 参考文献

- [1] L.D.Berkovitz: "Variational Methods in Problems of Control and Programming", J. Math. Anal. & Appl, Vol.3, pp115-169 (1961)
- [2] A.Bryson and W.Denham: "A Steepest Ascent Method for Solving Optimum Programming Problems", Trans. ASME Ser. E., 29, pp.247-257 (1962)
- [3] L.A.Lasdon, S.K.Mitter and A.D.Warren: "The Conjugate Gradient Method for Optimal Control Problems", IEEE Trans., AC-12, No.1, pp.133-138 (1967)
- [4] L.A.Lasdon: "Conjugate Direction Methods for Optimal Control", IEEE Trans., AC-15, No.2, pp.267-268 (1969)
- [5] D.H. Jacobson & D.Q. Mayne: "Differential Dynamic Programming", American Elsevier, New York (1970).
- [5] 加納秀明: "システムの最適理論と最適化", コロナ社, (1987)
- [6] 日野幹雄: "境界値問題の解法", 朝倉書店, (1981)
- [7] 山本稔: "常微分方程式の安定性", 実教出版, (1979)
- [8] 増田久弥: "非線形数学", 東京図書 (1985)
- [9] 熊田禎宣 木谷忍: "計画のための最適化数学" 井上書院 (1988)
- [10] 杉山昌平: "最適問題" 共立出版株式会社 (1974)
- [11] S.Barnett & R.G.Cameron: "Introduction to Mathematical Control Theory" CLARENDON PRESS · OXFORD (1985)
- [12] P.Dyer & S.R.McReynolds: "The Computation and Theory of Optimal Control" Academic Press New York and London (1970)
- [13] 坂和愛幸: "最適化と最適制御", 森北出版株式会社, (1980)
- [14] M.M.Denn: "Optimization by Variational Methods", p.211 McGraw-Hill.(1969)
- [15] J.L.Casti: "Dynamical Systems and Their Applications", New York: Academic Press (1971)
- [16] 示村悦二郎: "最適レギュレータ理論の実用化への展開", 電気学会論文集 (C), 108, 1, pp.3-11(1988)
- [17] H.J.Kelley: "Method of Gradients, in Optimization Techniques", G. Leitman, Ed., p.228 New York, Academic Press. (1962)

- [18] 山浦弘夫, 坂口忠士, 太田豊生: "状態変数に不等式制約を含む最適制御問題に対するこう配法", 電学論. C104, pp.239-246(1984).
- [19] 志水 清孝: "最適制御の理論と計算法", コロナ社, (1994)
- [20] 山浦弘夫, 竹生寿男, 師玉康成, 太田豊生: "逆リカッチ変換法による非線形2次形式問題の計算法", 計測自動制御学会論文集, 22-6, pp.703-705 (1986).
- [21] G.M. Aly and Chan W.C.: "Numerical Computation of Optimal Control Problems with Unknown Final Time", Journal of Mathematical Analysis and Applications 45, pp.274-284 (1974)
- [22] Y. Shidama, H.Yamaura: "A study of the weak non-linear optimal control problem using the fixed point theorem" Trans. IEICE (E), J72-E,12, pp. 1317-1325(1989)
- [23] D.E.Rumelhart: "Learning Internal Representation by Error Propagation", Parallel Distributed Processing, 1, the MIT Press pp.318-362 (1986)
- [24] 船橋賢一: "階層型ニューラルネットワークの原理的機能", 計測と制御 VOL.30 No.4 p.280-284 (1991)
- [25] D.Psaltis: "A Multilayered Neural Network Controller", IEEE Control Syst. Mag., Vol.8, pp.17-21, Apr. (1988)
- [26] 美多勉, 大須賀公一: "ロボット制御工学入門", コロナ社 (1993)
- [27] F.L.Lewis, C.T.Abdallah, D.M.Dawson:"Control of Robot Manipulators", Macmillan Publishing Company, (1993)
- [28] 児玉 慎三, 須田 信英: "システム制御のためのマトリクス理論", 計測自動制御学会 (1978)
- [29] 坂和:"線形システム制御理論", 朝倉書店, (1979)
- [30] W.M.Wonham:"On a Matrix Riccati Equation of Stochastic Control", SIAM J., Control, Vol.6, pp.681-697 (1968)
- [31] D.L.Lukes:"Optimal Regulation fo Nonlinear Dynamical Systems", SIAM J., Control, Vol.7, No.1, pp.75-100 (1969)

A.8 著者論文

- [1] 蔡大維, 山浦弘夫, 師玉康成: "制御量制約と終端拘束をもつ非線形最適制御問題の数値計算法", 電子情報通信学会論文誌, Vol.J75-A, No.11, pp.1176-1179(1992)
- [2] D. Cai, Y. Shidama, M.Eguchi, H.Yamaura, T.Miyazaki:"An Optimal Nonlinear Regulator Design with Neural Network and Fixed Point Theorem", IEICE Trans. on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, Vol.E76-A, No.5 pp.772-776(1993)
- [3] 蔡大維, 山浦弘夫, 師玉康成: "合成リカッチ変換による非線形最適制御問題の数値計算法-終端時刻未知問題-", 電子情報通信学会論文誌, Vol.J76-A, No.8, pp.1168-1176(1993)
- [4] H.Yamaura, D.Cai, Y.Shidama:"Rechnungsmethode für nichtlineare quadratische Probleme mit unbekannter Endzeit", J. of the Faculty of Engineering, Shinshu University, No.73, pp.25-37(1993)
- [5] 蔡大維, 山浦弘夫, 師玉康成: "合成リカッチ変換による非線形最適制御問題の数値計算法とマンピュレータ制御問題への応用", 電子情報通信学会論文誌, Vol.J77-A, No.1 (1994)
- [6] D. Cai, H.Yamaura, Y.Shidama:"A New Manipulator Trajectory Computation Algorithm with Synthetic Riccati Transformation", ISMCR'93, Proc. Bm.I-I (1993)
- [7] D.Cai, Y.Shidama, M.Eguchi, H.Yamaura:"An Optimal Nonlinear Regulator Design with Neural Network and Fixed Point Theorem", Proc. IEEE International Workshop on Neuro-Fuzzy Control, pp.254-259(1993)
- [8] 蔡大維, 師玉康成, 江口正義, 山浦弘夫: "非線形フィードバックと不動点問題", 電子情報通信学会論文誌, Vol.J76-A, No.3 pp.357-363(1993)
- [9] 江口正義, 師玉康成, 蔡大維, 山浦弘夫: "積分多様体を解にもつ弱非線形レギュレータ問題の解析", 電子情報通信学会論文誌, Vol.J76-A, No.3 pp.372-380(1993)
- [10] 師玉康成, 蔡大維, 江口正義, 山浦弘夫: "積分多様体と弱非線形制御系", 計測自動制御学会論文集, Vol.29, No.5, pp.538-546(1993)
- [11] M.Eguchi, Y.Shidama, D.Cai, H.Yamaura:"Existence of a Low-order Integral Manifold and Nonlinear Regulator Problems", IFAC World Congress, Tu-M-P, Vol.3 pp.497-502(1993)

A.9 筆者論文と各章との関係

論文 [1] : 第 4 章, 第 6 章

論文 [2] : 第 4 章, 第 6 章

論文 [3] : 第 4 章, 第 5 章, 第 6 章

論文 [4] : 第 4 章, 第 6 章

論文 [5] : 第 4 章, 第 5 章, 第 6 章

論文 [6] : 第 4 章, 第 6 章

論文 [7] : 第 4 章, 第 6 章