

---

論 文

---

## 画像のサブバンド符号化に用いる多帯域分割 SSKF の設計手法

井澤 裕司<sup>†a)</sup>The Design Scheme of Multi-Band Splitting Symmetric Short Kernel Filters  
for Subband Image CodingYuji IZAWA<sup>†a)</sup>

あらまし 本研究は、画像のサブバンド符号化に用いるフィルタバンクの一手法である SSKF (Symmetric Short Kernel Filter) の設計手法に関するものである。この手法は、完全再構成と直線位相、双直交の条件を満たすフィルタを用いて、信号の周波数成分を複数の帯域に分割する方式である。本論文では、基本拡張行列を用いて、ブロック単位の直交変換を双直交の LBT (Lapped Biorthogonal Transform) に拡張し、その変換係数を帯域ごとに並べ換えることにより、任意の  $n$  個の帯域に分割する SSKF を構成する手法を提案する。具体的には、ブロックサイズが 2 のアダマール変換行列と、極めて単純な構造をもつ 2 種類の基本拡張行列を用いて、例えば [4,4], [6,6] のような任意の偶数タップをもつ 2 分割の SSKF を構成することができる。更に、ブロックサイズ  $n$  の直交変換行列と、 $n$  種類の基本拡張行列を組み合わせることにより、完全再構成、直線位相、双直交の多帯域分割 SSKF を構成する手法を提案する。更に、2 分割 SSKF [6,6] の符号化効率について、標準画像を用いたシミュレーション実験を行い、入力信号を AR モデルとみなした場合の符号化ゲインの結果と比較し、符号化効率を決定する要因について分析する。

キーワード 直交変換, LOT, LBT, SSKF, 符号化ゲイン

## 1. まえがき

画像の変換符号化には、直交変換を用いたブロック符号化や、フィルタバンクを用いたサブバンド符号化がある。DCT (Discrete Cosine Transform) [1] に代表される直交変換では、ブロックの基底は正規直交系を構成するが、圧縮率を上げるとブロック境界付近に特有のひずみが発生する。Malver らは、DCT の偶数次と奇数次の基底を組み合わせ、ブロックサイズの 2 倍の基底に拡張することにより、直交性と直線位相、完全再構成の条件を満たす LOT (Lapped Orthogonal Transform) が構成できることを示し、ブロックひずみが軽減されることを明らかにした [2]。更に、拡張した基底の対称性を利用して、隣接するブロックの変換をブロック内の遅延素子で代行し、FFT のようなバタフライ演算を導入することにより演算量を低減する

手法を提案した [3]。

一方のフィルタバンクは、入力信号を複数の帯域に分割するフィルタ群とサブサンプラーにより、入力と同数の周波数成分に変換する手法である。合成側の出力信号は、アップサンプラー後の合成側フィルタ出力の総和で表される。

均一な帯域幅をもち、遅延を除いて入力と出力が一致する完全再構成の条件を満たすフィルタバンクの構成法については、数多くの研究が行われている [4]。例えば、Princen らは、エリアシングの影響を除去する完全再構成フィルタバンクの構成法を示した [5]。また、画像のサブバンド符号化への応用として、直線位相をもつ完全再構成の 2 分割双直交フィルタ SSKF (Symmetric Short Kernel Filter) が、Gall らにより提案されている [6]。

一方、Vetterli らはいわゆるポリフェーズ行列を用いて、LOT とフィルタバンクが等価な変換であることを示し、完全再構成や直交性を有するフィルタの設計法を、一定の遅延を許容するポリフェーズ行列の正則性やパラユニタリ性と位置づけて解析する手法を提案

<sup>†</sup>信州大学工学部情報工学科、長野市Faculty of Engineering, Shinshu University, 4-17-1  
Wakasato, Nagano-shi, 380-8553 Japan

a) E-mail: yizawa@cs.shinshu-u.ac.jp

## 論文／画像のサブバンド符号化に用いる多帯域分割 SSKF の設計手法

した[7], [8]. また, 甲藤らもサブバンド符号化と LOT の等価性を指摘し[9], 最適な符号化効率を与える奇数タップの SSKF の特性について報告している[10].

LOT では変換の対称性が生かせるよう, ブロックサイズを 2 のべき乗に設定していた[2]. フィルタバンクの場合, これらはチャネル数あるいは分割数に相当するが, Soman らはその条件を一般化し, 直交性と直線位相をもつ任意のチャネル数のフィルタバンクを構成する手法を明らかにした[11]. また, Queiroz らはブロックサイズの整数倍の基底をもつ LOT の構成法について報告している[12], [13]. これらは, いずれも完全再構成, 直線位相, 直交性を満たしているが, フィルタの符号化ゲインは, 直交性を満たすときに必ずしも最適化されるとは限らず, その条件を緩和して得られる双直交の LBT (Lapped Biorthogonal Transform) の方が高くなる可能性が示された[14]. これを受け, Malver は完全再構成・非直線位相の LBT を, Chan や Tran らは, 完全再構成・直線位相の LBT をそれぞれ提案している[15]～[17]. また, 谷本らも SSKF の双直交性がエンファシスの効果をもたらすことを報告している[18], [19].

一方 2 分割のフィルタバンクにおいて, 低域について階層的に分割を繰り返すことにより, いわゆるウェーブレット変換に拡張することができる. このウェーブレット変換は, 一つのスケーリング関数とこれから派生するウェーブレット関数で構成される[4], [20]. 完全再構成, 直交性, 直線位相を満たすウェーブレット変換は, いわゆる Haar 変換のみであるが, この基底は方形状のため符号化には適さない. そこで直交条件を緩和して得られる双直交のウェーブレット変換について様々な研究が行われ[21], JPEG2000 にも採用されている. 最近は, 複数のスケーリング関数とウェーブレット関数で構成されるマルチウェーブレット変換が提案され, 直交性と直線位相の条件を満たすことから, ラティス構造を用いた設計法など様々な研究が行われている[22], [23].

直線位相のフィルタバンクや LOT, LBT では, フィルタ係数すなわち基底の対称性が条件となる. フィルタバンクの設計には, ほとんどの場合ポリフェーズ表現が用いられており[24], [25], ラティス構造との整合性から, 対称軸がブロックの境界に設定されていた. しかし, DCT 基底の対称軸は本来ブロックの中央にあり, その軸を中心として左右均等に拡張するのが自然である.

本論文では, ポリフェーズ表現を用いず, ブロックサイズ  $n$  の直交変換について, その対称軸を保存しながら, 基本拡張行列を用いて直接 LBT に拡張し, 高次の多分割 SSKF (フィルタバンク) を構成する手法を提案する. 遅延要素  $z^{-1}$  の多項式で表されるポリフェーズ行列の正則性を論じる従来の解析手法に比べ, 対称な係数をもつ直交行列に, 数種類の正則な基本拡張行列を乗じる単純な操作で表現できる. 更に, 1 回の行列演算につき, フィルタの係数は両側に 1 サンプルずつ拡張されるため, フィルタサイズの設計における自由度も増すことになる.

更に, 2 分割 SSKF [6,6] の符号化効率について, 標準画像を用いたシミュレーション実験を行い, 入力信号を AR モデルとみなした場合の符号化ゲインの値と比較し, 符号化効率を決定する要因について分析する.

## 2. 2 分割 SSKF の構成法

本章では, 行列表現を用いて直交変換を LBT に拡張することにより, 完全再構成と直線位相の条件を満たし, 任意の偶数タップをもつ 2 分割 SSKF を構成する手法について述べる.

### 2.1 ブロックサイズ 2 のアダマール変換

今一次元の入力数が  $2N$  ( $N$ : 正の整数) の変換符号化を考える. ブロックサイズ 2 の直交変換はアダマール変換となり, 以下に示す  $(2N \times 2N)$  の行列  $T_H$  により表すことができる.

$$T_H = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (1)$$

この行列は正則で, その逆行列はその 2 倍に等しい. すなわち

$$T_H^{-1} = 2 \cdot T_H^t = 2 \cdot T_H \quad (2)$$

が成立する. 画像信号と変換後の係数をそれぞれ  $(2N \times 2N)$  の行列  $S$ ,  $C$  により表すと, 変換(送信側)の処理は,

$$C = T_H \cdot S \cdot T_H \quad (3)$$

逆変換（受信側）の処理は、

$$S = 4 \cdot T_H \cdot C \cdot T_H \quad (4)$$

で表される。なお、変換係数  $C$  を量子化せず、直接逆変換するとともとの画像信号  $S$  がひずみなく再現されることを明らかである（完全再構成の条件）。

## 2.2 SSKF ( $2 \times 2$ )

最も基本的な構成は、低域通過フィルタ (LPF) と高域通過フィルタ (HPF) を用いて 2 分割する場合である。図 1 にその構成を示す。図の左が分割側であり、右が合成側となる。分割側では低域と高域に分離した後、 $1/2$  にサブサンプルするため、サンプル数は変化しない。合成側では二つの信号について、各サンプルの間に値 0 を挿入し、LPF と HPF に入力する。それらのフィルタ出力の和が合成側出力となる。

画像信号では、水平・垂直成分をそれぞれ 2 分割するため、計四つの帯域に分割される。2 分割サブバンド符号化の基本となるものは  $(2 \times 2)$  の SSKF であり、直交性、完全再構成、直線位相の 3 条件を満たす唯一の変換となる [6], [20]。

図 1 で使用する四つのフィルタの伝達関数の例を、以下に示す。

$$H_0(z) = \frac{1}{2} \{1 + z^{-1}\} \quad (5)$$

$$H_1(z) = \frac{1}{2} \{-1 + z^{-1}\} \quad (6)$$

$$G_0(z) = 1 + z^{-1} \quad (7)$$

$$G_1(z) = -1 + z^{-1} \quad (8)$$

この SSKF を、次の行列  $T_2$  で表すことができる。

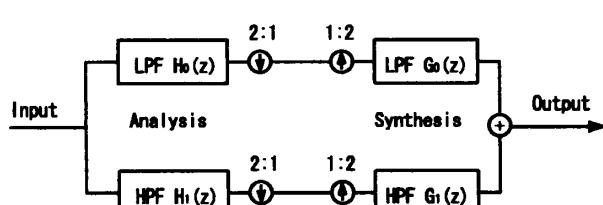


図 1 2 分割サブバンド符号化の構成（一次元）

Fig. 1 A construction of 2-band subband filter system. (1 dimensional)

$$T_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (9)$$

この行列は正則で、逆行列はその転置行列の 2 倍に等しい。すなわち

$$T_2^{-1} = 2 \cdot T_2^t$$

となる。なお、 $T_2$  の上半分がタップ係数  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2}$  の LPF, 下半分がタップ係数  $-\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2}$  の HPF に相当し、1 サンプルごとに間引かれた結果が変換出力となる。また、 $T_2^{-1}$  の左半分は 0 挿入された後の LPF, 右半分は 0 挿入された後の HPF に相当し、その和が合成側の出力となる。フィルタ  $G_0(z)$ ,  $G_1(z)$  の前段でサンプル間に 0 が挿入されたため、これらのフィルタの偶数タップの総和と奇数タップの総和が交互に出力されることになる。ここで、 $(2N \times 2N)$  の行列において、奇数行を上半分、偶数行を下半分に並べ換える操作を行う行列  $T_X$  を次のように定義する。

$$T_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

なお、 $T_X^{-1} = T_X^t$  が成り立つことは明らかである。このとき、以下の関係が成立する。

$$T_2 = T_X \cdot T_H \quad (11)$$

すなわち、ブロックサイズ 2 のアダマール変換を表す行列  $T_H$  の行を並べ換えると、 $(2 \times 2)$  の SSKF になる。

また、 $E_0$  を単位行列として、

## 論文／画像のサブバンド符号化に用いる多帯域分割 SSKF の設計手法

$$T_2 \cdot T_2^t = \frac{1}{2} E_0 \quad (12)$$

の関係が成立し、完全再構成、直線位相、直交性の条件を満たしている。しかしながら、この $(2 \times 2)$ のSSKFの符号化効率は他のフィルタに及ばず、一般には直交性の条件を緩和して設計した、より次数の高い双直交SSKFが用いられている[6]。

**2.3 LBT [4,4]**

本節では、ブロックサイズ2のアダマール変換を拡張することにより、[4,4]のLBTが導出されることを示す。なお、二つの基底がそれぞれ四つの係数で構成されているため、本論文では[4,4]という表現を用いることにする。

今、パラメータ  $a, b$  を用いて次の基本拡張行列  $T_{e1}$  を定義する。

$$T_{e1} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad (13)$$

この行列は  $a \neq \pm b$  のとき正則となり、逆行列  $T_{e1}^{-1}$  は以下のようになる。

$$T_{e1}^{-1} = \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & -b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -b & a & 0 \\ -b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad (14)$$

ここで、行列  $T_H$  と行列  $T_{e1}$  の積を  $T_{L4}$  とおくと、

$$T_{L4} = T_H \cdot T_{e1} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} a & a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ a & -a & -b & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & b & a & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & a & -a & -b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a \\ -b & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & -a \end{pmatrix} \quad (15)$$

$a \neq \pm b$  のときこの行列は正則となり、逆行列は次のようになる。

$$T_{L4}^{-1} = T_{e1}^{-1} \cdot T_H^{-1} = \frac{1}{a^2 - b^2}$$

$$\begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 & 0 & \cdots & -b & b \\ a & -a & -b & -b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -b & b & a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -a & -b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & b & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a \\ -b & -b & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & -a \end{pmatrix} \quad (16)$$

これらは、ブロックにまたがる四つの係数を有するLBTに相当し、変換と逆変換は以下のようになる。

$$C = T_{L4} \cdot S \cdot T_{L4}^t \quad (17)$$

$$S = T_{L4}^{-1} \cdot C \cdot \{T_{L4}^{-1}\}^t \quad (18)$$

式(15)より、低域は  $\frac{b}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{b}{2}$ 、高域は  $\frac{b}{2}, \frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}$  を基底とするLBTであることが分かる。

**2.4 SSKF [4,4]**

前節で求めた[4,4]のLBTを表す行列の行を入れ換えることにより、[4,4]のSSKFに相当する行列  $T_4$  が導出できる。すなわち、以下の関係式が成立する。

$$T_4 = T_X \cdot T_{L4} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} a & a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & b & a & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a \\ a & -a & -b & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & b & a & -a & -b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -b & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & -a \end{pmatrix} \quad (19)$$

なお、 $(2 \times 2)$  の SSKF 行列の右から直接行列  $T_{e1}$  を乗じた  $T_2 \cdot T_{e1}$  が  $T_4$  に等しいことは明らかである。

ここで、分割側 LPF の伝達関数  $H_0(z)$  は

$$H_0(z) = \frac{1}{2}\{b + az^{-1} + az^{-2} + bz^{-3}\} \quad (20)$$

分割側 HPF の伝達関数  $H_1(z)$  は

$$H_1(z) = \frac{1}{2}\{-b - az^{-1} + az^{-2} + bz^{-3}\} \quad (21)$$

となり、タップ係数が対称のため直線位相の条件を満たしている。HPF の直流利得  $H_1(1) = 0$  は常に成立するが、LPF の直流利得  $H_0(1) = a + b$  となり、

$$a + b = 1 \quad (22)$$

とおくと、残る自由度は 1 となる。なお、ナイキスト周波数における LPF の利得  $H_0(-1) = 0$  は常に成立するが、HPF のナイキスト周波数における利得は  $H_1(-1) = a - b = 1 - 2b = 2a - 1$  となる。

一方合成側については、以下のようになる。

$$T_4^{-1} = \{T_2 \cdot T_{e1}\}^{-1} = 2 \cdot T_{e1}^{-1} \cdot T_2^t = \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & -b & a & \cdots & b \\ a & -b & 0 & \cdots & 0 & -a & \cdots & 0 \\ -b & a & 0 & \cdots & 0 & b & \cdots & 0 \\ 0 & a & -b & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -b & a & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b & 0 & \cdots & -b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 & \cdots & a \\ -b & 0 & 0 & \cdots & a & -b & \cdots & -a \end{pmatrix} \quad (23)$$

なお、合成側 LPF の伝達関数  $G_0(z)$  は

$$G_0(z) = \frac{1}{a^2 - b^2}\{-b + az^{-1} + az^{-2} - bz^{-3}\} \quad (24)$$

同じく合成側 HPF の伝達関数  $G_1(z)$  は

$$G_1(z) = \frac{1}{a^2 - b^2}\{-b + az^{-1} - az^{-2} + bz^{-3}\} \quad (25)$$

となる。式 (22) が成立するとき、LPF の直流利得  $G_0(1) = 2$ 、HPF の直流利得  $G_1(1) = 0$ 、LPF のナイキスト周波数における利得  $G_0(-1) = 0$  となり、 $a$ 、 $b$  に依存しない。これに対し、HPF のナイキスト周波数における利得  $G_1(-1) = \frac{2}{b-a} = \frac{2}{2b-1}$  となる。なお、 $a = 1$ 、 $b = 0$  のとき  $(2 \times 2)$  の SSKF になることは明らかである。

一方、式 (20)、(25) より、

$$H_0(-z) = -\frac{a^2 - b^2}{2} \cdot G_1(z) \quad (26)$$

式 (21)、(24) より、

$$H_1(-z) = \frac{a^2 - b^2}{2} \cdot G_0(z) \quad (27)$$

となり、 $a \neq \pm b$  のとき双直交の関係が成立することが分かる。

なお、 $a = \frac{3}{4}$ 、 $b = \frac{1}{4}$ 、あるいは  $a = \frac{3}{2}$ 、 $b = -\frac{1}{2}$  とおくと、文献 [6] に示されている [4,4] のフィルタとなる。

## 2.5 LBT [6,6]

次に、二つのパラメータ  $c$ 、 $d$  を用いて、第 2 の基本拡張行列  $T_{e2}$  を定義する。

$$T_{e2} = \begin{pmatrix} c & d & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ d & c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & c & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & d & c \end{pmatrix} \quad (28)$$

この行列は  $c \neq \pm d$  のとき正則となり、逆行列  $T_{e2}^{-1}$  は以下のようになる。

$$T_{e2}^{-1} = \frac{1}{c^2 - d^2}$$

## 論文／画像のサブバンド符号化に用いる多帯域分割 SSKF の設計手法

$$\cdot \begin{pmatrix} c & -d & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -d & c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -d & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & c & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & -d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -d & c \end{pmatrix} \quad (29)$$

このように前節で求めた [4,4] の LBT の右から第 2 の基本拡張行列を乗じた  $T_{L4} \cdot T_{e2}$  は、[6,6] の LBT に対応する。

$$T_{L6} = T_{L4} \cdot T_{e2} = T_H \cdot T_{e1} \cdot T_{e2} = \frac{1}{2}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \beta & \gamma & 0 & \cdots & \gamma & \beta \\ \delta & -\delta & -\beta & -\gamma & 0 & \cdots & \gamma & \beta \\ \gamma & \beta & \alpha & \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \gamma & \beta & \delta & -\delta & -\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta & \gamma & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & \alpha \\ -\beta & -\gamma & 0 & 0 & 0 & \cdots & \delta & -\delta \end{pmatrix} \quad (30)$$

ここで、 $\alpha = a(c+d)$ ,  $\beta = bc$ ,  $\gamma = bd$ ,  $\delta = a(c-d)$  である。このとき、逆行列は以下のようになる。

$$T_{L6}^{-1} = T_{e2}^{-1} \cdot T_{e1}^{-1} \cdot T_H^{-1} \quad (31)$$

[8,8] の LBT を表す変換行列  $T_{L8}$  は、 $T_{L6}$  の右辺から  $T_{e1}$  を乘すればよい。更に高い次数の偶数次 LBT についても、 $T_{e1}$ ,  $T_{e2}$  を交互に右辺から乗じることにより導出することができる。

## 2.6 SSKF [6,6]

[6,6] の LBT の行を入れ換えることにより、[6,6] の SSKF を構成することができる。すなわち、

$$T_6 = T_X \cdot T_{L6} \quad (32)$$

が成立する。

なお、前節で求めた [4,4] の SSKF の右から第 2 の基本拡張行列を乗じた  $T_4 \cdot T_{e2}$  が、[6,6] の SSKF、すなわち  $T_6$  に等しくなる。

$$T_6 = T_4 \cdot T_{e2} = T_2 \cdot T_{e1} \cdot T_{e2} = \frac{1}{2}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \beta & \gamma & \cdots & 0 & \gamma & \beta \\ \gamma & \beta & \alpha & \alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \beta & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta & \gamma & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha & \alpha \\ \delta & -\delta & -\beta & -\gamma & \cdots & 0 & \gamma & \beta \\ \gamma & \beta & \delta & -\delta & -\beta & \cdots & 0 & 0 \\ -\beta & -\gamma & 0 & 0 & \cdots & \beta & \delta & -\delta \end{pmatrix} \quad (33)$$

$a \neq \pm b$ かつ  $c \neq \pm d$  のとき、 $T_6$  は正則となり、次の逆行列が存在する。

$$\begin{aligned} T_6^{-1} &= T_{e2}^{-1} \cdot T_4^{-1} \\ &= T_{e2}^{-1} \cdot T_{e1}^{-1} \cdot T_2^{-1} \\ &= \frac{1}{a^2 - b^2} \cdot \frac{1}{c^2 - d^2} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \delta & \gamma & \cdots & -\beta & \alpha & \gamma & \cdots & \beta \\ \delta & -\beta & \cdots & \gamma & -\alpha & -\beta & \cdots & -\gamma \\ -\beta & \delta & \cdots & 0 & \beta & \alpha & \cdots & 0 \\ \gamma & \delta & \cdots & 0 & -\gamma & -\alpha & \cdots & 0 \\ 0 & -\beta & \cdots & 0 & 0 & \beta & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma & \cdots & 0 & 0 & -\gamma & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma & 0 & \cdots & \delta & \gamma & 0 & \cdots & \alpha \\ -\beta & 0 & \cdots & \delta & -\beta & 0 & \cdots & -\alpha \end{pmatrix} \quad (34)$$

ここで、 $\alpha = a(c+d)$ ,  $\beta = bc$ ,  $\gamma = bd$ ,  $\delta = a(c-d)$  である。

このとき、以下の関係式が成立する。

$$H_0(z) = \frac{1}{2} \cdot \{bd + bcz^{-1} + a(c+d)z^{-2} + a(c+d)z^{-3} + bcz^{-4} + bdz^{-5}\} \quad (35)$$

$$H_1(z) = \frac{1}{2} \cdot \{bd + bcz^{-1} + a(c-d)z^{-2} - a(c-d)z^{-3} - bcz^{-4} - bdz^{-5}\} \quad (36)$$

$$G_0(z) = \frac{1}{a^2 - b^2} \cdot \frac{1}{c^2 - d^2} \cdot \{bd - bcz^{-1} + a(c-d)z^{-2} + a(c-d)z^{-3} - bcz^{-4} + bdz^{-5}\} \quad (37)$$

$$G_1(z) = \frac{1}{a^2 - b^2} \cdot \frac{1}{c^2 - d^2} \cdot \{-bd + bcz^{-1}$$

$$\begin{aligned} & -a(c+d)z^{-2} + a(c+d)z^{-3} \\ & -bcz^{-4} + bdz^{-5} \} \end{aligned} \quad (38)$$

上式より、タップ係数が対称となることが分かる。一方、分割側 LPF の直流利得  $H_0(1)$  は以下のようになる。

$$H_0(1) = (a+b)(c+d) \quad (39)$$

更にナイキスト周波数における利得は  $H_0(-1) = 0$  となる。一方、分割側 HPF の直流利得は  $H_1(1) = 0$  となるが、ナイキスト周波数における利得  $H_1(-1)$  は

$$H_1(-1) = (a-b)(c-d) \quad (40)$$

となる。このとき、以下の関係が成立する。

$$H_0(-z) = \frac{(a^2 - b^2)(c^2 - d^2)}{2} \cdot G_1(z) \quad (41)$$

$$H_1(-z) = -\frac{(a^2 - b^2)(c^2 - d^2)}{2} \cdot G_0(z) \quad (42)$$

これより、 $a \neq \pm b$ ,  $c \neq \pm d$  のとき双直交の関係が成立することが分かる。

[8,8] の SSKF を表す変換行列  $T_8$  は、 $T_6$  の右辺から  $T_{e1}$  を乘すればよい。更に高い次数の偶数次 SSKF についても、 $T_{e1}$ ,  $T_{e2}$  を交互に右辺から乗じることにより、完全再構成、直線位相、双直交の条件を満たす SSKF を設計することができる。なお、[5,3] や [5,7] のような奇数タップの SSKF も、奇数の係数を有する LBT から導出できる。すなわち、奇数行が 1 項、偶数行が 3 項、若しくは偶数行が 1 項、奇数行が 3 項からなる基本行列に 2 種類の正則な基本拡張行列を順次乗じることにより、高次の LBT 及び SSKF を求めることが可能である。

なお、 $a = c = 1$ ,  $b = d = 0$  の場合を除き、拡張行列  $T_{e1}$ ,  $T_{e2}$  は直交行列にはならない。このため  $T_{L4}$  も直交せず LBT となる。しかし、例えば  $(2 \times 2)$  のアダマール行列を組み込んで直交する  $T_{e1}$  を構成すれば、二つの直交行列の積で表される  $T_{L4}$  も直交し LOT に拡張できる。ただし、それらの係数は非対称となり直線位相を満たさない。一方、分割数を大きくすれば設計の自由度が増し、直線位相をもつ LOT が構成できることはいうまでもない。

### 3. 3 分割 SSKF の構成法

本章では帯域を 3 分割する場合について、前章と同様の手法が有効であることを示す。

#### 3.1 ブロックサイズ 3 の直交変換

ブロックサイズが 3 の直交変換を用いた拡大変換行列  $(3N \times 3N)$  を  $T_{B3}$  とする。

$T_{B3}$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & -\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\gamma}{2} & \gamma & -\frac{\gamma}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{2} & \gamma & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{\gamma}{2} & \gamma & -\frac{\gamma}{2} \end{pmatrix} \quad (43)$$

ここで、 $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\gamma = -\sqrt{\frac{2}{3}}$  のとき、 $(3 \times 3)$  の DCT に等価となる。この逆行列は  $T_{B3}^t$  であり、直交行列となる。

#### 3.2 LBT [5,5,5]

次に  $(3N \times 3N)$  の基本拡張行列  $T_{t1}$  を定義する。

$$T_{t1} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad (44)$$

ここで  $T_{B3} \cdot T_{t1}$  を  $T_{L5}$  とおくと、次のようにになる。

$$T_{L5} = T_{B3} \cdot T_{t1}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha & \alpha a & \alpha b & 0 & \cdots & 0 & \alpha b \\ \beta a & 0 & -\beta a & -\beta b & 0 & \cdots & 0 & \beta b \\ -\frac{\gamma a}{2} & \gamma & -\frac{\gamma a}{2} & -\frac{\gamma b}{2} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{\gamma b}{2} \\ 0 & 0 & \alpha b & \alpha a & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta b & \beta a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha b & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & \alpha a \\ -\beta b & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\beta a \\ -\frac{\gamma b}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma & -\frac{\gamma a}{2} \end{pmatrix} \quad (45)$$

これは、直線位相の 5 タップ 3 係数からなる LBT であり、ここでは [5,5,5] のように表すことにする。

### 3.3 SSKF [5,5,5]

行の並べ換えを行う行列  $T_{X3}$  を定義する。

$$T_{X3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (46)$$

これより、 $T_5$  は 3 分割の SSKF を表すことが分かる。すなわち、直交変換行列  $T_{B3}$  に基本拡張行列  $T_{t1}$  を乗じることにより、ブロック間にまたがる係数を有する LBT ( $T_{L5}$ ) が導かれ、この行列の行を入れ換えることにより、各 5 タップの 3 分割 SSKF が求められる。次に、第 2、第 3 の基本拡張行列  $T_{t2}$ 、 $T_{t3}$  を以下のように定義する。

$$T_{t2} = \begin{pmatrix} c & d & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & d & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d & c \end{pmatrix} \quad (48)$$

$$T_{t3} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ f & 1 & f & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & f & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & e \end{pmatrix} \quad (49)$$

このとき、式 (47) に示す関係が成立する。

$$T_5 = T_{X3} \cdot T_{L5} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha & \alpha a & \alpha b & \cdots & 0 & 0 & \alpha b \\ 0 & 0 & \alpha b & \alpha a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha b & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha a & \alpha & \alpha a \\ \beta a & 0 & -\beta a & -\beta b & \cdots & 0 & 0 & \beta b \\ 0 & 0 & \beta b & \beta a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\beta b & 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta a & 0 & -\beta a \\ -\frac{\gamma a}{2} & \gamma & -\frac{\gamma a}{2} & -\frac{\gamma b}{2} & \cdots & 0 & 0 & -\frac{\gamma b}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\gamma b}{2} & -\frac{\gamma a}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{\gamma b}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{\gamma a}{2} & \gamma & -\frac{\gamma a}{2} \end{pmatrix} \quad (47)$$

ここで  $T_{B3} \cdot T_{t1} \cdot T_{t2}$  を  $T_{L7}$  とおくと, [7,7,7] の LBT に対応する。更にこの右側から  $T_{t3}$  を乗じると, [9,9,9] の LBT が導出できる。

3分割の場合, 基本拡張行列は  $T_{t1}$  と  $T_{t2}$ ,  $T_{t3}$  の3種類であり, これらを次々に乗じて行の並べ換えを行うことにより, 更に高次の3分割 SSKF を構成することができる。

これらの基本拡張行列は,  $a \neq \pm b$ ,  $c \neq 0$ ,  $e \neq 0$  のとき正則となり, それぞれ逆行列が存在する。また, これらの行列は独立ではなく, その間に以下のような規則がある。すなわち,  $T_{t1}$  の非対角項の  $b$  を斜め方向に一つ移動させると,  $T_{t2}$  と同形になる。例えば,  $T_{t1}$  の(3,4)項の  $b$  を右下の(4,5), (4,3)項の  $b$  を左上の(3,2)のように移動させる。 $T_{t3}$  についても,  $T_{t2}$  の非対角項  $d$  を斜め方向に移動させればよい。更に  $T_{t3}$  の  $f$  を移動させると,  $T_{t1}$  の形に戻り, 基本拡張行列は3種類存在することが分かる。

#### 4. 4分割以上のSSKF

分割数が4以上の場合についても, 前章の手法を適用することができる。

##### 4.1 4分割の場合

4分割のSSKFでは,  $(4 \times 4)$  のアダマール変換行列や,  $(4 \times 4)$  のDCT行列を核として, 以下に示す基本拡張行列を乗じる。

$$T_{q1} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} \quad (50)$$

これにより, ブロックサイズが4のLBT [6,6,6,6], およびSSKFが導かれる。また, 以下の基本拡張行列を順次乗じれば, タップ数が2ずつ増えたSSKFに拡張することができる。

$$T_{q2} = \begin{pmatrix} f & e & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & e & f \end{pmatrix} \quad (51)$$

$$T_{q3} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & g & h & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h & g & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & i \end{pmatrix} \quad (52)$$

$$T_{q4} = \begin{pmatrix} j & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ k & l & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & l & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & j \end{pmatrix} \quad (53)$$

なお,  $T_{q1}$  の非対角項  $b$  を斜め方向に一つずつ移動させていくと,  $T_{q2}$ ,  $T_{q3}$ ,  $T_{q4}$  の形になる。

##### 4.2 5分割以上の場合

これまで述べたSSKFの設計手法を, 5分割以上の場合に拡張することができる。なお  $n$  分割の場合, 基本拡張行列の形は  $n$  種類存在することは明らかである。

#### 5. 2分割SSKFの符号化ゲイン

甲藤らは, ARモデルを用いて入力信号をモデリングした場合の符号化ゲイン[10]を導出し, これによりサブバンド符号化の特性が評価できることを示した。本章では, 2分割SSKF [6,6] の符号化ゲインを求め, その最適化を図る。

### 5.1 符号化ゲイン

分割数  $K$  のサブバンド符号化の符号化ゲインは、次式で表される。

$$G_{SBC} = \frac{1}{\prod_{k=0}^{K-1} \left( \frac{A_k \cdot B_k}{\epsilon_k} \right)^{\epsilon_k}} \quad (54)$$

$$\sum_{k=0}^{K-1} \epsilon_k = 1 \quad (55)$$

ここで、 $A_k$  はフィルタ係数と入力の相関から、 $B_k$  はフィルタ係数と量子化誤差の相関から決定される定数である。2分割 SSKF [6,6] の場合、 $K = 2$ 、 $\epsilon_0 = \epsilon_1 = 0.5$  となり、 $A_k$ 、 $B_k$  はそれぞれ以下のように求められる。

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \frac{1}{2} (\alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma) \rho \\ &\quad + \alpha(\beta + \gamma) \rho^2 + \frac{1}{2} (\beta^2 + 2\alpha\gamma) \rho^3 \\ &\quad + \beta\gamma\rho^4 + \frac{1}{2} \gamma^2 \rho^5 \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} (\delta^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \frac{1}{2} (\delta^2 - 2\delta\beta - 2\beta\gamma) \rho \\ &\quad - \delta(\beta - \gamma) \rho^2 - \frac{1}{2} (\beta^2 + 2\delta\gamma) \rho^3 \\ &\quad - \beta\gamma\rho^4 - \frac{1}{2} \gamma^2 \rho^5 \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{1}{(a^2 - b^2)^2} \frac{1}{(c^2 - d^2)^2} \\ &\quad \cdot \{b^2d^2 + b^2c^2 + a^2(c - d)^2\} \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{(a^2 - b^2)^2} \frac{1}{(c^2 - d^2)^2} \\ &\quad \cdot \{b^2d^2 + b^2c^2 + a^2(c + d)^2\} \end{aligned} \quad (59)$$

ここで、 $\rho$  は入力信号の相関係数である。なお、分割側のフィルタ係数は  $\alpha = a(c+d)$ 、 $\beta = bc$ 、 $\gamma = bd$ 、 $\delta = a(c-d)$  となる。

SSKF [6,6] の場合、直流における低域・高域フィルタの利得をそれぞれ 1, 0 とすると、残された自由度は 2 となる。このとき、式 (39) より  $a = 1-b$ 、 $c = 1-d$  とおいて、二つのパラメータ  $b$ 、 $d$  に対する符号化ゲインを求め、その値 (dB) を  $b$ 、 $d$  平面における明るさで表すと図 2 のようになる。なお、相関係数  $\rho = 0.95$  としている。 $b = -0.28$ 、 $d = 0.13$  のとき、符号化ゲインの最適値  $G_{SBC}$  は 6.207 (dB) となる。

### 6. シミュレーション実験

本章では、標準画像を用いたシミュレーション実験

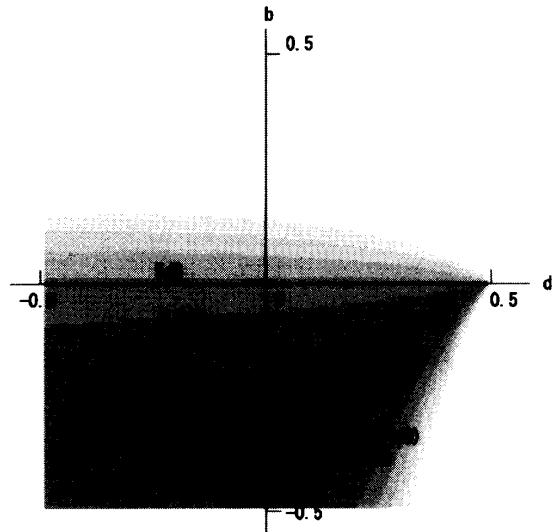


図 2 SSKF [6,6] の符号化ゲイン  
Fig. 2 Coding gain of SSKF [6,6].

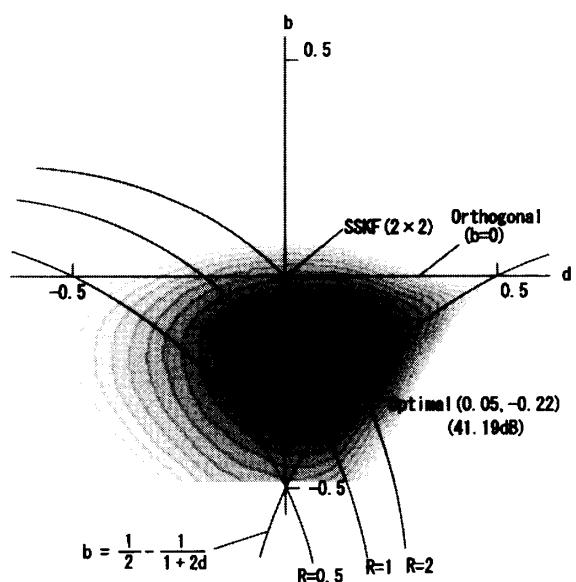


図 3 SSKF [6,6] の符号化特性 (SN 比)  
Fig. 3 Coding efficiency (SN ratio) of SSKF [6,6].

を用いて、2分割 SSKF [6,6] の SN 比を計算し、符号化ゲインの結果と比較する。

前章と同じ 2分割の SSKF [6,6] について、二つのパラメータ  $b$ 、 $d$  を格子状に変化させ、2 bit/pixel における SN 比の推定値を等高線表示すると、図 3 のようになる。SN 比の値は、ステップサイズを変化させ、エントロピーが 2 bit/pixel 前後となる 2 点の SN 比 (dB) の値から、線形補間により求めた。シミュレーションに用いた標準画像は SIDBA の girl であり、低域・高域とも同じステップサイズで線形量子化している。なお、水平及び垂直の低域側はフィルタ出力を DPCM

表 1 SSKF [6,6] の SN 比と最適パラメータ  
Table 1 SN ratios of SSKF [6,6] and optimal parameters.

画像	SN 比 (dB)	最適パラメータ	
		b	d
girl	41.19	-0.22	0.05
couple	43.30	-0.24	0.06
aerial	35.19	-0.24	0.07
moon	39.13	-0.12	0.04

した値を量子化し、エントロピーを計算した。SN 比の等高線には、符号化ゲインの場合と同じく三角形の領域が現れており、パラメータの最適値や全体的な傾向がほぼ一致していることが分かる。なお SN 比が最適となるのは、 $b = -0.22$ ,  $d = 0.05$  のときである。表 1 に、他の標準画像を用いた場合のシミュレーション結果を示す。これより、パラメータの最適値は画像の種類にはほとんど依存しないことが分かる。

図 2 及び図 3 から、符号化効率は以下に示す三つの条件のトレードオフにより決まるものと考えられる。

- ① フィルタの直交度
- ② ブロック間相関の利用（分割側 HPF の低域特性）
- ③ 分割/合成 HPF の利得比

以下、これらの項目について具体的に説明する。

### 6.1 フィルタの直交度

[6,6] に拡張した SSKF の直交度を評価する尺度として、以下の行列を導入する。

$$T_6 \cdot T_6^t = T_2 \cdot T_{e1} \cdot T_{e1}^t \cdot T_2^t = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_4 & \cdots & 0 & f_2 & \cdots & -f_2 \\ f_1 & f_0 & f_1 & \cdots & -f_2 & 0 & \cdots & -f_4 \\ f_4 & f_1 & f_0 & \cdots & -f_4 & -f_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_4 & 0 & 0 & \cdots & f_4 & 0 & \cdots & f_2 \\ f_1 & f_4 & 0 & \cdots & f_2 & f_4 & \cdots & 0 \\ 0 & -f_2 & -f_4 & \cdots & f_0 & f_3 & \cdots & -f_3 \\ f_2 & 0 & -f_2 & \cdots & f_3 & f_0 & \cdots & -f_4 \\ f_4 & f_2 & 0 & \cdots & -f_4 & f_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -f_4 & 0 & 0 & \cdots & -f_4 & 0 & \cdots & f_3 \\ -f_2 & -f_4 & 0 & \cdots & -f_3 & -f_4 & \cdots & f_0 \end{pmatrix} \quad (60)$$

ここで、

$$f_0 = 2(1 - 2b + 2b^2 - 2b^2d + 2b^2d^2) \quad (61)$$

$$f_1 = 2(1 - b)b \quad (62)$$

$$f_2 = 2b(1 - b)(1 - 2d + 2d^2) \quad (63)$$

$$f_3 = 2b(1 - b)(1 - 2d)^2 \quad (64)$$

$$f_4 = 2b^2(1 - d)d \quad (65)$$

である。

この行列が対角行列になるとき直交性が完全に満たされる。[6,6] の SSKF の場合二つの自由度があり、行列の各項は最終的に  $f_0$ ,  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$ ,  $f_4$  の五つの項のいずれかで表現できる。これより直交条件が満たされるのは  $b = 0$ 、すなわち  $(2 \times 2)$  のアダマール変換のみであることが分かる。

### 6.2 ブロック間相関の利用

我々は先に、直交行列を用いたブロック変換において、ブロック内の変換については完全に無相関となるが、低い次数の AC 係数と隣接するブロックの直流成分との間に相関が残されていることを示した[26]。すなわち、一般の画像信号は低域に電力が集中しており、直流係数と隣接するブロックの直流係数から、低い次数の AC 係数を予測し、この差分を伝送することにより符号化効率を改善することができる。 $(2 \times 2)$  の直交変換の場合、高域の係数の値を隣接するブロックの直流係数から予測することができ、この予測誤差を伝送すればよい。このような高域の予測誤差を求める操作を 1 回の処理で行うと、隣接するブロックにまたがる処理となり、結果的に LBT の形で表され、この LBT を次数ごとに並べ換えると SSKF になる。この LBT を用いて、直線状に変化する信号を変換したとき、高域の係数（すなわち予測誤差）が実質的と 0 となるようなフィルタ係数が重要となる。

### 6.3 分割側 HPF の低域特性

直線状に変化する信号に対し分割側 HPF の出力が 0 となれば、AC 係数予測と同様の効果が得られるものと予想される。この条件は以下のように表される。

$$\left. \frac{dH_1(z)}{dz} \right|_{z=1} = 0 \quad (66)$$

これは、 $z$  の多項式で表した FIR フィルタを  $z$  で微分して  $z = 1$  とおくと、 $z$  の指数部が 1 サンプルごとに単調増加（減少）するフィルタ出力に等価になることから明らかである。この必要十分条件は、分割側 HPF の伝達関数  $H_1(z)$  が、 $(1 - z)^2$  で因数分解できることである。

## 論文／画像のサブバンド符号化に用いる多帯域分割 SSKF の設計手法

[6,6] の SSKF について式 (66) を満たす解を求める  
と、式 (36) より  $b = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+2d}$  となる。このとき、

$$H_1(z) = -\frac{1-2d}{4(1+2d)}(1-z^{-1})^3(d+z^{-1}+dz^{-2}) \quad (67)$$

が導かれる。なお、HPF の直流利得  $H_1(1) = 0$  となるのは明らかである。

#### 6.4 分割/合成フィルタの利得比

先に示したように、SSKF [6,6] の場合、分割/合成側 LPF の直流利得はそれぞれ  $H_0(1) = 1$ ,  $G_0(1) = 2$  となり、ナイキスト周波数における利得は  $H_0(-1) = G_0(-1) = 0$  となる。また、式 (36), (38) より分割/合成側 HPF の直流利得 = 0 となり、これらは  $b$ ,  $d$  に依存しない。一方、ナイキスト周波数における分割側 HPF の利得は  $H_1(-1) = (1-2b)(1-2d)$ , 合成側 HPF の利得は  $G_1(-1) = \frac{2}{(1-2b)(1-2d)}$  となる。このとき、 $H_1(-1)G_1(-1) = 2$  の関係が成立し、これらは反比例の関係にあることが分かる。すなわち、パラメータ  $b$ ,  $d$  の値の影響を受けるのは、ナイキスト周波数における HPF の利得である。

ここで分割/合成 HPF の利得の比率、すなわち  $G_1(-1)/H_1(-1)$  の絶対値を  $R$  とおく。例えば、 $R = 2$  のとき分割側 HPF の利得は 1, 合成側 HPF の利得 = 2 となる。符号化ゲインの定義より、この値が最大となるのは、分割側の LPF, HPF 出力の分散の大きさとそれぞれの量子化ステップサイズの比率を等しく設定した場合である。したがって、分割側の HPF の利得が 1 より極端に小さくなる  $R \gg 2$  の場合や、極端に大きくなる  $R \ll 2$  の場合、上記の比率が理想値から大きくずれ、低域と高域でアンバランスな量子化が行われるため符号化効率が低下する。これより、最適な  $R$  の値が存在することが分かる。なお、この  $R$  の最適値については、分割/合成におけるエンファシス、ディエンファシス処理と密接に関連している [19]。

#### 6.5 符号化効率を決定する要因について

図 3 に示された三角形の等高線の状態から、符号化効率（符号化ゲイン）は次の三つの条件により定まると考えるのが自然である。

第 1 の条件はフィルタの直交度である。この条件を完全に満たすのは、直線  $b = 0$  である。

第 2 の条件は分割側 HPF の低域特性である。すなわち、一定こう配の入力に対し HPF 出力が 0 となる条件であり、 $b = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+2d}$  の双曲線で表される。な

お、原点 ( $b = d = 0$ ) が  $(2 \times 2)$  の SSKF に対応しており、第 1 の条件を満たしているものの、第 2 の条件から離れていることが分かる。一方、上記 2 条件の交わる点 ( $b = 0$ ,  $d = 0.5$ ) では、分割側 HPF の利得 = 0 となり、これら二つの条件を同時に満たす解は実質的に存在しない。

第 3 の条件は、分割/合成フィルタの利得比である。図 3 では  $R = 0.5, 1.0, 2.0$  の 3 本の双曲線を示しているが、符号化効率が最大となる  $R$  の値は 1.19 であり、分割側 HPF の利得 = 1.30, 合成側 HPF の利得 = 1.55 となる。なお、今回のシミュレーションでは、分割/合成側の量子化ステップサイズは等しく設定した。このため、標準画像では、高域の分散が低域よりやや小さくなっている、分割側 HPF で弱いエンファシス、合成側 HPF で弱いディエンファシス処理をした場合に、符号化効率が最適化されるものと考えられる。

## 7. む す び

行列表現を用いて、ブロック単位の直交変換を双直交の LBT に拡張し、その変換係数を並べ換えることにより、任意の次数の  $n$  分割 SSKF を構成する手法を提案した。具体的には、ブロックサイズが 2 のアダマール変換行列と、極めて単純な構造をもつ 2 種類の基本拡張行列を用いて、例えば、[4,4], [6,6] タップのような任意の次数の 2 分割 SSKF を構成することができる。更に、ブロックサイズ  $n$  の直交変換行列と、 $n$  種類の基本拡張行列を組み合わせることにより、完全再構成・直線位相・双直交の  $n$  分割 SSKF が構成できることを示した。次に、2 分割 SSKF の符号化ゲインと SN 比について分析し、符号化効率が

(1) フィルタの直交性

(2) ブロック間相関の利用（分割側 HPF の低域特性）

(3) 分割/合成のフィルタ利得の比率

の 3 条件に依存することを検証した。今後の課題は、多分割 SSKF の最適フィルタを求め、分割数と符号化効率の関係を定量的に評価することである。

## 文 献

- [1] N. Ahmed, T. Natarajan, and K.R. Rao, "Discrete cosine transform," IEEE Trans. Comput., vol.C-23, pp.90–93, Jan. 1974.
- [2] H.S. Malvar and D.H. Staelin, "The LOT: Transform coding without blocking effects," IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol.37, no.4, pp.553–

- 559, April 1989.
- [3] H.S. Malver, "Lapped transforms for efficient transform/subband coding," *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, vol.38, no.6, pp.969–978, June 1990.
  - [4] M. ヴェターリ, "ウェーブレット変換とサブバンド符号化," *信学誌*, vol.74, no.12, pp.1275–1278, Dec. 1991.
  - [5] J.H. Princen and A.B. Bradley, "Analysis/synthesis filter bank design based on time domain aliasing cancellation," *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, vol.ASSP-34, no.5, pp.1153–1161, Oct. 1986.
  - [6] D.L. Gall and A. Tabatabai, "Subband coding of digital images using symmetric short-kernel filters and arithmetic coding techniques," *IEEE ICASSP'88*, pp.761–764, June 1988.
  - [7] M. Vetterli, "A theory of multirate filter banks," *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, vol.ASSP-35, no.3, pp.356–372, March 1987.
  - [8] M. Vetterli and D.L. Gall, "Perfect reconstruction FIR filter banks: Some properties and factorizations," *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, vol.37, no.7, pp.1057–1071, July 1989.
  - [9] 甲藤二郎, 安田靖彦, "サブバンド符号化の特性評価とそのフィルタ係数の最適化について," *信学技報*, IE91-10, May 1992.
  - [10] 甲藤二郎, 安田靖彦, "帯域分割符号化における完全再構成フィルタの一構成法とその画像への応用," *ITEJ Technical Report*, vol.14, no.22, pp.13–18, March 1990.
  - [11] A.K. Soman, P.P. Vaidyanathan, and T.Q. Nguyen, "Linear phase paraunitary filter banks: Theory, factorizations and designs," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol.41, no.12, pp.3480–3496, Dec. 1993.
  - [12] R.L. Queiroz, T.Q. Nguyen, and K.R. Rao, "The GenLOT: Generalized linear-phase lapped orthogonal transform," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol.44, no.3, pp.497–507, March 1996.
  - [13] S.C. Chan, "The generalized lapped transform (GLT) for subband coding applications," *Proc. ICASSP*, pp.1508–1511, Detroit, MI, 1995.
  - [14] S.O. Aase and T.A. Ramstad, "On the optimality of nonunitary filter banks in subband coders," *IEEE Trans. Image Process.*, vol.4, no.12, pp.1585–1591, Dec. 1995.
  - [15] H.S. Malver, "Biorthogonal and nonuniform lapped transforms for transform coding with reduced blocking and ringing artifacts," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol.46, no.4, pp.1043–1053, April 1998.
  - [16] S.C. Chan, A. Nallanathan, T.S. Ng, and P.C.K. Kwok, "A class of M-channel linear-phase biorthogonal filter banks and their applications to subband coding," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol.47, no.2, pp.564–571, Feb. 1999.
  - [17] T.D. Tran, R.L. Queiroz, and T.Q. Nguyen, "Linear-phase perfect reconstruction filter bank: Lattice structure, design, and application in image coding," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol.48, no.1, pp.133–146, Jan. 2000.
  - [18] 谷本正幸, 山田昭雄, 内藤陽一, "一般化された帯域分割方式," *信学技報*, DSP90-58, Oct. 1990.
  - [19] 谷本正幸, 山田昭雄, "最適サブバンドフィルタ," *信学技報*, CS92-97, Jan. 1993.
  - [20] I. Daubechies, "Orthogonal bases of compactly supported wavelets," *Comm. in Pure and Applied Math.*, vol.41, no.7, pp.909–996, July 1988.
  - [21] M. Ohta, M. Yano, and T. Nishitani, "Wavelet picture coding with transform coding approach," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol.E75-A, no.7, pp.776–785, July 1992.
  - [22] 宇戸寿幸, 井上知哉, 池原雅章, "直交フィルタバンクに対する信号拡張法とその画像符号化への応用," *信学論(A)*, vol.J86-A, no.3, pp.199–206, March 2003.
  - [23] 宇戸寿幸, 中原聰, 池原雅章, "直交及び双直交マルチウェーブレットの設計と実現," *信学論(A)*, vol.J86-A, no.4, pp.402–409, April 2003.
  - [24] 貴家仁志, 小林弘幸, "ポリフェーズ部分行列に基づくオーバサンプリングフィルタバンク," *信学論(A)*, vol.J79-A, no.9, pp.1525–1534, Sept. 1996.
  - [25] 伊丹史雄, 渡部英二, 西原明法, 柳澤健, "完全再構成非最大間引きコサイン変調フィルタバンクの一実現法," *信学論(A)*, vol.J83-A, no.9, pp.1037–1046, Sept. 2000.
  - [26] 井澤裕司, 滝沢正明, "離散コサイン変換を用いた画像の高能率符号化における画質および符号化効率の改善," *信学論(B-I)*, vol.J72-B-I, no.4, pp.377–384, April 1989.
- (平成 17 年 1 月 20 日受付, 5 月 31 日再受付)

井澤 裕司 (正員)



昭 51 東大・工・産業機械卒。昭 53 同大学院修士課程了。同年(株)日立製作所中央研究所入社。平 5 信州大・工・講師、平 7 同助教授。工博。画像符号化、画像信号処理に関する研究に従事。