

変形ガレルキン法による三次元粘性流れ問題の解析*

(誤差解析手法によるアプローチ)

松田安弘*¹, 藤田弘志*², 邵長城*¹
市川到*³, 山崎格*⁴

Modified Galerkin Analysis for the Unsteady Three-Dimensional Viscous Fluid Flow (Approach by the Error Analysis Technique)

Yasuhiro MATSUDA*⁵, Hiroshi FUJITA, Changcheng SHAO,
Itaru ICHIKAWA and Itaru YAMAZAKI

*⁵ Shinshu University, Dept. of Mechanical Engineering,
Wakasato 4-17-1, Nagano City, Nagano, 380-8553 Japan

In our previous research, the modified Galerkin method was proposed as one of the most efficient methods for the convection-diffusion problems and the two-dimensional viscous fluid flows. In the modified Galerkin method, since the inertia term is considered explicitly, only the symmetrical matrixes appear. Then an artificial viscosity is introduced through an error analysis approach to improve its accuracy and stability. In this paper, this modified Galerkin method is applied to the three-dimensional incompressible viscous fluid flow analysis coupled with the Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations formulation. The cubic cavity flow problems are investigated for the Reynolds number of 400, 1000, 2000 and 3200. Finally, we confirmed the effectiveness of our proposed method.

Key Words: Three-Dimensional Viscous Fluid Flow, Finite-Element Method, Modified Galerkin Method, Cubic Cavity Flow, Error Analysis Technique

1. 緒言

誤差解析手法を用いて提案した有限要素法の一つである変形ガレルキン法が一次元, 二次元, 三次元移流拡散問題の解析^{(1), (2)}に対して有効な技法であることは理論解析と数値実験の結果から示されている. この変形ガレルキン法では対称マトリックスのみを取り扱うため従来のガレルキン法に比べて所要計算時間が少なくなるが, 同時に補正係数の導入により時間方向と空間方向の離散化精度を高めている. 文献(3)では変形ガレルキン法を渦度-流れ関数による二次元 Navier-Stokes 方程式に適用し, 良好な解析結果を得ることができた. 本論文はこの変形ガレルキン法を三次元非圧縮性粘性流れの解析に適用したものであるが, この際, 速度と圧力の連成については Patankar ら⁽⁴⁾による SIMPLE 解法等との組み合わせにより 2 種類の定式化(MS 解法と MSR 解法)を提案し, その検討を行った. 数

値計算例としては三次元キャビティ内の粘性流れ問題を取り上げ, レイノルズ数 $Re=400, 1000, 2000$ 及び 3200 での計算を行い, 他の研究例との比較を含めて, その有効性について検討した.

2. 数値解法

2.1 基礎式 基礎式として, 連続の式およびナビエ・ストークス (Navier-Stokes) 方程式の無次元形を用いる.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2)$$

ただし,

\mathbf{u} : 速度ベクトル, p : 圧力/密度,

Re : レイノルズ数, t : 時間

である.

2.2 変形ガレルキン法による定式化

(1)MS 解法の場合 MS 解法では SIMPLE 法⁽⁴⁾と同様の考え方で基礎式を解く. ただし, 新しい時刻での速

* 原稿受付 1999年1月13日.

*¹ 正員, 信州大学工学部 (☎ 380-8553 長野市若里 4-17-1).

*² アイシン精機(株) (☎ 448-8650 刈谷市朝日町 2-1).

*³ (株)INAX (☎ 478-8505 知多市北浜町 25-7).

*⁴ 信州大学大学院.

E-mail: matsuda@gipwc.shinshu-u.ac.jp

度 \mathbf{u}^{m+1} の予測値 \mathbf{u}^* は変形ガレルキン法により求める。変形ガレルキン法では従来のガレルキン法より式(2)の移流項, 圧力項を陽的に扱うことで, 対称マトリックスのみが扱われ, 同時に誤差解析手法により補正係数を導入し, 離散化精度を高めている。式(2)を変形ガレルキン法により定式化すると速度 \mathbf{u}^* に関する連立方程式(3)が得られる。

$$\left\{ \frac{[P]}{\Delta t} + \varphi [D]_1 \right\} \{\mathbf{u}\}^* = \left\{ \frac{[P]}{\Delta t} - (1-\varphi) [D]_1 \right\} \{\mathbf{u}\}^m - \{F\}_1^m \quad (3)$$

ここで,

$$\begin{aligned} [P] &= \sum_{j \in V_e} \int_{V_e} N_i N_j dx dy dz \\ [D]_1 &= \sum_{j \in V_e} \int_{V_e} \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right\} dx dy dz \\ \{F\}_1 &= \sum_{j \in V_e} \int_{V_e} N_i \{ \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p \} dx dy dz \end{aligned}$$

$Re^* = Re / f$ である。ただし,

Δt : タイム・ステップ, m : 時間方向の添字,
 φ : タイム・スキーム・パラメータ,
 V_e : 一要素の領域, N_i : 形状関数,
 M : 総要素数, f : 補正係数

である。補正係数 f については次節に述べる。次に, 式(2)において式(1)を考慮し移流項・粘性項を省略すると, 圧力の修正量 $\delta p (= p^{m+1} - p^m)$ に関するポアソン方程式(4)が得られ, それをガレルキン法により定式化すると連立方程式(5)が得られる。そしてこれを解くことにより δp が求まる。

$$\nabla^2(\delta p) = \nabla \cdot \mathbf{u}^* / \Delta t \quad (4)$$

$$[D]_2 \{\delta p\} + \{F\}_2 = 0 \quad (5)$$

ここで,

$$\begin{aligned} [D]_2 &= \sum_{j \in V_e} \int_{V_e} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right\} dx dy dz \\ \{F\}_2 &= \sum_{j \in V_e} \int_{V_e} N_i \{ (\nabla \cdot \mathbf{u}^*) / \Delta t \} dx dy dz \end{aligned}$$

である。最後に式(2)から得られた速度, 圧力の修正式(6)から \mathbf{u}^{m+1} と p^{m+1} が得られる。

$$\mathbf{u}^{m+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \cdot \nabla(\delta p), \quad p^{m+1} = p^* + \delta p \quad (6)$$

(2)MSR 解法の場合 MSR 解法では SIMPLER 法⁽⁴⁾と同様の考えで解く。すなわち式(2)の非定常項を $(\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m) / \Delta t$ とおくと, 式(7)及び式(8)の二式に分割することができる。

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^m + \left\{ \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^m - \mathbf{u}^m \nabla \mathbf{u}^m \right\} \Delta t \quad (7)$$

$$\mathbf{u}^{m+1} = \bar{\mathbf{u}} - \Delta t \cdot \nabla p^* \quad (8)$$

まず式(7)にガレルキン法を適用した式(9)により擬似速度 $\bar{\mathbf{u}}$ を求める。

$$\left\{ \frac{[P]}{\Delta t} \right\} \{\bar{\mathbf{u}}\} = \left\{ \frac{[P]}{\Delta t} - [D]_3 \right\} \{\mathbf{u}\}^m - \{F\}_3^m \quad (9)$$

ここで,

$$[D]_3 = \sum_{j \in V_e} \int_{V_e} \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right\} dx dy dz$$

$$\{F\}_3 = \sum_{j \in V_e} \int_{V_e} N_i \{ \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \} dx dy dz$$

また式(8)において両辺の発散をとることにより圧力の予測値 p^* に関するポアソン方程式(10)が得られる。式(10)を式(4)と同様にガレルキン法により定式化して, p^* を求める。

$$\nabla^2 p^* = \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} / \Delta t \quad (10)$$

式(10)で求められた p^* を用いて式(2)を変形ガレルキン法により定式化すると速度の予測値 \mathbf{u}^* に関する連立方程式(11)が得られるが, これを解いて \mathbf{u}^* を求めることができる。

$$\left\{ \frac{[P]}{\Delta t} + \varphi [D]_1 \right\} \{\mathbf{u}\}^* = \left\{ \frac{[P]}{\Delta t} - (1-\varphi) [D]_1 \right\} \{\mathbf{u}\}^m - \{F(\mathbf{u}^m, p^*)\}_1 \quad (11)$$

以下, MS 解法と同様に式(5)を解いて δp を求め, 最後に速度, 圧力の修正式(12)から \mathbf{u}^{m+1} と p^{m+1} を得る。

$$\mathbf{u}^{m+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \cdot \nabla(\delta p), \quad p^{m+1} = p^* + \delta p \quad (12)$$

3. 補正係数の導入

これら MS 及び MSR の二解法の中で式(2)に変形ガレルキン法を適用する際, 粘性項に f , 慣性項に g の補正係数を導入する。この補正係数は式(2)を移流拡散方程式とみなし, 誤差解析手法を用いてその一般解における増幅係数と変形ガレルキン法での数値解における増幅係数を等置することによって求められるが, 図1の不等長六面体一次要素の場合には, 次式(13)で表される⁽²⁾。

$$f = 1 + \frac{1}{2} \frac{(b_x + b_y + b_z)^2}{r_x + r_y + r_z} + \frac{1}{6} \frac{(\alpha - 1)b_x + (\beta - 1)b_y + (\gamma - 1)b_z}{r_x + r_y + r_z}, \quad (13)$$

$$g = 1$$

すなわちこの場合, 結果的には慣性項への補正は不要となる。なお式(13)の右辺第2項は離散化による負の数値粘性への補正部分であり, 第3項はメッシュ分割の非一様性から生ずる誤差への補正部分である。ただし, b_x, b_y, b_z : クーラン数, r_x, r_y, r_z : フーリエ数であり, 次式で表される。

$$b_x = u \Delta t / h_x, \quad b_y = v \Delta t / h_y, \quad b_z = w \Delta t / h_z$$

$$r_x = \Delta t / (Re h_x^2), \quad r_y = \Delta t / (Re h_y^2), \quad r_z = \Delta t / (Re h_z^2)$$

ここで,

$$h_x, h_y, h_z: x, y, z \text{ 方向のメッシュ幅}$$

$$\alpha, \beta, \gamma: x, y, z \text{ 方向のメッシュ幅の変化率}$$

である。

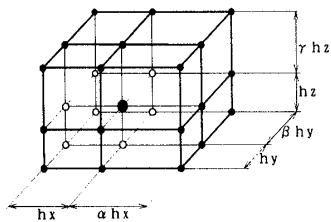


Fig.1 Non-uniform hexahedral linear elements

4. 数値計算例

4.1 計算条件 キャビティ流れの解析は数値計算スキームの有効性を検証するための典型的な問題である。本論文ではレイノルズ数 400, 1000, 2000 及び 3200 の場合について静止状態からの計算を行った。計算対象としては、不等長六面体 1 次要素を用いてキャビティ中心断面 ($z=0.5$) で対称条件を付した $30 \times 30 \times 15$ 個の要素に分割した半領域と $30 \times 30 \times 30$ 個 ~ $40 \times 40 \times 40$ 個の要素に分割した全領域を取り上げた。図 2 に三次元キャビティの計算領域を、図 3 に全領域のメッシュ分割図 (不等長 $40 \times 40 \times 40$) を示す。なお不等長メッシュとしては x, y, z 方向を次式により分割している⁽⁵⁾。

$$x_i = \frac{\exp\{a(i-1)dx\}-1}{2\{\exp(a)-1\}} \quad (x \leq 0.5)$$

$$x_i = \frac{\exp\{a\{1-(i-1)\}dx\}-1}{2\{\exp(a)-1\}} \quad (x > 0.5)$$

ただし、 $a = 2.0$, $dx = \frac{2}{N}$ (N : 一辺の分割数) である。

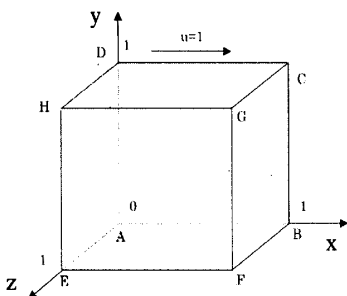


Fig.2 Computational domain

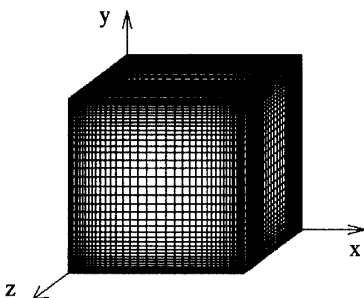


Fig.3 Non-uniform meshes (40x40x40)

また、他の計算条件を以下に示す。

(1) 初期条件 キャビティ内で $u=v=w=0$, $p=0$

(2) 境界条件

①流速: DHGC面で $u=1$, $v=w=0$;

その他の面で $u=v=w=0$

(対称条件を付した半領域計算の場合にはさらに $z=0.5$ 面で $w=0$, $\partial u/\partial n=0$, $\partial v/\partial n=0$ とした)

②圧力: 全ての面で $\partial p/\partial n=0$

(3) 定常判定条件

$|\mathbf{u}_i^m| \geq \text{Max}|\mathbf{u}_i^m| \times 0.01$ に対して次式を適用した。

$$\delta = \text{Max} \left| \frac{\mathbf{u}_i^m - \mathbf{u}_i^{m-1}}{\mathbf{u}_i^m} \right| \times 100 \leq 0.1 \quad (\%) \quad (14)$$

ただし、 $\partial/\partial n$ は法線方向の微分である。

4.2 レイノルズ数 400~2000 での計算結果

表 1 に $Re=400 \sim 2000$ での計算パラメータを示す。ここで Δt 欄の数値は定常解が得られたタイムステップの値であり、括弧内の数値は計算結果が発散した際の値である。また、 $b_{\text{MAX}} (=1 \times \Delta t/h_{\text{min}})$, h_{min} : 最小格子間距離) は最大クーラン数である。

(1) MS 解法と MSR 解法との比較 キャビティにおいて中心断面 ($z=0.5$) に対称条件を付した $30 \times 30 \times 15$ (半領域) を計算対象とし比較・検討を行った。図 4 は MS 解法及び MSR 解法の $Re=400$ における $x-y$ 断面 ($z=0.5$) での流速ベクトル図と圧力分布図である。圧力分布図は $p=-1.0 \sim 1.0$ の範囲で $\Delta p=0.005$ の間隔で作図した。これにより速度については二解法に差は見られなかったものの、圧力分布図に関しては MS 解法において境界あたりに振動解が見られたが、MSR 解法については、比較的良好な結果を与えた。したがって、以下の検討では MSR 解法を用いることとした。なお、計算対象としては図 2 のキャビティ全領域を考える。

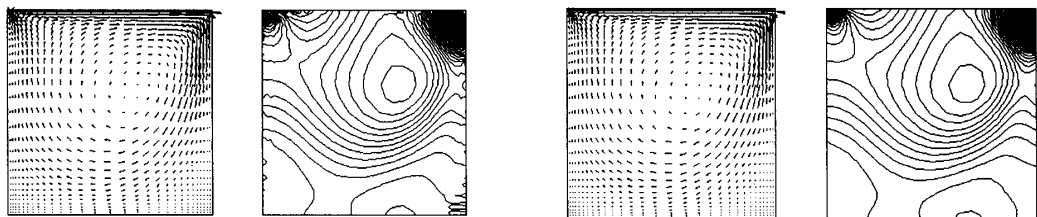
(2) MSR 解法による計算結果 図 5 は $Re=400$ における中心断面上 ($z=0.5$) の速度分布図である。比較のため本田ら⁽⁶⁾による結果を示したが、この際の計算領域は対称条件を付した半領域について等長メッシュを用いたものである。また図 6 に $Re=400$ での各断面での圧力分布図を本田らの結果と共に示した。細かくみると若干の違いが観察できる。図 7 は $Re=1000$ における中心断面上 ($z=0.5$) での速度分布図である。同時に河合ら⁽⁷⁾や Ku ら⁽⁸⁾の結果を含めて比較したが、ほぼ同程度の結果が得られたものと思われる。図 8 は $Re=1000$ での $x-y$ 断面 ($z=0.5$) における流速ベクトル図と圧力分布図

である。比較のために松本ら⁽⁹⁾による結果を示す。文献(9)では等圧線の間隔が報告されていないため厳密な比較はできないが、全体のパターンとしては比較的似た結果が得られている。また図9、図10は $Re=1000$ での $z-y$ 断面と $z-x$ 断面における速度ベクトル図である。但し、本解法の数値ベクトル図では、図8での $x-y$ 断面における速度ベクトルの3倍のスケールで描かれている。 $z-y$ 断面では $y=0$ および $y=1$ の両端で逆向きの渦が発生することが、また $z-x$ 断面では $x=0$ 付近での渦の発生が確認できるが、同様の現象は松本ら⁽⁹⁾においても観察されている。図11は $Re=2000$ での流速ベ

クトル図と圧力分布図である。但し、 $z-y$ 断面と $z-x$ 断面での速度ベクトルは $x-y$ 断面での10倍のスケールで表現している。これにより、 $z=0.5$ 面での流れの対称性が確認できる。図12は $Re=2000$ での相対速度変化率であるが、 δ は小さな振動を伴うものの、計算を進めるにつれてその値は小さくなり、定常解が得られているものと考えられる。なお図13は $Re=2000$ での三次元透視図である。また図14はMSR解法で得られた $x-y$ 断面($z=0.5$)の渦度中心の位置を他文献⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾の報告値とともに示した結果である。これより、他の研究例とほぼ同様の結果が得られたものと考えられる。

Table 1 Computational parameters ($Re=400\sim 2000$)

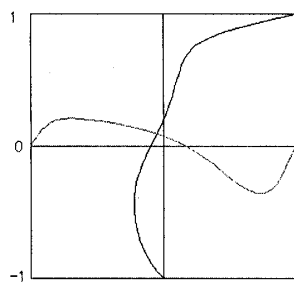
Re	Method	Mesh	Δt	Loop	b_{max}	Fig.
400	MS	$30 \times 30 \times 15$	0.03(0.04)	649	2.69	4(a)
	MSR		0.03(0.04)	645	2.69	4(b)
	MSR	$30 \times 30 \times 30$	0.08(0.09)	270	7.17	5(a),6(a)
	Honda et al. ⁽⁶⁾	$20 \times 20 \times 10$ (Uniform meshes)	0.015	2,139	0.30	5(b),6(b)
1000	MSR	$30 \times 30 \times 30$	0.04(0.05)	918	3.58	7,8(a),9(a),10(a)
	Matsumoto et al. ⁽⁹⁾		0.01	—	0.66	8(b)
	Kawai et al. ⁽⁷⁾	$30 \times 30 \times 30$ (Uniform meshes)	0.001~0.005	14,000	0.45	7
			0.001~0.005	15,000	0.45	7
	Ku et al. ⁽⁸⁾	$30 \times 30 \times 15$	0.0005	—	—	7
2000	MSR	$40 \times 40 \times 40$	0.02(0.03)	6,202	2.43	11,12,13
	Matsumoto et al. ⁽⁹⁾	$30 \times 30 \times 30$	0.01	—	0.66	—



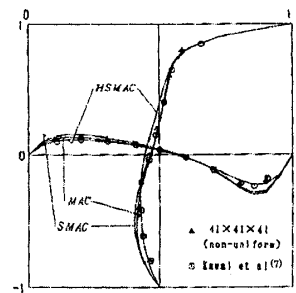
(a) MS method

(b) MSR method

Fig.4 Velocity vectors and pressure contours ($\Delta p=0.005$) at $z=0.5$ ($Re=400, 30 \times 30 \times 15$)

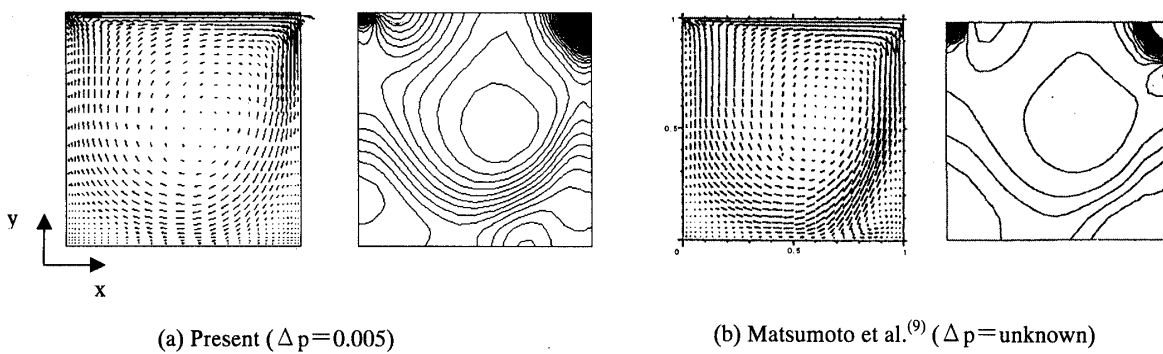
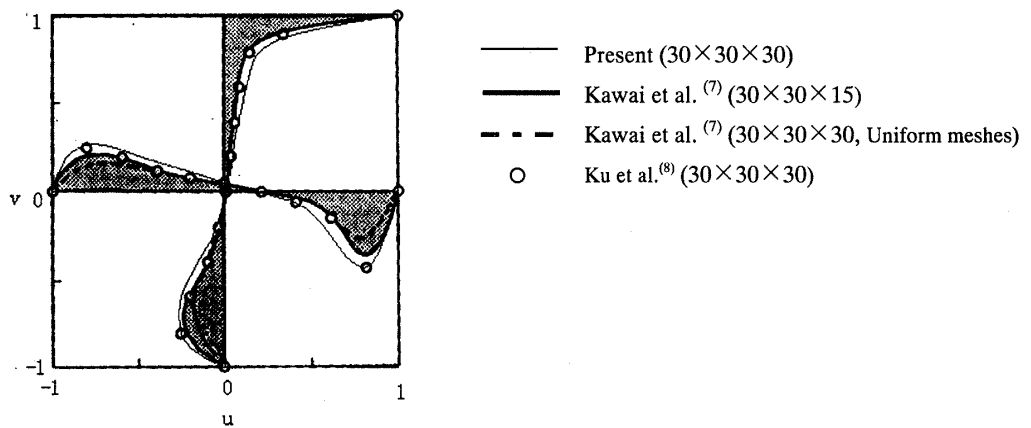
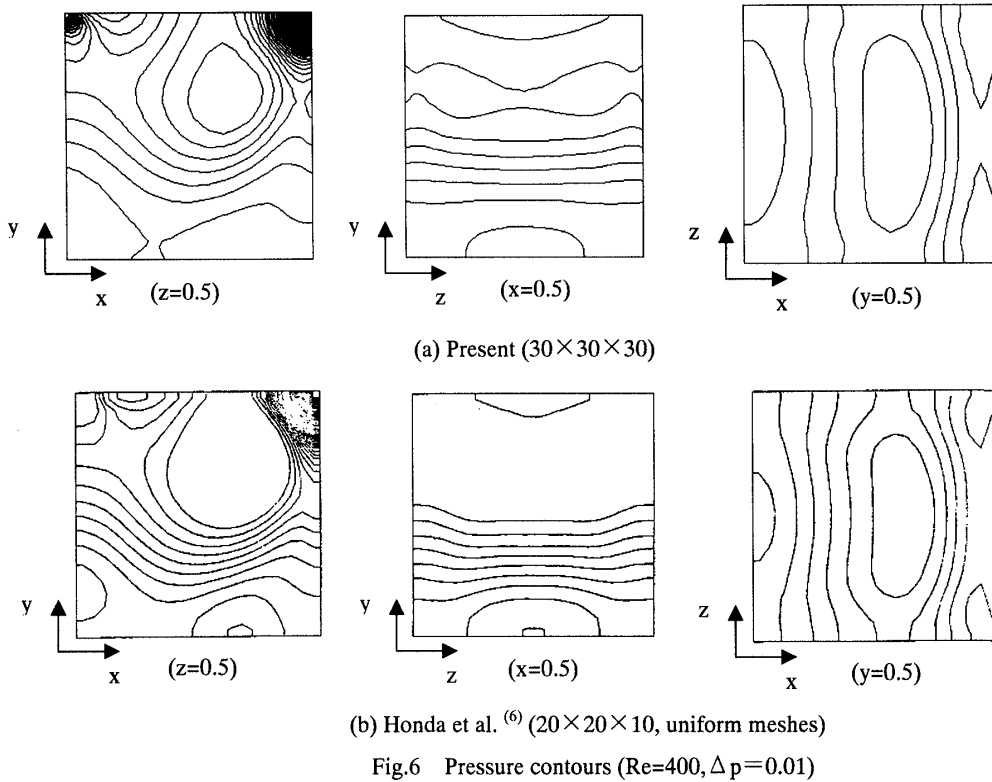


(a) Present ($30 \times 30 \times 30$)



(b) Honda et al.⁽⁶⁾ ($20 \times 20 \times 10$, uniform meshes)

Fig.5 Velocity distributions at $z=0.5$ ($Re=400$)



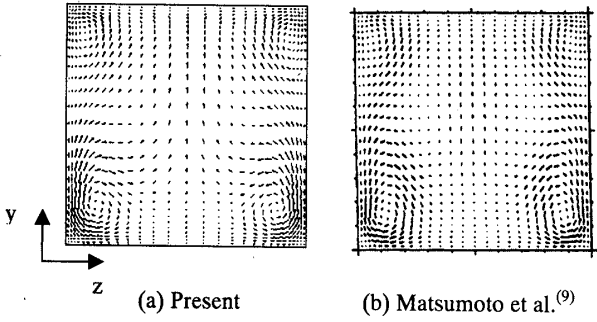


Fig.9 Velocity vectors at $x=0.5$ ($Re=1000, 30 \times 30 \times 30$)

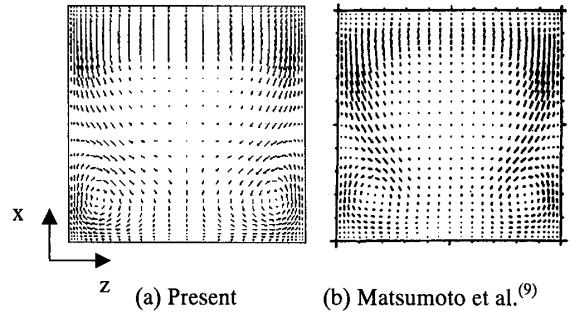
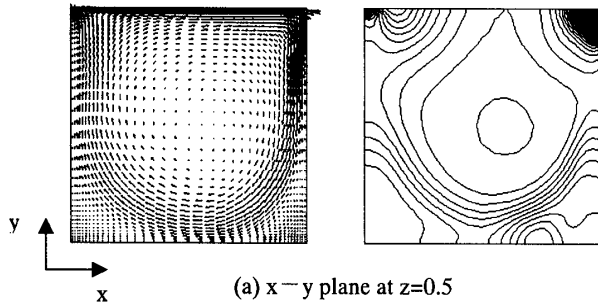
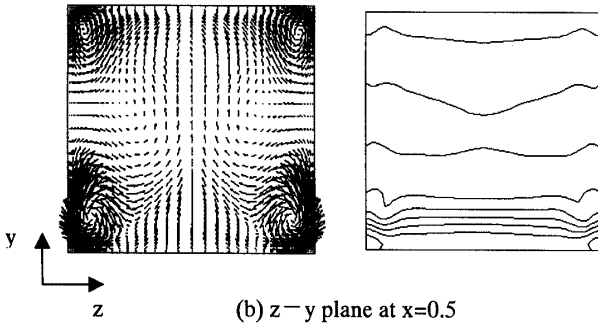


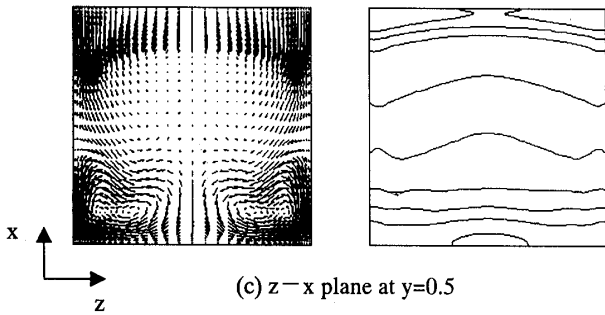
Fig.10 Velocity vectors at $y=0.5$ ($Re=1000, 30 \times 30 \times 30$)



(a) $x-y$ plane at $z=0.5$



(b) $z-y$ plane at $x=0.5$



(c) $z-x$ plane at $y=0.5$

Fig.11 Velocity vectors and pressure contours ($\Delta p=0.005$) ($Re=2000, 40 \times 40 \times 40$)

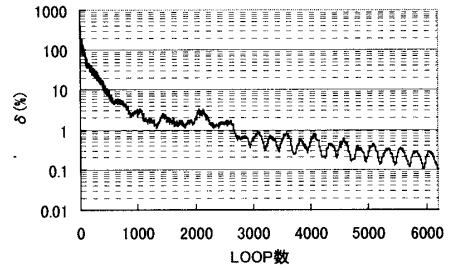


Fig.12 Convergence histories of δ ($Re=2000, 40 \times 40 \times 40$)

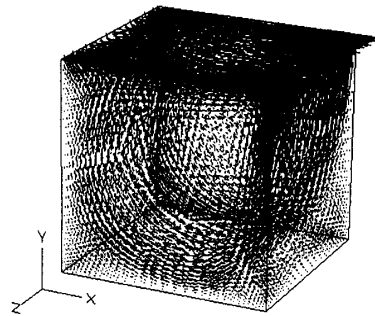


Fig.13 A perspective view ($Re=2000, 40 \times 40 \times 40$)

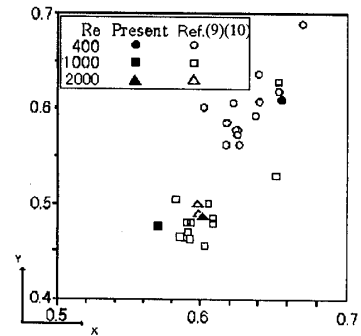


Fig.14 Position of a primary vortex center ($z=0.5$) ($Re=400, 1000, 2000$)

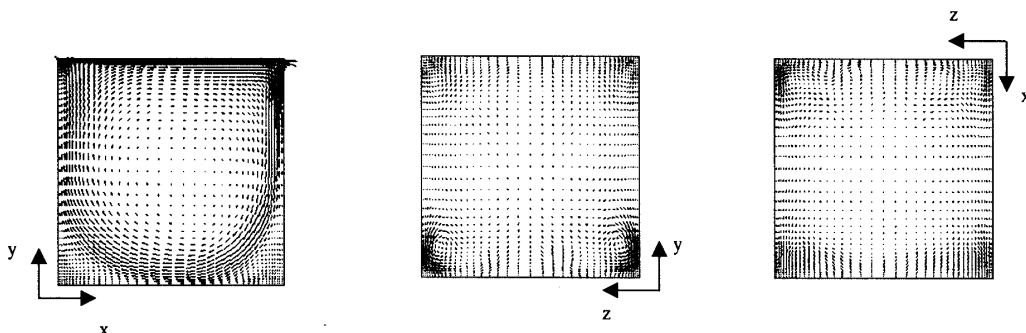
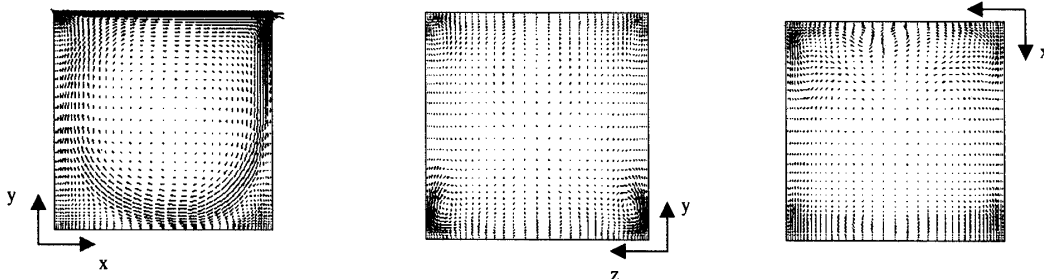
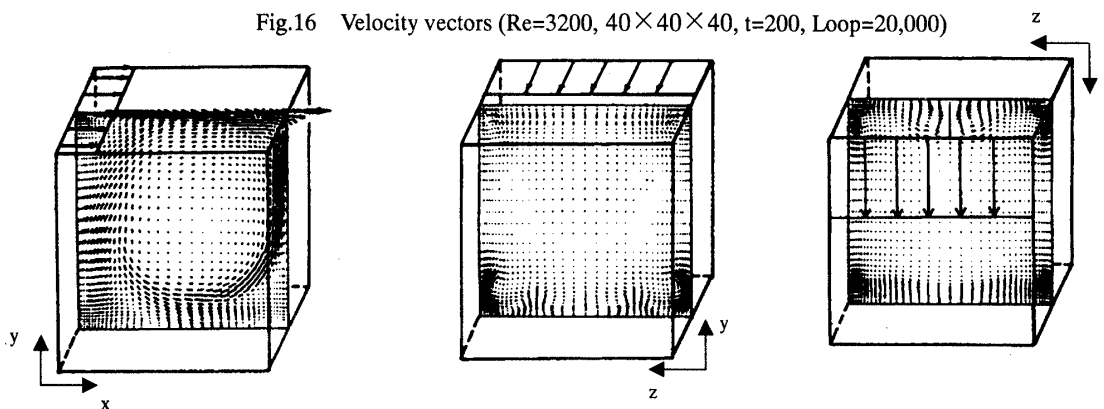
4.3 MSR 解法によるレイノルズ数 3200 での計算結果

表 2 にレイノルズ数 3200 での計算パラメータを示す。この場合、Loop=20,000 まで計算したが、流れの非定常性が観察された。図 15, 図 16 にそれぞれ 18,000 回及び 20,000 回での各断面における流速ベクトル図を示す。但し y-z 断面 ($x=0.5$) 及び z-x 断面 ($y=0.5$) での速度ベクトルは x-y 断面 ($z=0.5$) の 2 倍のスケールで表現されている。z-x 断面 ($y=0.5$) の速度ベクトルでは対称面において Taylor-Görtler 状の縦渦⁽¹¹⁾と流れの非対称性が確認できる。この Taylor-Görtler 状の縦渦が 18,0

00 回から 20,000 回にかけて $z=0.5$ の面に近付き、その結果、x-y 断面での主渦の変形をもたらしている。図 17 に河合ら⁽⁷⁾による結果を示すが、ほぼ同様の現象が確認されている。図 18 に中心断面上 ($z=0.5$) での速度ベクトル図を示すが、文献(7)とほぼ同程度の結果が得られたと言えよう。図 19 に下流底部での速度ベクトルの様子を松本ら⁽⁹⁾の計算結果と共に示したが、流れの状況としては同様の傾向が観察される。また図 20 に相対速度変化率の変化を示したが、これより流れの非定常性が確認できる。

Table 2 Computational parameters (Re=3200)

Re	Method	Mesh	Δt	Loop	b_{max}	Fig.
3200	MSR	$40 \times 40 \times 40$	0.01(0.02)	20,000	0.86	15,16,18,19(a)
	Kawai et al. ⁽⁷⁾	$40 \times 40 \times 20$	0.001~0.005	34,500	0.13	17,18
	Matsumoto et al. ⁽⁹⁾	$30 \times 30 \times 30$	0.01	15,000	0.66	19(b)

Fig.15 Velocity vectors (Re=3200, $40 \times 40 \times 40$, $t=180$, Loop=18,000)Fig.16 Velocity vectors (Re=3200, $40 \times 40 \times 40$, $t=200$, Loop=20,000)Fig.17 Velocity vectors by Kawai et al.⁽⁷⁾ (Re=3200, $40 \times 40 \times 20$, $t=90$, Loop=22,500)

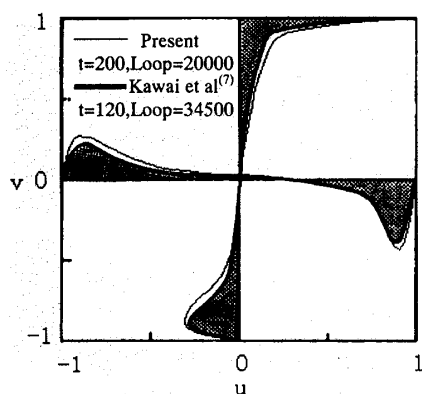


Fig.18 Velocity distributions at $z=0.5$
($Re=3200$)

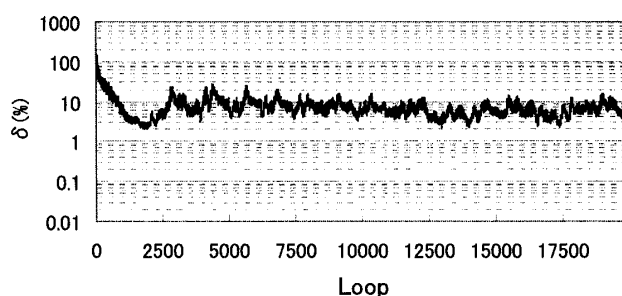
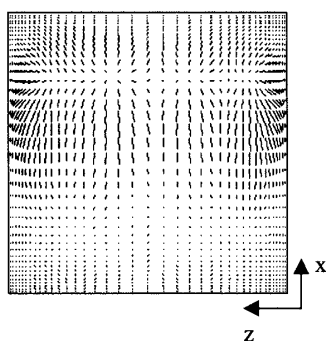
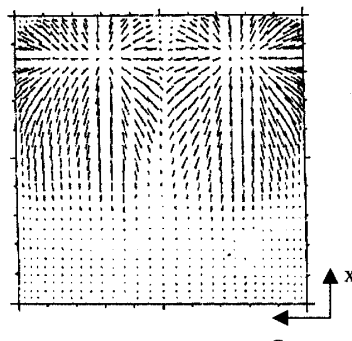


Fig.20 Convergence histories of δ
($Re=3200$, $40 \times 40 \times 40$)



(a) Present ($y=0.017$, $t=200$, Loop=20,000)



(b) Matsumoto et al. (9) ($y=0.020$, $t=150$, Loop=15,000)

Fig.19 Velocity vectors on a plane parallel to the bottom wall ($Re=3200$)

5. 結論

三次元粘性流れ問題の解析技法として変形ガレルキン法と SIMPLER 法との組み合わせ解法である MSR 解法を提案し、以下の結論を得た。

- (1) $Re=400 \sim 2000$ の解析を行った結果、定常解が得られること、及び他の研究例とほぼ同様の結果が得られることを確認した。
- (2) $Re=3200$ の場合には他文献と同様の構造を有する非定常流れが観察された。これにより、本解法の基本的な有効性を確認した。
- (3) なおこの MSR 解法では、すべてのマトリックスが対称となるため計算時間と記憶容量が削減できる。また補正方式の導入により数値解の高精度化と安定性の向上が実現できた。

謝辞

本研究にご援助頂いた、当研究室の元大学院生である松本賢一郎君に感謝します。

文献

- (1) 松田・他 3 名, 機論, 59-561, B(1993), 1580.
- (2) 邵・他 2 名, 機論, 63-606, B(1996), 444.
- (3) 松田・他 2 名, 機論, 61-590, B(1995), 3684.
- (4) Patankar, S.V. 原著, 水谷・香月訳, コンピュータによる熱移動と流れの数値解析, (1985), 森北出版.
- (5) 岡永・棚橋, 機論, 56-530, B(1990), 96.
- (6) 本田・他 3 名, 機論, 57-540, B(1991), 2627.
- (7) 河合・他 2 名, 機論, 55-515, B(1989), 1922.
- (8) Ku, H.C., 他 2 名, J. Comput. Phys., 70(1987), 439.
- (9) 松本・他 2 名, 機論, 62-601, B(1996), 3265.
- (10) 棚橋隆彦編, 第 3 回 JSME-CFD ワークショップ: 三次元立方体キャビティ内の流れ, (1990), 日本機械学会.
- (11) Koseff, J.R., Street, R.L., Trans. ASME, J. Fluids Eng., 106(1984), 390