J. FAC. SCI., SHINSHU UNIVERSITY, Vol. 34, No. 2, pp.111-126 1999

Hilbert 空間の微分方程式の正則化と非結合代数

Nobuhiko TANABE

信州大学大学院工学系研究科地球環境システム科学専攻

(2000年1月11日受理)

はじめに

有限次元の場合大切な Laplace 方程式なども，Hilbert 空間は無限次元なので，そのまま扱うと特別な関数に対してだけしか定義できない。この難点を克服するため［2］で方程式の正則化を定義し，Laplace 方程式に関しては，正則化なしでは不可能だった極座標表示を計算し，それを使って，正則化「球面」Laplacian の固有値と固有関数を求めた。ここで現れる固有関数は，有限次元の類推では得られないものがあり，相転位との関係も示唆され興味深い。

本論文では［2］で得られた正則化「球面」Laplacian を Hilbert 空間での量子力学の観点から見直すことを試みる。特に Hilbert 空間の上に作られたある種の非結合代数である Jordan 代数を用いれば，無限次元からくる計算の困難を突破できることが分かった。またこの Jordan 代数を用いて，Hilbert 空間の上の(1＋無限次元の)Dirac like operator を定義した。有限次元の場合 Jordan 代数を用いて，Dirac like operator を定義することは，［9］や［10］などで行われており，ここではそれを無限次元に適用した。非結合代数が量子力学で重要になるであろうということは，既に Dirac によって示唆されており（［4］)，最近では［7］などの研究もあり，無限次元 Dirac kind operator も意味があるものと信じる。

本論文の概要は以下の通りである：第1節では，準備として「正則化」Laplacian の極座標表示とそれを用いた正則化「球面」Laplacian の固有値，固有関数についての結果をまとめてある（［2］)。第2節で Jordan 代数を導入し，それを用いて，Hilbert 空間の角運動量演算子（に当たるもの）と∇を定義し，更に Bogoliubov 変換を計算して有限次元の場合と違って，回転の角度が限定されることを示した。最後の節である第3節では Jordan 代数を用いて，Dirac 型演算子を定義することを行い，そのために，Jordan 代数を Clifford 代数を用いて表現し，更に Clifford 代数の表現を用いて，定義した Dirac 型演算子の性質を調べた。有限次元の場合のγ_5にあたる Clifford 代数の元は手で入れなければならないが，それに対応する Jordan 代数の元を導入する必要があることを示し，さらに相対論的共変性が成り立つための条件を求めた。

1　正則化 Laplacian

1.1　Hilbert 空間の球座標と Laplacian

有限のN次元では Laplacian は

$$\Delta=\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \tag{1}$$

であるが，これでは，$\Delta r(x)^2(\sum_{n=1}^{N}2)$ が$N\to\infty$において有限にならず定義できない。そこで，以下に定義するある固有値 λ_n を用いて意味のある無限次元 Laplacian を構築する。Xを固定された Riemann 計量をもった compact (spin) manifold，EをX上の Symmetric vector bundle とし，$L^2(X)$をEの section の Hilbert 空間とする。$De_n=\lambda_n e_n$のときDの spectre 分解は$\sum\lambda_n(\ ,e_n)e_n$であり，このとき$L^2(X)$の正規直交基底を$\{e_{\lambda_n}\}$, $n=1,2,\ldots$ と選ぶ（[3]，参照)。以下では，計算の都合上 $\{\lambda_n\}_{n\in I}$, $I=\{1,2,3,\ldots\}$ とし λ_n を正数とする。$e_{n,k}=\lambda_n^{-k}e_n$と書くと，これらは$E$の section の作る Sobolev 空間 $W^k(X)$の正規直交基底になる。

$L^2(X)$の座標を$x=(x_1,x_2,\cdots)=\sum x_n e_n$，$W^k(X)$の座標$y=\sum y_n e_{n,k}$をとる。このとき，$x\in W^k(X)$を$L^2(X)$の座標で書くと$x=\sum x_{n,k}e_{n,k}=\sum x_n e_n$であるので，$x_{n,k}e_{n,k}=x_n e_n$を得る。だから，$x_{n,k}=\lambda_n^k x_n$となる。$W^k(X)$の Laplacian $\sum\frac{\partial^2}{\partial x_{n,k}^2}$を$L^2(X)$の座標で書くと

$$\frac{\partial}{\partial x_{n,k}}=\frac{\partial x_n}{\partial x_{n,k}}\frac{\partial}{\partial x_n}=\lambda_n^{-k}\frac{\partial}{\partial x_n} \tag{2}$$

から

$$\sum_n\frac{\partial^2}{\partial x_{n,k}^2}=\sum_n\lambda_n^{-2k}\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \tag{3}$$

となる。だから，$L^2(X)$の関数に働く operator $\Delta(s)$を

$$\Delta(s):=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-2s}\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \tag{4}$$

で定義する。$\Delta(s)f$がRe.sが大きいとき定義され，sの関数として$s=0$まで解析接続されれば，正則化 Laplacian:Δ:f を

$$:\Delta:f=\Delta(s)f|_{s=0} \tag{5}$$

で定義する。

例：

$$\Delta(s)r(x)^2=2\zeta(D^2,s),$$
$$\zeta(D^2,s)=\sum(\lambda_n^2)^{-s}=\sum\lambda_n^{-2s} \tag{6}$$
$$\nu:=\zeta(|D|,0) \tag{7}$$

という spectral zeta function$\sum\lambda_n^{-s}$ の $s=0$ への解析接続した値が有限値をとることが分かっている（[6]）。

有限次元のN次元における極座標：

$$\begin{cases} x_1=r\cos\theta_1 \\ x_2=r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \qquad\cdots \\ x_{N-1}=r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{N-2}\cos\theta_{N-1} \\ x_N=r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{N-1} \end{cases} \tag{8}$$

ただし，$0\le\theta_i\le\pi(i=1,2,\cdots,n-2)$，$0\le\theta_{N-1}\le 2\pi$を無限次元に拡張すれば無限次元極座

標（$0\leq\theta_i\leq\pi(i=1,2,\cdots)$）：

$$\begin{cases} x_1=r\cos\theta_1 \\ x_2=r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \qquad\cdots \\ x_n=r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-1}\cos\theta_n \\ \qquad\cdots \end{cases} \tag{9}$$

となる。この極座標は緯度だけあって経度がない。その代わり $\theta_1,\theta_2,\ldots$ は条件

$$\lim_{n\to\infty}\sin\theta_1\cdots\sin\theta_n=0 \tag{10}$$

を満たす。

(9)から $\theta_m=\theta_m(x_m,x_{m+1},\ldots)$ となるので，$\dfrac{\partial}{\partial x_n}$ は

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_n}&=\frac{\partial r}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial r}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\partial\theta_m}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial\theta_m}\\ &=\frac{\partial r}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial r}+\sum_{m(\geq n)}\frac{\partial\theta_m}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial\theta_m}\end{aligned} \tag{11}$$

さらに，$\dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ は

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}=&\left(\frac{\partial r}{\partial x_n}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial x_n^2}\frac{\partial}{\partial r}+\\ &\sum_{m(\geq n)}\left(\frac{\partial\theta_m}{\partial x_n}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\theta_m^2}+\sum_{m(\geq n)}\frac{\partial^2\theta_m}{\partial x_n^2}\frac{\partial}{\partial\theta_m}\end{aligned} \tag{12}$$

となる。(9)から

$$\begin{aligned}&\frac{\partial r}{\partial x_n}=\frac{x_n}{r},\ \frac{\partial^2 r}{\partial x_n^2}=\frac{1}{r}-\frac{x_n^2}{r^3}\\ &\frac{\partial\theta_m}{\partial x_n}=-\frac{r_{m+1}}{r_m^2}(n=m),\ \frac{\partial\theta_m}{\partial x_n}=\frac{x_m x_n}{r_m^2 r_{m+1}}(n<m)\\ &\frac{\partial^2\theta_m}{\partial x_n^2}=-\frac{2x_m r_{m+1}}{r_m^4}(n=m),\ \frac{\partial^2\theta_m}{\partial x_n^2}=\frac{x_m}{r_m^2 r_{m+1}}-\frac{2x_m x_n^2}{r_m^4 r_{m+1}}-\frac{x_m x_n^2}{r_m^2 r_{m+1}^3}(n<m)\end{aligned} \tag{13}$$

であるので，spectral zeta function $Z(G,s)$ の $s=0$ への解析接続した値 $Z(G,0)=\nu$ を用いて(13)を(12)に代入すると $:\Delta:$ の極座標表示

$$\begin{aligned}:\Delta:&=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\nu-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\Lambda\\ &:=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\nu-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\sum_n\frac{1}{\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_{n-1}}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta_n^2}+(\nu-n-1)\frac{\cos\theta_n}{\sin\theta_n}\frac{\partial}{\partial\theta_n}\right\}\end{aligned} \tag{14}$$

が得られる。$\nu=N$ とおけば最後の角度の部分を除いて N 次元でのものと同じ式になる。この表示から $:\Delta:$ は ν だけに関係するので以下では $\Delta[\nu]$ と書く。

1.2 Hilbert 空間上の球 Laplacian の固有値，固有関数

Hilbert 空間における正則化 Laplacian の極座標表示による固有値問題を考える：

$$-\Delta[\nu]\psi=\lambda\psi. \tag{15}$$

ここで，$\psi = R(r)\Theta(\theta_1, \theta_2, \cdots)$ と動径と角度に変数分離すると次の二つの微分方程式

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{\nu-1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2}\right)R = 0 \tag{16}$$

$$\Lambda[\nu]\Theta + \mu\Theta = 0 \ (\mu : \text{constant}) \tag{17}$$

を得る。更に $\Theta(\theta_1, \theta_2, \cdots) = T_1(\theta_1)T_2(\theta_2)\cdots$ と変数分離し少し整理すると，

$$\begin{aligned} 0 = \mu\sin^2\theta_1 &+ \frac{\sin^2\theta_1}{T_1}\left\{\frac{d^2T_1}{d\theta_1^2} + (\nu-2)\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1}\frac{dT_1}{d\theta_1}\right\} \\ &+ \frac{1}{T_2}\left\{\frac{d^2T_2}{d\theta_2^2} + (\nu-3)\frac{\cos\theta_2}{\sin\theta_2}\frac{dT_2}{d\theta_2}\right\} \\ &+ \frac{1}{T_3\sin^2\theta_2}\left\{\frac{d^2T_3}{d\theta_3^2} + (\nu-4)\frac{\cos\theta_3}{\sin\theta_3}\frac{dT_3}{d\theta_3}\right\} + \cdots \end{aligned} \tag{18}$$

と書ける。第一行は θ_1 のみを含み，この行以外は θ_1 を含まない。そこで第一行を定数 a_1 と置く。さらに，第一行を定数 a_1 と置いた式の両辺に $\sin^2\theta_2$ を掛けると(18)と同様な式が得られ，上と同様なことを行うと，

$$\sin^{-\nu+n+1}\theta_n\frac{d}{d\theta_n}\left(\sin^{\nu-n-1}\theta_n\frac{dT_n}{d\theta_n}\right) + \left(a_{n-1} - \frac{a_n}{\sin^2\theta_n}\right)T_n = 0\ ,\ n = 1,2,\ldots \tag{19}$$

が得られる。ただし，$a_0 = \mu$ である。計算上，上の式の第 n 番目を $\omega_n = \cos\theta_n$ とおいた

$$(1-\omega_n^2)\frac{d^2T_n}{d\omega_n^2} - (\nu-n)\omega_n\frac{dT_n}{d\omega_n} + \left(a_{n-1} - \frac{a_n}{1-\omega_n^2}\right)T_n = 0 \tag{20}$$

は有用である。a_n を

$$a_n = l_n(l_n + \nu - n - 2),\ l_n = 0,1,2,\ldots \tag{21}$$

とおく。このとき T_nの解は定数を除いて形式的に，直交関数である Gegenbauer の多項式を用いて書ける。母関数は$C_l^\mu(x)$を Gegenbauer の多項式とすると

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^\mu} = \sum_{l=0}^{\infty} C_l^\mu(x)t^l,\ \mu > -1 \tag{22}$$

と書ける（[5]）。この Gegenbauer の多項式を使って T_nの解は

$$\begin{cases} (1-\omega_n^2)^{-(l_n+\nu-n-2)/2}C_{l_n-l_{n-1}-1}^{-l_n+(n+3-\nu)/2}(\omega_n) \\ (1-\omega_n^2)^{-(l_n+\nu-n-2)/2}C_{l_n+l_{n-1}+\nu-n-2}^{-l_n+(n+3-\nu)/2}(\omega_n) \\ (1-\omega_n^2)^{l_n/2}C_{l_{n-1}-l_n}^{l_n+(\nu-n-1)/2}(\omega_n) \\ (1-\omega_n^2)^{l_n/2}C_{n+1-l_n-l_{n-1}-\nu}^{l_n+(\nu-n-1)/2}(\omega_n) \end{cases} \tag{23}$$

となる。ただし，$C_l^\lambda(\omega)$において l は 0 以上の整数で，$\lambda \in \boldsymbol{Z}$である。

1.3 Gegenbauer 多項式C_l^μの拡張

Hilbert 空間での球関数を構築する際の Gegenbauer 多項式C_l^μの問題点としては，通常，μは 0 または正の実数であるが，今の場合 μ が負になることである。そのため volume form と Gegenbauer 多項式に変更を入れなければならない。しかし volume form の方は未だ解っていないので Gegenbauer 多項式の変更のみについて触れる。

Gegenbauer 多項式の母関数は，通常は $\mu > -1$ としているが，Hilbert 空間での球関

数を構築するためには $\mu>-1$ を負まで拡張する必要がある。μ が正の整数で l が小さいところでは

$$
\begin{aligned}
C_0^\mu(x)&=1\\
C_1^\mu(x)&=2\mu x\\
C_2^\mu(x)&=2\mu(\mu+1)x^2-\mu\\
C_3^\mu(x)&=\frac{4}{3}\mu(\mu+1)(\mu+2)x^3-2\mu(\mu+1)x
\end{aligned}
\tag{24}
$$

であるが，μ が負の整数で l が小さいところでは上の母関数において μ をそのまま負の整数に拡張してもそのまま成り立つ。更に μ を上の母関数を用いて実数の場合まで拡張してもよい。また(24)が負の場合にそのまま適用できることから，$\mu>-1$ の場合 Gegenbauer 多項式 C_l^μ は

$$
C_l^\mu(x)=\frac{(-1)^l}{2^l l!}\frac{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(l+\mu+\frac{1}{2}\right)}\frac{\Gamma(l+2\mu)}{\Gamma(2\mu)}(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\mu}\frac{d^l}{dx^l}(1-x^2)^{l+\mu-\frac{1}{2}}
\tag{25}
$$

と書けるが，あまり変更する必要がないことがわかる。ここでは，$\mu\leq-1$ とすると $\frac{\Gamma(l+2\mu)}{\Gamma(2\mu)}$ の部分が発散してしまい問題であるが

$$
\Gamma(\mu)\to(-1)\times\mathrm{Res}_{z=\mu}\Gamma(z)=(-1)\times\{(z-\mu)\Gamma(z)\}=\frac{(-1)^{-\mu+1}}{\Gamma(-\mu+1)}=\frac{(-1)^{-\mu+1}}{(-\mu)!}
\tag{26}
$$

という置き換えをするだけで(24)がまた再現できる。

1.4 諸定理等［2］

命題 1.1. $\{(\theta_1,\theta_2,\ldots)|0\leq\theta_n\leq\pi\}$ 上で考えた作用 $\Lambda[\nu]$ は固有値 $-l(l+\nu-2)$, $l=0,1,2,\ldots$ に属する

$$
\begin{aligned}
\Theta(\theta_1,\theta_2,\ldots)&=F(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{N-1})\times\\
&\prod_{n\geq N}(\sin^2\theta_n)^{l_\infty}\left(1+a_n\int_0^{\theta_n}(\sin)^{n+1-\nu-2l_\infty}dx\right),
\end{aligned}
\tag{27}
$$

の形の無限に多くの独立な固有関数をもつ。l_∞ は $l\leq l_\infty\leq0$ を満たす整数であり，$\{a_n\}$ は $\sum|a_n|/\sqrt{n}<\infty$ を満たす。

系 1.1. $\Lambda[\nu]$ は $\nu<1$ のとき定値作用素ではない。

$r=1$, $\{(\theta_1,\theta_2,\ldots)|0\leq\theta_n\leq\pi\}$ をとることは，$S^\infty=\{x|\,\|x\|=1\}$ から $\{(x,x_\infty)|\,\|x\|=1,0\leq x_\infty\leq1\}\subset H\oplus\boldsymbol{R}$ への写像を意味する。$S_c^\infty=\{(x,c)|\,\|x\|^2=1-c^2\}\subset H\oplus\boldsymbol{R}$, $0\leq c<\sqrt{2}/2$ とする。この時，$\Lambda[\nu]$ は S_c^∞ 上の作用素 $\Lambda_c=\Lambda[\nu]_c$ を導く。Λ_0 は本来の（H の）の球 Laplacian である。次の定理が成り立つ（［2］）。

定理 1.1. すべての Λ_c は共通の固有値 $-l(l+\nu-2)$, $l=0,1,2,\ldots$ をもつ。すべての固有値は固有関数 $\Theta_c(\theta_1,\theta_2,\ldots)$;

$\Lambda_c\cdot\Theta_c(l+\nu-2)\Theta_c$, $c\leq0$, $\Theta_c\neq0$ の無限に多くの独立な 1-parameter の族をもつ。$l\leq1$ のとき，固有値 $l(l+\nu-2)$ は

$$
\Lambda_c\Phi_c=l(l+\nu-2)\Phi_c,\ \Phi_c\neq0,\ c\neq0,\ \Phi_c=0
\tag{28}
$$

を満たす固有関数 Φ_c の無限に多くの独立な 1-parameter の族をもつ。

ν が $\nu \leq 1$ である整数のとき，

$$\Lambda_c \Psi_c = 0,\ \Psi_c \neq 0,\ c \neq 0,\ \Psi_c = 0 \tag{29}$$

を満たす固有関数 Ψ_c の無限に多くの独立な 1-parameter の族が存在する。

2 正則化「球面」Laplacian と Jordan 代数

2.1 角運動量演算子の導出

$\hat{p}_r = -\sqrt{-1}\,\partial/\partial r$ とし $-\Delta[\nu] = \hat{p}_r^2 + \frac{1}{r^2}\hat{\ell}(s)^2|_{s=0}$ と置き $\hat{\ell}(s)$ を角運動量演算子で表す。$\nabla(s)$ を次の式で定義する。ただし，後で $s=0$ へ解析接続するものとする。

$$\nabla(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s} E_n \frac{\partial}{\partial x_n} \tag{30}$$

(30)から $\{E_n\}_{n\in I}$, $I = \{1, 2, 3, \ldots\}$ は次の性質を持つ。

$$E_n \cdot E_m = E_m \cdot E_n = \delta_{nm} \mathbf{1}_E \tag{31}$$

そのため H の D の固有関数による基底 $\{e_m\}$ を生成元とする Clifford 代数を考え：

$$e_n e_m + e_m e_n = -2\delta_{nm}, \tag{32}$$

$$E_n \cdot E_m = -\frac{1}{2}(e_n \cdot e_m + e_m \cdot e_n) \tag{33}$$

と表現される $\{E_n\}_{n\in I}$ で生成される $\boldsymbol{C}$ 上の Jordan 代数 $J(H)$ を導入する。

$\hat{\ell}(s)^2$ は次のように変形する。

$$\begin{aligned}
\hat{\ell}(s)^2 &= -\mathbf{1}_E r^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m(\geq n)} \lambda_n^{-2s} \left\{ \left(\frac{\partial \theta_m}{\partial x_n}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta_m^2} + \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial x_n^2} \frac{\partial}{\partial \theta_m} \right\} \\
&= -r^2 \left\{ \left(\sum_{n} \sum_{m(\geq n)} \lambda_n^{-s} E_n \frac{\partial \theta_m}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial \theta_m} \right)^2 \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{nn'} \sum_{m'(\geq n')} \lambda_n^{-s} \lambda_{n'}^{-s} (E_n E_{n'}) \frac{\partial r}{\partial x_n} \frac{\partial^2 \theta_{m'}}{\partial r \partial x_{n'}} \frac{\partial}{\partial \theta_{m'}} \right\} \\
&= -r^2 \left\{ \sum_{nn'} \sum_{m'(\geq n')} \sum_{m}^{n} \lambda_n^{-s} \lambda_{n'}^{-s} (E_n E_{n'}) \frac{\partial \theta_m}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial \theta_m} \left(\frac{\partial \theta_{m'}}{\partial x_{n'}} \frac{\partial}{\partial \theta_{m'}} \right) \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{nn'} \sum_{m'(\geq n')} \lambda_n^{-s} \lambda_{n'}^{-s} (E_n E_{n'}) \frac{\partial r}{\partial x_n} \frac{\partial^2 \theta_{m'}}{\partial r \partial x_{n'}} \frac{\partial}{\partial \theta_{m'}} \right\} \\
&= -r^2 \left\{ \sum_{nn'} \sum_{m'(\geq n')} \lambda_n^{-s} \lambda_{n'}^{-s} (E_n E_{n'}) \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial \theta_{m'}}{\partial x_{n'}} \frac{\partial}{\partial \theta_{m'}} \right) \right. \\
&\qquad \left. - \sum_{nn'} \sum_{m'(\geq n')} \lambda_n^{-s} \lambda_{n'}^{-s} (E_n E_{n'}) \frac{\partial r}{\partial x_n} \frac{\partial \theta_{m'}}{\partial x_{n'}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta_{m'}} \right\} \\
&= -r^2 \sum_{nn'} \sum_{m'(\geq n')} \lambda_n^{-s} \lambda_{n'}^{-s} (E_n E_{n'}) \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial \theta_{m'}}{\partial x_{n'}} \frac{\partial}{\partial \theta_{m'}} \right)
\end{aligned} \tag{34}$$

最後の計算は(5)からである。更に変形すると，

$$\begin{aligned}
&\hat{\ell}(s)^2 \\
&= \left(\frac{r}{\sqrt{-1}} \sum_{n} \lambda_n^{-s} E_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \left(\frac{r}{\sqrt{-1}} \sum_{n} \sum_{m(\geq n)} \lambda_n^{-s} E_n \frac{\partial \theta_m}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial \theta_m} \right) \\
&= \hat{\tau}(s)^2 + \hat{\rho}(s)\hat{\tau}(s)
\end{aligned} \tag{35}$$

となる。ただし

$$\hat{\tau}(s) := \frac{r}{\sqrt{-1}} \sum_n \sum_{m(\geq n)} \lambda_n^{-s} E_n \frac{\partial \theta_m}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial \theta_m}$$

$$\hat{\rho}(s) := \frac{r}{\sqrt{-1}} \sum_n \lambda_n^{-s} E_n \frac{\partial r}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial r} \tag{36}$$

と置いた。左辺は $\{\theta_n\}_{n\in I}$ に関する微分なのに右辺には動径の微分が含まれている。だから $\hat{\rho}(s)\hat{\tau}(s)|_{s=0}=0$ とならなければならない。このとき，

$$\begin{aligned}\hat{\ell}(s) &:= \hat{\tau}(s)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s} E_n \left(\frac{r}{\sqrt{-1}} \sum_{m(\geq n)} \frac{\partial \theta_m}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial \theta_m} \right)\\ &=: \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s} E_n \hat{\ell}_n\end{aligned} \tag{37}$$

である。よって角運動量演算子様演算子の成分 $\hat{\ell}_n$ が

$$\hat{\ell}_n = \frac{r}{\sqrt{-1}} \sum_{m(\geq n)} \frac{\partial \theta_m}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial \theta_m} \tag{38}$$

と求まる。

2.2 Hilbert 空間上の∇と Jordan 代数 $\{E_A\}_{A\in I_0}$, $I_0=\{0,1,2,\dots\}$ の性質

H から $J(H)$ への関数に対して定義される微分演算子 $\nabla(s)$ を

$$\nabla(s) := \sum_n \lambda_n^{-s} E_n \frac{\partial}{\partial x_n} \tag{39}$$

を定義する。$\nabla(s)$ と $\hat{\ell}(s)$ が定義できたので，運動量演算子様演算子 $\hat{p}(0)=\frac{1}{\sqrt{-1}}\nabla(0)$, $\hat{\ell}(0)$ を計算する。その際，必要な $\hat{r}(0)$ と E_0 を次式で定義する。

$$\hat{r}(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s} E_n x_n \tag{40}$$

$$\hat{r}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n x_n =: E_0 r \tag{41}$$

前の $\{E_n\}_{n\in I}$, $I=\{1,2,3,\dots\}$ とまとめて $\{E_A\}_{A\in I_0}$, $I_0=\{0,1,2,\dots\}$ と書けば，その性質は以下の様になる。

$$\begin{aligned}&E_A\cdot(E_B\cdot E_C) \neq (E_A\cdot E_B)\cdot E_C,\\ &E_A^2\cdot(E_B\cdot E_C) \neq (E_A^2\cdot E_B)\cdot E_C,\\ &(E_A)^2 = \mathbf{1}_E,\\ &E_n\cdot E_m = E_m\cdot E_n = \delta_{nm}\mathbf{1}_E,\\ &E_0\cdot E_n = E_n\cdot E_0 = \frac{x_n}{r}\mathbf{1}_E,\\ &\frac{\partial E_A}{\partial r} = \frac{\partial E_n}{\partial x_n} = \frac{\partial E_n}{\partial \theta_n} = 0,\\ &\quad E_0\cdot\frac{\partial E_0}{\partial \theta_n} = 0\end{aligned}$$

$$E_n \cdot \frac{\partial E_0}{\partial x_m} = \frac{\partial E_0}{\partial x_m} \cdot E_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{r} - \frac{x_n x_m}{r^3}\right) \mathbf{1}_E & (m=n) \\ -\frac{x_n x_m}{r^3} \mathbf{1}_E & (m \neq n) \end{cases}$$

$$E_n \cdot \frac{\partial E_0}{\partial \theta_m} = \frac{\partial E_0}{\partial \theta_m} \cdot E_n = \begin{cases} \cot \theta_m \frac{x_n}{r} \mathbf{1}_E & (m<n) \\ -\tan \theta_m \frac{x_n}{r} \mathbf{1}_E & (m=n) \\ 0 & (m>n) \end{cases} \tag{42}$$

このとき次の(43)が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&E_0 \cdot \hat{r}(s)|_{s=0} = \mathbf{1}_E r \\
&E_n \cdot \hat{r}(s)|_{s=0} = \mathbf{1}_E x_n \\
&\sqrt{-1}\, E_0 \cdot \hat{p}(s)|_{s=0} = \mathbf{1}_E \frac{\partial}{\partial r} \\
&\sqrt{-1}\, E_n \cdot \hat{p}(s)|_{s=0} = \mathbf{1}_E \frac{\partial}{\partial x_n} \\
&\sqrt{-1}\, E_0 \cdot \hat{l}(s)|_{s=0} = 0 \\
&\sqrt{-1}\, E_n \cdot \hat{l}(s)|_{s=0} \\
&\qquad \mathbf{1}_E \begin{cases} -\frac{\sin\theta_n}{\sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{n-1}} \frac{\partial}{\partial \theta_n} & (n=1) \\ \left(-\frac{\sin\theta_n}{\sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{n-1}} + \frac{\cos\theta_{n-1}\cos\theta_n}{\sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{n-2}}\right) \frac{\partial}{\partial \theta_n} & (n>1) \end{cases}
\end{aligned} \tag{43}$$

2.3 Jordan 代数 $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I_\pm}$, $I_\pm = \{\pm, 1, 2, 3, \ldots\}$ の性質

昇降演算子様演算子を$\hat{\ell}_\pm(s) := \sum_n (\lambda_{2n-1}^{-s} E_{2n-1} \hat{\ell}_{2n-1} \pm \sqrt{-1} \lambda_{2n}^{-s} E_{2n} \hat{\ell}_{2n})$で定義する。これを計算すると

$$\begin{aligned}
&\hat{\ell}_\pm(s) \\
&= \ = \sum_n (\lambda_{2n-1}^{-s} E_{2n-1} \hat{\ell}_{2n-1} \pm \sqrt{-1} \lambda_{2n}^{-s} E_{2n} \hat{\ell}_{2n}) \\
&= \frac{r}{\sqrt{-1}} \sum_n \left(\lambda_{2n-1}^{-s} E_{2n-1} \sum_{l=1}^{2n-1} \frac{\partial \theta_l}{\partial x_{2n-1}} \partial_{\theta_l} \pm \sqrt{-1} \lambda_{2n}^{-s} E_{2n} \sum_{l=1}^{2n} \frac{\partial \theta_l}{\partial x_{2n}} \partial_{\theta_l} \right) \\
&= \frac{r}{\sqrt{-1}} \sum_n \Bigg\{ \lambda_{2n-1}^{-s} E_{2n-1} \frac{\partial \theta_{2n-1}}{\partial x_{2n-1}} \partial_{\theta_{2n-1}} \pm \sqrt{-1} \lambda_{2n}^{-s} E_{2n} \frac{\partial \theta_{2n}}{\partial x_{2n}} \partial_{\theta_{2n}} \\
&\qquad \pm \sqrt{-1} \lambda_{2n}^{-s} E_{2n} \frac{\partial \theta_{2n-1}}{\partial x_{2n}} \partial_{\theta_{2n-1}} \\
&\qquad + \sum_{l=1}^{2n-2} \left(\lambda_{2n-1}^{-s} E_{2n-1} \frac{\partial \theta_l}{\partial x_{2n-1}} \pm \sqrt{-1} \lambda_{2n}^{-s} E_{2n} \frac{\partial \theta_l}{\partial x_{2n}} \right) \partial_{\theta_l} \Bigg\} \\
&= \frac{r}{\sqrt{-1}} \sum_n \Bigg\{ -\lambda_{2n-1}^{-s} E_{2n-1} \frac{r_{2n}}{r_{2n-1}^2} \partial_{\theta_{2n-1}} \mp \sqrt{-1} \lambda_{2n}^{-s} E_{2n} \frac{r_{2n+1}}{r_{2n}^2} \partial_{\theta_{2n}} \\
&\qquad \pm \sqrt{-1} \lambda_{2n}^{-s} E_{2n} \frac{x_{2n-1} x_{2n}}{r_{2n-1}^2 r_{2n}} \partial_{\theta_{2n-1}} \\
&\qquad + \sum_{l=1}^{2n-2} \frac{x_l}{r_l^2 r_{l+1}} (\lambda_{2n-1}^{-s} E_{2n-1} x_{2n-1} \pm \sqrt{-1} \lambda_{2n}^{-s} E_{2n} x_{2n} E_{2n}) \partial_{\theta_l} \Bigg\} \\
&= \frac{r}{\sqrt{-1}} \sum_n \Bigg\{ -\lambda_{2n-1}^{-s} E_{2n-1} \frac{\sin\theta_{2n-1}}{\sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{2n-2}} \partial_{\theta_{2n-1}} \\
&\qquad \mp \sqrt{-1} \lambda_{2n}^{-s} E_{2n} \frac{\sin\theta_{2n}}{\sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{2n-1}} \partial_{\theta_{2n}} \pm \sqrt{-1} \lambda_{2n}^{-s} E_{2n} \frac{\cos\theta_{2n-1}\cos\theta_{2n}}{\sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{2n-2}} \partial_{\theta_{2n-1}} \\
&\qquad + \sum_{l=1}^{2n-2} \frac{\cos\theta_l}{\sin^2\theta_1 \cdots \sin^2\theta_{l-1} \sin\theta_l} (\lambda_{2n-1}^{-s} E_{2n-1} x_{2n-1} \pm \sqrt{-1} \lambda_{2n}^{-s} E_{2n} x_{2n}) \partial_{\theta_l} \Bigg\}
\end{aligned} \tag{44}$$

この形からわかるように

$$
\begin{aligned}
&\hat{\ell}_{\pm}(s)\hat{\ell}_{\mp}(s)\\
&=\left[\sum_n(\lambda_{2n-1}^{-s}E_{2n-1}\,\hat{\ell}_{2n-1}\pm\sqrt{-1}\,\lambda_{2n}^{-s}\,E_{2n}\,\hat{\ell}_{2n})\right]\left[\sum_n(\lambda_{2n-1}^{-s}E_{2n-1}\,\hat{\ell}_{2n-1}\mp\sqrt{-1}\,\lambda_{2n}^{-s}\,E_{2n}\,\hat{\ell}_{2n})\right]\\
&=\sum_{nn'}\{\lambda_{2n-1}^{-s}\lambda_{2n'-1}^{-s}(E_{2n-1}\cdot E_{2n'-1})(\hat{\ell}_{2n-1}\hat{\ell}_{2n'-1})+\lambda_{2n}^{-s}\lambda_{2n'}^{-s}(E_{2n}\cdot E_{2n'})(\hat{\ell}_{2n}\hat{\ell}_{2n'})\\
&\qquad-\sqrt{-1}\,\lambda_{2n-1}^{-s}\lambda_{2n'}^{-s}(E_{2n-1}\cdot E_{2n'})(\hat{\ell}_{2n-1}\hat{\ell}_{2n'})+\sqrt{-1}\,\lambda_{2n}^{-s}\lambda_{2n'-1}^{-s}(E_{2n}\cdot E_{2n'-1})(\hat{\ell}_{2n}\hat{\ell}_{2n'-1})\}\\
&=\sum_n\mathbf{1}_E(\lambda_{2n-1}^{-s}\,\hat{\ell}_{2n-1}^2+\lambda_{2n}^{-2s}\,\hat{\ell}_{2n}^2)\\
&=\sum_n\lambda_n^{-2s}\mathbf{1}_E\hat{\ell}_n^2\\
&=\hat{\ell}(s)^2
\end{aligned}
\tag{45}
$$

3 次元では全角運動量の 2 乗は $\hat{\ell}^2=\hat{\ell}_{\pm}\hat{\ell}_{\mp}+\hat{\ell}_z^2\mp\hat{\ell}_z$ となるが，Hilbert 空間では最後の座標がないため，ここでも最後の角運動量なるものが存在しないという類似性が出た。この事から，すぐに$[\hat{\ell}(s)^2]_{s=0}$ の固有値が $l_0(l_0+\nu-2)$ と分かっているからと言って$[\hat{\ell}_{\pm}(s)^2]_{s=0}$ の固有値が$\sqrt{l_0(l_0+\nu-2)}$ とは限らない。なぜならば，一般に，

$$[\hat{\ell}_{\pm}(s)\hat{\ell}_{\mp}(s)]_{s=0}\neq[\hat{\ell}_{\pm}(s)]_{s=0}[\hat{\ell}_{\mp}(s)]_{s=0} \tag{46}$$

であるから。$[\hat{\ell}_{\pm}(s)\hat{\ell}_{\mp}(s)]_{s=0}=[\hat{\ell}(s)^2]_{s=0}$のため，$[\hat{\ell}_{\pm}(s)\hat{\ell}_{\mp}(s)]_{s=0}$ は ν に依存するが，$[\hat{\ell}_{\pm}(s)]_{s=0}$ は(44)からわかるが ν に依存しない。そのため上式のようになる。

昇降演算子様演算子を計算する際，次の定義が必要になる。

$$\hat{z}_{\pm}(s):=\sum_n(\lambda_{2n-1}^{-s}E_{2n-1}\,x_{2n-1}\pm\sqrt{-1}\,\lambda_{2n}^{-s}\,E_{2n}\,x_{2n}) \tag{47}$$

$$\hat{z}_{\pm}(0)=\sum_n(E_{2n-1}\,x_{2n-1}\pm\sqrt{-1}\,E_{2n}\,x_{2n})=:E_{\pm}r \tag{48}$$

この$E_{\pm}$の性質はE_0と似ていて以下のようにまとめられる。

$$
\begin{aligned}
&E_\alpha\cdot(E_\beta\cdot E_\gamma)\neq(E_\alpha\cdot E_\beta)\cdot E_\gamma\\
&|E_\alpha|^2\cdot(E_\beta\cdot E_\gamma)=(|E_\alpha|^2\cdot E_\beta)\cdot E_\gamma\\
&|E_\alpha|^2=\mathbf{1}_E,\\
&E_n\cdot E_m=E_m\cdot E_n=\delta_{nm}\mathbf{1}_E,\\
&E_+\cdot E_n=E_n\cdot E_+=\sqrt{-1}^{\,n+1}\frac{x_n}{r}\mathbf{1}_E,\\
&E_-\cdot E_n=E_n\cdot E_-=(-1)^{n+1}\sqrt{-1}^{\,n+1}\frac{x_n}{r}\mathbf{1}_E,\\
&\frac{\partial E_\alpha}{\partial r}=\frac{\partial E_n}{\partial x_n}=\frac{\partial E_n}{\partial\theta_n}=0,\\
&\qquad E_\pm\cdot\frac{\partial E_\pm}{\partial\theta_n}+\frac{\partial E_\pm}{\partial\theta_n}\cdot E_\pm=0\\
&\qquad E_m\cdot\frac{\partial E_+}{\partial x_{2n-1}}=\frac{\partial E_+}{\partial x_{2n-1}}\cdot E_m=\begin{cases}\left(\frac{1}{r}-\frac{x_{2n-1}}{r^3}\right)\mathbf{1}_E & (m=2n-1)\\ -\frac{x_m x_{2n-1}}{r^3}\mathbf{1}_E\ (\text{odd m}\neq 2\text{n}-1),\ -\frac{\sqrt{-1}x_m x_{2n-1}}{r^3}\mathbf{1}_E\ (\text{even m})\end{cases}\\
&\qquad E_m\cdot\frac{\partial E_+}{\partial x_{2n}}=\frac{\partial E_+}{\partial x_{2n}}\cdot E_m=\begin{cases}\sqrt{-1}\left(\frac{1}{r}-\frac{x_{2n-1}}{r^3}\right)\mathbf{1}_E & (m=2n)\\ -\frac{x_m x_{2n-1}}{r^3}\mathbf{1}_E\ (\text{odd m}),\ -\frac{\sqrt{-1}x_m x_{2n}}{r^3}\mathbf{1}_E\ (\text{even m}\neq 2\text{n})\end{cases}\\
&\qquad E_m\cdot\frac{\partial E_+}{\partial\theta_{2n-1}}=\begin{cases}-\frac{r_{2n-1}}{r^3}\mathbf{1}_E & (m=2n-1)\\ \cot\theta_{2n}\frac{x_m}{r}\mathbf{1}_E\ (\text{odd m}\neq 2\text{n}-1,\ \text{m}>2\text{n}-1),\ \sqrt{-1}\cot\theta_{2n}\frac{x_m}{r}\mathbf{1}_E\ (\text{even m}\geq 2n)\\ 0 & (m<2n-1)\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$E_m \cdot \frac{\partial E_+}{\partial \theta_{2n}} = \begin{cases} -\sqrt{-1}\,\frac{r_{2n+1}}{r}\mathbf{1}_E & (m=2n) \\ \cot\theta_{2n}\,\frac{x_m}{r}\mathbf{1}_E\ (\text{odd } m \geq 2n-1), & \sqrt{-1}\cot\theta_{2n}\,\frac{x_m}{r}\mathbf{1}_E\ (\text{even } m \neq 2n,\ m>2n) \\ 0 & (m<2n) \end{cases}$$

ただし，$|E_\alpha|^2$ は $|E_n|^2 = E_n{}^2$, $|E_+|^2 = |E_-|^2 = E_+E_- = E_-E_+$ である。

2.4 作用素 $\hat{\ell}_n, \hat{\ell}_n^*$ の Bogoliubov 変換

角運動量演算子様演算子の成分

$$\hat{\ell}_n = \frac{r}{\sqrt{-1}} \sum_{m(\geq n)} \frac{\partial \theta_m}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial \theta_m} \tag{49}$$

に対する adjoint operator は

$$\hat{\ell}_n^* = \frac{\sqrt{-1}}{r} x_n \tag{50}$$

となる。これは交換関係

$$[\hat{\ell}_n, \hat{\ell}_n^*] = \sum_{l=n}^{\infty} \frac{\partial \theta_l}{\partial x_n} \frac{\partial x_m}{\partial \theta_l} \tag{51}$$

となるので，以下，球面上(r 一定)で考える。このとき，次のような Boson の生成・消滅演算子の交換関係を満たす。

$$\begin{aligned} &[\hat{\ell}_n, \hat{\ell}_m^*] = \delta_{nm} \\ &[\hat{\ell}_n^*, \hat{\ell}_m^*] = 0 \\ &[\hat{\ell}_n, \hat{\ell}_m] = 0 \end{aligned} \tag{52}$$

$\hat{\ell}(s)^2|_{s=0}$ の固有値は $l_0(l_0+\nu-2)$ であるが，この固有値と個々の $\hat{\ell}_n^2$ との関係が分かりづらい。そこで次のように Bogoliubov 変換によって $\hat{\ell}(s)^2|_{s=0}$ を対角化する。

$$\begin{cases} \hat{a}_n := a\hat{\ell}_n - b\hat{\ell}_n^* \\ \hat{a}_n^* := b\hat{\ell}_n + a\hat{\ell}_n^* \end{cases} \tag{53}$$

このとき，

$$\begin{aligned} &[\hat{a}_n, \hat{a}_m^*] \\ &= ab[\hat{\ell}_n, \hat{\ell}_m] + a^2[\hat{\ell}_n, \hat{\ell}_m^*] - b^2[\hat{\ell}_n^*, \hat{\ell}_m] - ab[\hat{\ell}_n^*, \hat{\ell}_m^*] \\ &= (a^2+b^2)\delta_{nm} \end{aligned} \tag{54}$$

となり，$a^2+b^2=1$ とすると $[\hat{a}_n, \hat{a}_m^*] = \delta_{nm}$,

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2s} \hat{a}_n^* \hat{a}_n \Big|_{s=0} \\ &= \sum \lambda_n^{-2s} \{ab\hat{\ell}_n^2 - ab(\hat{\ell}_n^*)^2 + a^2\hat{\ell}_n^*\hat{\ell}_n - b^2\hat{\ell}_n\hat{\ell}_n^*\}|_{s=0} \end{aligned} \tag{55}$$

である。$a = \pm/1\sqrt{2}$, $b = \pm/1\sqrt{2}$ (順不同)のとき，

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2s} \hat{a}_n^* \hat{a}_n \Big|_{s=0} \\ &= ab(\hat{\ell}(s)^2|_{s=0} + 1) - \frac{1}{2}\nu \end{aligned} \tag{56}$$

である。このように Bogoliubov 変換による回転の角度が固定されている。

3　Jordan 代数の表現を用いての Dirac 方程式への拡張

3.1　行列 α_n, β と非結合代数

ζ regularization の単純な Dirac 方程式への応用は

$$\left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\alpha_n\frac{\partial}{\partial x_n}+\frac{\partial}{\partial\sqrt{-1}t}+\beta m\right)=0 \tag{57}$$

である。この式から local な$\gamma_n(x)$の anti-commutator$\{\gamma_n(x),\gamma_m(x)\}=g_{nm}(x)\mathbf{1}$ の$g_{nm}(x)$は$g_{nm}(x)=\lambda_n^{-s}\lambda_m^{-s}$と global なものしか出ずあまり面白くない。Dirac 方程式を Hilbert 空間上の理論に拡張する別の一つの方法としては α_n, β を non-associative な代数に置き換える方法を提案する（[9], [10]; [4], [7]）参照)。まず non-associative algebra $\mathcal{M}$ が associative algebra $\check{m}$と対応があるものとし，$\mathcal{M}, \mathcal{N}$の積 $\times$ を以下で定義する。

$$\mathcal{M}\times\mathcal{N}:=\frac{1}{2}(\check{m}\check{n}+\check{n}\check{m}) \tag{58}$$

前に出てきた $E_nE_m=\delta_{nm}\mathbf{1}$ を計算の都合上 $\mathcal{A}_n\times\mathcal{A}_m=(R(e_n)R(e_m)+R(e_m)R(e_n))/2=-\delta_{nm}\mathbf{1}$ とし，符号の違いはあるが α_n を non-associativation したものとする。ただし，e_nは Clifford 代数の生成元 $(e_ne_m+e_ne_m=-2\delta_{nm})$ を選ぶ。β の non-associativation したものを $\mathcal{B}_\pm$ とし Clifford 代数e_nと新しい代数 $e_{\infty\pm}$ とその表現$R(e_{\infty\pm})$ を導入して次のように定義するものとする。

$$e_{\infty\pm}:=e_{\pm1}e_{\pm2}\cdots, \tag{59}$$

$$e_{\infty\pm}e_{n\pm}=(-1)^{\nu-1}e_{n\pm}e_{\infty\pm}, \tag{60}$$

$$(e_{\infty\pm})^2=(-1)^{\nu(\nu+1)/2}, \tag{61}$$

$$e_{\infty+}:(e_{\infty+})^2=+1 \text{ if } \nu\equiv0,3 \text{ mod}4;\ e_{\infty-}:(e_{\infty-})^2=-1 \text{ if } \nu\equiv1,2 \text{ mod}4, \tag{62}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_\pm\times\mathcal{B}_\pm&=\mathcal{B}_\pm{}^2\\ &:=\frac{1}{2}(R(e_{\infty\pm})R(e_{\infty\pm})+R(e_{\infty\pm})R(e_{\infty\pm}))=(-1)^{\nu(\nu+1)/2}\mathbf{1}\end{aligned} \tag{63}$$

このとき，$\mathcal{B}_\pm$と$\mathcal{A}_{n\pm}$の積は

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_\pm\times\mathcal{A}_{n\pm}&=\frac{1}{2}(R(e_{\infty\pm})R(e_{n\pm})+R(e_{n\pm})R(e_{\infty\pm}))\\ &=\frac{1}{2}(1+(-1)^{\nu-1})R(e_{\infty\pm})R(e_{n\pm})\end{aligned} \tag{64}$$

である。ただし，$\mathcal{A}_{n\pm}$ は$\mathcal{B}_\pm$に(60)の意味で対応したものとする。

3.2　行列γ_nから非結合代数である Jordan 代数への書き換え

α_n, βからγ_μをつくった時と同じように $\Gamma_\mu, \mu=1,2,\ldots;\infty$ を次で定義する。

$$\Gamma_{n\pm}:=\frac{1}{\sqrt{-1}}\mathcal{B}_\pm\times\mathcal{A}_{n\pm}=\frac{1}{2\sqrt{-1}}(1+(-1)^{\nu-1})R(e_{\infty\pm})R(e_{n\pm}),\ \Gamma_{\infty\pm}:=\mathcal{B}_\pm\times\mathbf{1}=R(e_{\infty\pm}) \tag{65}$$

Γ の anti-commutator は

$$\Gamma_m\times\Gamma_n \tag{66}$$

$$=\frac{1}{4}(1+(-1)^{\nu-1})^2(-1)^{\nu-1}(-1)^{\nu(\nu+1)/2}\delta_{mn}\mathbf{1}$$

$$=\begin{cases}0 & (\nu\equiv 0,2\ \mathrm{mod}4)\\ -\delta_{mn}\mathbf{1}\ (\nu\equiv 1\ \mathrm{mod}4), & \delta_{mn}\mathbf{1}\ (\nu\equiv 3\ \mathrm{mod}4)\end{cases} \tag{67}$$

と$(-1)^{\nu-1}$と$(-1)^{\nu(\nu+1)/2}$の符号によってΓが4種類存在する。それらを以下の表にあるように定義する。それに応じて$\mathcal{A}_n$, $\mathcal{B}$, ψも4種類存在すると考えられるがそのことは後で触れる。

ν mod4	$(-1)^{\nu(\nu+1)/2}$	$(-1)^{\nu-1}$	Γ_n	$\mathcal{A}_n$	$\mathcal{B}$
0	1	-1	Γ_{n++}	$\mathcal{A}_{n+-}$	$\mathcal{B}_{++}$
1	-1	1	Γ_{n--}	$\mathcal{A}_{n-+}$	$\mathcal{B}_{--}$
2	-1	-1	Γ_{n-+}	$\mathcal{A}_{n--}$	$\mathcal{B}_{-+}$
3	1	1	Γ_{n+-}	$\mathcal{A}_{n++}$	$\mathcal{B}_{+-}$

以下，$\Gamma_{n\pm\sigma}$, $\mathcal{A}_{n\pm\sigma}$, $\mathcal{B}_{\pm\sigma}$と書く時のσは$\pm$か$\mp$を取るものとする。このとき

$$\Gamma_m\times\Gamma_n+\Gamma_n\times\Gamma_m \tag{68}$$

$$=\frac{1}{2}(1+(-1)^{\nu-1})^2(-1)^{\nu-1}(-1)^{\nu(\nu+1)/2}\delta_{mn}\mathbf{1}$$

$$=\begin{cases}0 & (\nu\equiv 0,2\ \mathrm{mod}4)\\ -2\delta_{mn}\mathbf{1}\ (\nu\equiv 1\ \mathrm{mod}4), & 2\delta_{mn}\mathbf{1}\ (\nu\equiv 3\ \mathrm{mod}4),\end{cases} \tag{69}$$

また

$$\Gamma_\infty\times\Gamma_n=\Gamma_n\times\Gamma_\infty.$$

4次元の時と同じような手順でγ行列における Dirac 方程式を導出しよう。このとき，次の式を考える。

$$\left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-s}\,\mathcal{A}_{n\pm\sigma}\frac{\partial}{\partial x_n}-\sqrt{-1}\,\mathbf{1}\frac{\partial}{\partial t}+\mathcal{B}_{\pm\sigma}m\right)\times\psi_{\pm\sigma}=0 \tag{71}$$

$$\psi_{\pm\sigma}:=\mathbf{1}\psi_0+\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}_{n\pm\sigma}\,\psi_n+\mathcal{B}_{\pm\sigma}\,\psi_{\infty\pm} \tag{72}$$

(71)に左から$\mathcal{B}_{\pm\sigma}$を掛けると

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\sum_n\lambda_n^{-s}\frac{\partial}{\partial x_n}\left\{\mathcal{B}_{\pm\sigma}\times(\mathcal{A}_{n\pm\sigma}\times\mathbf{1})\psi_0+\sum_l\lambda_n^{-s}\mathcal{B}_{\pm\sigma}\times(\mathcal{A}_{n\pm\sigma}\times\mathcal{A}_{l\pm\sigma})\psi_l+\mathcal{B}_{\pm\sigma}\times(\mathcal{A}_{n\pm\sigma}\times\mathcal{B}_{\pm\sigma})\psi_{\infty\pm}\right\}$$
$$-\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\mathcal{B}_{\pm\sigma}\times(\mathbf{1}\times\mathbf{1})\psi_0+\sum_l\lambda_n^{-s}\mathcal{B}_{\pm\sigma}\times(\mathbf{1}\times\mathcal{A}_{l\pm\sigma})\psi_l+\mathcal{B}_{\pm\sigma}\times(\mathbf{1}\times\mathcal{B}_{\pm\sigma})\psi_{\infty\pm}\right\}$$
$$+m\left\{\mathcal{B}_{\pm\sigma}\times(\mathcal{B}_{\pm\sigma}\times\mathbf{1})\psi_0+\sum_l\lambda_l^{-s}\mathcal{B}_{\pm\sigma}\times(\mathcal{B}_{\pm\sigma}\times\mathcal{A}_{l\pm\sigma})\psi_l+\mathcal{B}_{\pm\sigma}\times(\mathcal{B}_{\pm\sigma}\times\mathcal{B}_{\pm\sigma})\psi_{\infty\pm}\right\}=0 \tag{73}$$

後の計算は$\mathcal{A}_{n\pm\sigma}$, $\mathcal{B}_{\pm\sigma}$の非可換性と非結合性に注意しなければならない。(65)と

$$\mathcal{A}_{l\pm\sigma}\times(\mathcal{A}_{m\pm\sigma}\times\mathcal{A}_{n\pm\sigma})\neq(\mathcal{A}_{l\pm\sigma}\times\mathcal{A}_{m\pm\sigma})\times\mathcal{A}_{n\pm\sigma} \tag{74}$$

$$\mathcal{B}_{\pm\sigma}\times(\mathcal{A}_{m\pm\sigma}\times\mathcal{A}_{n\pm\sigma})\neq(\mathcal{B}_{\pm\sigma}\times\mathcal{A}_{m\pm\sigma})\times\mathcal{A}_{n\pm\sigma} \tag{75}$$

$$\mathcal{B}_{\pm\sigma}\times(\mathcal{B}_{\pm\sigma}\times\mathcal{A}_{n\pm\sigma})\neq(\mathcal{B}_{\pm\sigma}\times\mathcal{B}_{\pm\sigma})\times\mathcal{A}_{n\pm\sigma} \tag{76}$$

に注意すると

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-s}\Gamma_{n\pm\sigma}\frac{\partial}{\partial x_n}+\Gamma_{\infty\pm\sigma}\frac{\partial}{\partial\sqrt{-1}t}\pm\mathbf{1}m\right)\times\psi_{\pm\sigma}=0 \tag{77}$$

である。まだ $\psi_{\pm\sigma}$ が $\mathcal{A}_{n\pm\sigma}$, $\mathcal{B}_{\pm\sigma}$ で書かれているので，Γ で表す。次の結合律が成り立つ。

$$(\Gamma_{m\pm\sigma}\times\mathcal{A}_{n\pm\sigma})\times\mathcal{B}_{\pm\sigma}=\Gamma_{m\pm\sigma}\times(\mathcal{A}_{n\pm\sigma}\times\mathcal{B}_{\pm\sigma}) \tag{78}$$

よって

$$\Psi_{\pm\sigma}:=\sqrt{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_{n\pm\sigma}\,\psi_{n\pm\sigma}+\Gamma_{\infty\pm\sigma}\,\psi_{0\pm\sigma}+\mathbf{1}\,\psi_{\infty\pm\sigma} \tag{79}$$

と置くと

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-s}\Gamma_{n\pm\sigma}\frac{\partial}{\partial x_n}+\Gamma_{\infty\pm\sigma}\frac{\partial}{\partial\sqrt{-1}t}\pm\mathbf{1}m\right)\times\Psi_{\pm\sigma}=0 \tag{80}$$

が得られる。また，Γ の積は結合律が成り立つのでこの式は 4 次元での式と同様に扱える。

3.3 e_nの演算子表現 $R(e_{n\pm})$, $R(e_{\infty\pm})$ の具体的な表現

$r(e_n):C(W^{-k})\rightarrow B(W^{-k})$($W^{-k}$: Sobolev space, C : space of Clifford algebras over W^{-k}, B : space of bounded operators [1],[8]) を用いると $R(e_{n\pm})$, $R(e_{\infty\pm})$ は

$$\left.\begin{aligned}
&R(e_{n+})_-=\begin{bmatrix} r(e_{n+}) & 0\\ 0 & r(e_{n+})\end{bmatrix}\ R(e_{\infty+})_-=\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1}I\\ -\sqrt{-1}I & 0\end{bmatrix}\\
&R(e_{n+})_+=\begin{bmatrix} r(e_{n+}) & 0\\ 0 & -r(e_{n+})\end{bmatrix},\ R(e_{\infty+})_+=\begin{bmatrix} I & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}
\end{aligned}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} e_{n+}e_{m+}+e_{m+}e_{n+}=-2\delta_{nm},\\ e_{\infty+}e_{n+}=(-1)^{\nu-1}e_{n+}e_{\infty+}\ \text{if}\ \nu\equiv 0,3\ \text{mod}4,\\ (e_{\infty+})^2=(-1)^{\nu(\nu+1)/2}=+1,\end{cases} \tag{81}$$

$$\left.\begin{aligned}
&R(e_{n-})_+=\begin{bmatrix} r(e_{n-}) & 0\\ 0 & r(e_{n-})\end{bmatrix}\ R(e_{\infty-})_+=\begin{bmatrix} 0 & I\\ -I & 0\end{bmatrix}\\
&R(e_{n-})_-=\begin{bmatrix} 0 & r(e_{n-})\\ r(e_{n-}) & 0\end{bmatrix},\ R(e_{\infty-})_-=\begin{bmatrix} \sqrt{-1}I & 0\\ 0 & -\sqrt{-1}I\end{bmatrix}
\end{aligned}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} e_{n-}e_{m-}+e_{m-}e_{n-}=-2\delta_{nm}\\ e_{\infty-}e_{n-}=(-1)^{\nu-1}e_{n-}e_{\infty-}\ \text{if}\ \nu\equiv 1,2\ \text{mod}4,\\ (e_{\infty-})^2=(-1)^{\nu(\nu+1)/2}=-1\end{cases} \tag{82}$$

と表現される。これらを次の表に $e_{n\pm}$, $e_{\infty\pm}$ の交換と $(e_{\infty\pm})^2$ の符号についてまとめた。

ν mod4	$(-1)^{\nu(\nu+1)/2}$	$(-1)^{\nu-1}$	$R(e_\infty)$	$R(e_n)$
0	1	-1	$R(e_{\infty+})_-$	$R(e_{n+})_-$
1	-1	1	$R(e_{\infty-})_+$	$R(e_{n-})_+$
2	-1	-1	$R(e_{\infty-})_-$	$R(e_{n-})_-$
3	1	1	$R(e_{\infty+})_+$	$R(e_{n+})_+$

以下に $\Gamma_{n\pm\sigma}$, $\sigma=\pm$ or $\mp$ の表現を示す。

$$\Gamma_{n+-}=\frac{1}{\sqrt{-1}}\boldsymbol{\mathcal{B}}_{+-}\times\boldsymbol{\mathcal{A}}_{n+-}=\frac{1}{2\sqrt{-1}}(1+(-1)^{\nu-1})R(e_{\infty+})_{-}R(e_{n+})_{-}=0\ (\text{if }\nu\equiv 0\ \text{mod}4)$$

$$\Gamma_{n-+}=\frac{1}{\sqrt{-1}}\boldsymbol{\mathcal{B}}_{-+}\times\boldsymbol{\mathcal{A}}_{n-+}=\frac{1}{2\sqrt{-1}}(1+(-1)^{\nu-1})R(e_{\infty-})_{+}R(e_{n-})_{+}$$
$$=\begin{bmatrix}0 & -\sqrt{-1}r(e_{n-})\\ \sqrt{-1}r(e_{n-}) & 0\end{bmatrix}(\text{if }\nu\equiv 1\ \text{mod}4)$$

$$\Gamma_{n--}=\frac{1}{\sqrt{-1}}\boldsymbol{\mathcal{B}}_{--}\times\boldsymbol{\mathcal{A}}_{n--}=\frac{1}{2\sqrt{-1}}(1+(-1)^{\nu-1})R(e_{\infty-})_{-}R(e_{n-})_{-}=0\ (\text{if }\nu\equiv 2\ \text{mod}4)$$

$$\Gamma_{n++}=\frac{1}{\sqrt{-1}}\boldsymbol{\mathcal{B}}_{++}\times\boldsymbol{\mathcal{A}}_{n++}=\frac{1}{2\sqrt{-1}}(1+(-1)^{\nu-1})R(e_{\infty+})_{+}R(e_{n+})_{+}$$
$$=\begin{bmatrix}-\sqrt{-1}r(e_{n+}) & 0\\ 0 & -\sqrt{-1}r(e_{n+})\end{bmatrix}(\text{if }\nu\equiv 3\ \text{mod}4) \tag{83}$$

3.4 Dirac 方程式の相対論的共変性

Non-associative algebra Γ_n, Γ_∞ は基本的には行列表現できないので Hermite conjugate †を取ることはできないが，積の定義と前の章から $\Gamma_n^\dagger=\Gamma_n$, $\Gamma_{\infty\pm}^\dagger=\pm\Gamma_{\infty\pm}$ とするのが妥当と思われる。今，$\bar{\Psi}_{\pm\sigma}=\Psi_\pm^\dagger\Gamma_{\infty\sigma}$ と置く。

この問題における Γ 行列と γ 行列の違いは，まず 4 次元における γ_4 にあたるものが確定できない。Γ_nの n の極限におけるものであるからである。この極限のものを γ_5 にあたる Γ_∞と同一視することにする。

次にこの問題における Γ 行列と γ 行列の違いは，交換・反交換性，つまり

$$\Gamma_m\times\Gamma_n=\Gamma_n\times\Gamma_m\ (m\neq n,\ m,\ n=1,2,\ldots) \tag{84}$$

$$\gamma_\mu\gamma_\nu=-\gamma_\nu\gamma_\mu\ (\mu\neq\nu,\ \mu,\nu=1,2,3,4) \tag{85}$$

また，Dirac 方程式の相対論的共変性を見る場合にはこれらの Hermite conjugate における符号の変化である。Γ 行列と γ 行列では

$$\Gamma_{n\pm\mu}^\dagger=\Gamma_{n\pm\sigma},\ \Gamma_{\infty\pm\sigma}^\dagger=\pm\Gamma_{\infty\pm\sigma}, \tag{86}$$

$$\gamma_\mu^\dagger=\gamma_\mu,\ \gamma_5^\dagger=\gamma_5,\ \mu=1,2,3,4 \tag{87}$$

となる。あと，Γ_n, Γ_∞の関係（Γ_∞は$n\to\infty$の意味）と γ_μ, γ_4 の関係は

$$\Gamma_n\times\Gamma_\infty=\Gamma_\infty\Gamma_n,\ n=1,2,\ldots \tag{88}$$

$$\gamma_a\gamma_4=-\gamma_4\gamma_a,\ a=1,2,3 \tag{89}$$

となり違いがある。以上の交換・反交換性の違いから $\Gamma_{\infty\pm\sigma}=\pm\Gamma_{\infty\pm\sigma}$ が重要な意味を持ってくる。

4 次元の時と同じように Dirac 方程式の相対論的共変性が満たされるのは，$\Gamma_{\infty-\sigma}=-\Gamma_{\infty-\sigma}$ の場合である。このとき次の式を満たす。

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-s}\Gamma_{n-\sigma}\frac{\partial}{\partial x_n}+\Gamma_{\infty-\sigma}\frac{\partial}{\partial\sqrt{-1}t}-\mathbf{1}m\right)\times\bar{\Psi}_{-\sigma}=0 \tag{90}$$

上式をを相対論的 Dirac kind 方程式と定義し，

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-s}\Gamma_{n+\sigma}\frac{\partial}{\partial x_n}+\Gamma_{\infty+\sigma}\frac{\partial}{\partial\sqrt{-1}t}+\mathbf{1}m\right)\times\bar{\Psi}_{+\sigma}=0 \tag{91}$$

を非相対論的 Dirac kind 方程式と定義する。$\Gamma_{\infty--}, \Gamma_{\infty+-}$は 0 となり今後の問題である。

References

[1] Asada,A. : Clifford algebras on Sobolev spaces, to appear in BSG Proceedings.

[2] Asada,A.-Tanabe,N. : Regularized Hilbert space Laplacian, longitude of Hilbert space, to appear.

[3] Connes,A.-Moscovici,H. : The local index formula in noncommutative geometry, Geom. Funct. Anal.,**5**(1995), 174-243.

[4] Dirac,P.A.M. : Spinors in Hilbert space, New York, 1974.

[5] Erdelyi, et al. : Higher transcendental functions, II, New York, 1953.

[6] Gilkey,P. : The Geometry of Spherical Space Groups, World Sci., 1989.

[7] Kerner,E.H : "Nonassociative structure of quantum mechanics in curved space-time", J. Math. Phys., **40** (1999), 4664-4676.

[8] Kostant,B.-Sternberg,S. : Symplectic reduction, BRS cohomology, and infinite-dimensional Clifford algebras, Ann. Phys., **176** (1987), 49-113.

[9] Petrosanu, D. : About a Dirac kind operator, Stud. Crc. Mat., **49** (1997), 103-106.

[10] Tutoi, A. : Sur un fibre algebrique de Jordan, Proc. Conf. Geom. Timisoara, 1984, 309-311.

Regularization of differential equations on a Hilbert space and non-associative algebra.

Nobuhiko TANABE

Enviromental System Science,
Graduate School of Science and Technology,
Shinshu University

Abstract

Laplace operator on a Hilbert space can not even act on the metric function. To overcome this difficult, we defined regularization of Laplacian. In particular, we computed polar coordinate expression of regularized Laplacian which can not do without regularization[2]. We try to rewrite given regularized "spherical" Laplacian from the point of quantum mechanics on an infinite dimensional space. We eliminate the difficulty comes from infinite dimensional property of the space, by introducing a Jordan algebra, which is non-associative. In finite dimensional case, Jordan algebra has been used to define Dirac kind operator ([5],[10]). We adopt this argument to the infinite dimensional case and define an infinite dimensional Dirac kind operator.