

四次差分法による二次元自然対流問題の解析*

(第2報, 高レイリー数の場合)

邵長城^{*1}, 松田安弘^{*1}, 若林俊秀^{*2}

Two-Dimensional Natural Convection Analysis by the Fourth-Order Finite Difference Method (2nd Report, In Case of High Rayleigh Numbers)

Changcheng SHAO^{*3}, Yasuhiro MATSUDA and Toshihide WAKABAYASHI

^{*3} Shinshu University, Dept. of Mechanical Systems Engineering,
4-17-1, Wakasato, Nagano City, Nagano, 380-8553 Japan

The natural convection problems in a square cavity have been analyzed as a benchmark problem for two dimensional thermal fluid flow analyses. In this paper, the fourth-order weighted average finite difference method (FWA(C)) is used for the problems of Rayleigh numbers from 10^9 to 10^{11} . The FWA(C) algorithm is a combination of (a centered-difference) $\times W$ and (an upstream-difference) $\times (1-W)$. Here the W is a weighting parameter. Then, the FWA(C) is corrected by an artificial viscosity using the error analysis approach to improve its accuracy and stability. Non-uniform meshes are used to obtain a high accurate solution near the boundary. In these analyses, converged solutions are obtained for Rayleigh numbers from 10^9 to 10^{11} . Thus, the effectiveness of FWA(C) was confirmed by comparing our results with other research works.

Key Words: Two-Dimensional Natural Convection Analysis, Fourth-Order Finite Difference Method, Weighted Average Method, Error Analysis Technique, High Rayleigh numbers

1. 緒言

正方形領域内での自然対流問題はベンチマーク問題の一つとしてレイリー数 $Ra=10^8$ までは多くの研究がなされてきた^(1,2,3,4)。著者らは、過去の研究において二次元粘性流れの差分法としてFrommによる四次ゼロ平均位相誤差手法(FZA)に重みをつけた四次重み付き位相誤差差分法(FWA)と、これに誤差解析手法により得られた補正係数を導入した方式(FWA(C))を提案し、その有効性を示してきた⁽⁵⁾。また先の研究⁽⁶⁾ではFWA(C)方式を自然対流問題の解析に適用し、不等長間隔メッシュによりレイリー数 $Ra=10^6$ から $Ra=10^9$ までの数値実験を行った。本論文は、このFWA(C)方式による $Ra=10^9$ から 10^{11} までの熱流動解析への有効性の検証と、より複雑な物理現象の解明を目的としたものである。

2. 不等長間隔メッシュを用いた 四次差分法による定式化

2.1 基礎式 基礎式として、密度の温度変化を

Boussinesq近似により浮力項にのみ取り入れた流れ関数 Ψ と温度 θ とから成る非圧縮性粘性流体の連続の式、ナビエ・ストークス方程式とエネルギー方程式をそれぞれ無次元化した次式を用いる。

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \text{Pr} Ra \frac{\partial \theta}{\partial x} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (3)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4)$$

ただし、

u, v : x, y 方向の流速、

t : 時間、

θ : 温度、

Pr : プラントル数 (=0.71)、

Gr : グラスホフ数、

Ra : レイリー数 (= $\text{Gr} \times \text{Pr}$)、である。

2.2 不等長間隔メッシュにおける FWA(C) 法の定式化⁽⁶⁾

時間方向はEuler前進法で、式(2)、(3)の移流項は四次差分法のFWA方式により定式化を行い他の微分項

* 原稿受付 1999年6月16日。

^{*1} 正員, 信州大学工学部(〒380-8553 長野市若里4-17-1)。

^{*2} 住友金属工業(株)関西製造所(〒554-0024 大阪市此花区島屋5-1-109)。

E-mail: cslab01@gipwc.shinshu-u.ac.jp

については二次中心差分により離散化した。詳細については文献(6)を参照されたい。

またFWA法の計算精度を向上させるため、式(2)、(3)の拡散項および移流項に補正係数 f と g をかける。これらの補正係数は式(2)、(3)を移流拡散方程式とみなし、その一般解における増幅因子とFWA法による数値解の増幅因子とを等置することにより求められ、図1の不等長間隔メッシュの場合には次式の形になる⁶⁾。

$$f = 1 + \frac{b_x b_y}{r_x + r_y}, \quad g = 1 \quad (5)$$

ここで式(5)の補正係数を導入したFWA方式をFWA(C)法と定義する。ただし、クーラン数を $b_x = u\Delta t/h_x$ 、 $b_y = v\Delta t/h_y$ 、またフーリエ数は式(2)については $r_x = P_r \Delta t/h_x^2$ 、 $r_y = P_r \Delta t/h_y^2$ 、式(3)については $r_x = \Delta t/h_x^2$ 、 $r_y = \Delta t/h_y^2$ とした。ここで h_x 、 h_y : 考えている節点の左下格子の x 、 y 方向の幅、 Δt : タイム・ステップ である。

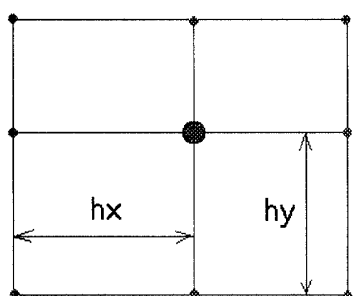


Fig. 1 Nodes in non-uniform meshes

3. 自然対流問題の計算条件

3.1 計算条件 計算対象と流れ関数および温度の境界条件を図2に示す。なお境界上での渦度の評価にはWoods⁷⁾による次式を用いた。

$$\omega_b = \frac{3(\psi_b - \psi_n)}{\Delta x^2} - \frac{\omega_n}{2} - \frac{3}{\Delta x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_b \quad (6)$$

また初期条件として高温壁を除く領域内で温度 $\theta = 0$ とし、全領域で流速 u 、 $v = 0$ とした。なお数値計算は倍精度で行っている。

またメッシュ分割には文献(3)での次式を用いた。

$$\begin{cases} x_i = \frac{\exp\{a(i-1)dx\} - 1}{2\{\exp(a) - 1\}} & (x \leq 0.5) \\ x_i = \frac{\exp\{a[1 - (i-1)dx]\} - 1}{2\{\exp(a) - 1\}} & (x > 0.5) \end{cases} \quad (7)$$

ここで、 $a = 2.0$ 、 $dx = 2/N$ (N : 一辺の分割数) である。なお 200×200 メッシュの場合は非常に見にくくなるため、図3に 100×100 でのメッシュ分割を示す。

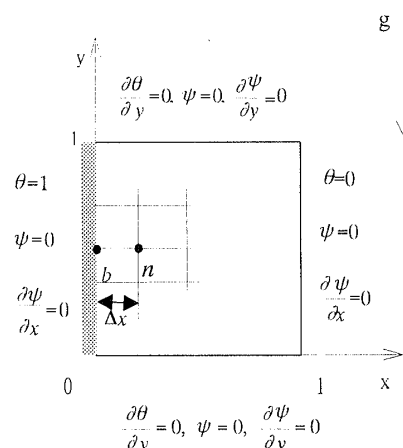


Fig. 2 Boundary conditions

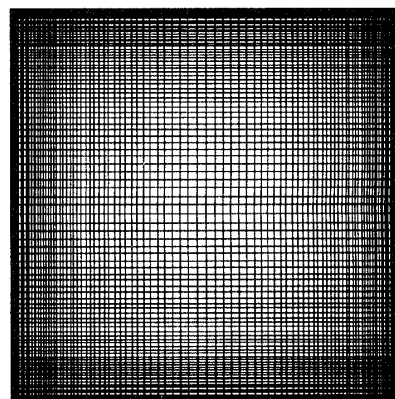


Fig. 3 Non-uniform meshes (100x100)

また文献(5)の検討結果からFWA(C)の重みパラメータとしては $W=0$ が最適であることが示されているため本研究でも $W=0$ とした。すなわち式(5)の補正係数を用いた四次上流差分方式により数値計算を行った。

3.2 収束判定条件 初期条件から左右の壁を通過する熱の移動が定常・平衡状態になるまで数値計算を繰り返した。ここで数値計算は高温壁と低温壁での各平均ヌッセルト数 Nu の差が 10^{-2} 以下になった時点で終了させた。ただし Nu は次式によって表される。

$$Nu = \int_0^1 \frac{\partial \theta}{\partial x} dy \Big|_{x=0,1} \quad (8)$$

なお式(8)の計算において、本論文の検討範囲では $\partial \theta / \partial x$ については二次補間関数の微分(すなわち二次片側差分近似)を、また数値積分ではシンプソン公式を用いた。

3.3 主な計算結果 $Ra=10^9$ から 10^{11} での数値実験の各計算パラメータと主要な結果を表1に示す。各計算結果は3.2節の収束条件を満足しており、左右の壁か

らの熱の出入りが定常・平衡状態となっている。ここで、 Δt 欄での括弧内の数字は計算が発散した際のタイム・ステップであり、各記号の定義を以下に記す。

- Loop : 定常状態になるまでの繰り返し計算回数
 $|\psi_{mid}|$: 領域中央位置 $x=0.5, y=0.5$ での Ψ の絶対値
 $|\psi_{max}|$: Ψ の最大絶対値
 u_{max} : 垂直中心軸上での最大水平速度
 v_{max} : 水平中心軸上での最大垂直速度
 x, y : その値の座標
 \bar{Nu} : 高温壁での平均ヌッセルト数
 Nu_{max}, Nu_{min} : $x = 0$ の境界上での局所ヌッセルト数の最大値と最小値

また $Ra=10^{11}$ の場合には46万回の計算回数で一旦3.2節の収束条件を満足したが、平均ヌッセルト数が小刻みに振動していたため、さらに55万回まで計算した(図13参照)。

4. $Ra=10^9$ での数値計算結果と考察

4.1 計算結果 図4から図6にFWA(C)方式での三通り((a) 100×100 メッシュ、 $\Delta t=10 \times 10^{-8}$ 、(b) 200×200 メッシュ、 $\Delta t=4 \times 10^{-8}$ 、(c) 200×200 メッシュ、 $\Delta t=2 \times 10^{-8}$)の計算結果を示す。図4の流れ関数分布に示すように、 $Ra=10^9$ では流れが浮力項により支配され複雑になっているため $Ra=10^8$ までのような完全な対称に

はなっていないが、構造的には稲田ら⁽⁸⁾とほぼ同様の結果を得た。図5の温度分布図では、同図の左上、右下の部分には複雑な分布が現れているものの、中心付近では等高線は水平となっている。図6は計算領域の中心線上での速度分布図である。これより三種類の解析では同傾向の結果が得られていることが分かる。

4.2 相対渦度変化率 計算結果の収束性を検討するために渦度の相対変化率を検討した。すなわち $|\omega_{i,j}^m| > 0.0002 \times \text{Max}|\omega_{i,j}^m|$ を満たす各節点での渦度の相対変化率を次式で定義した。

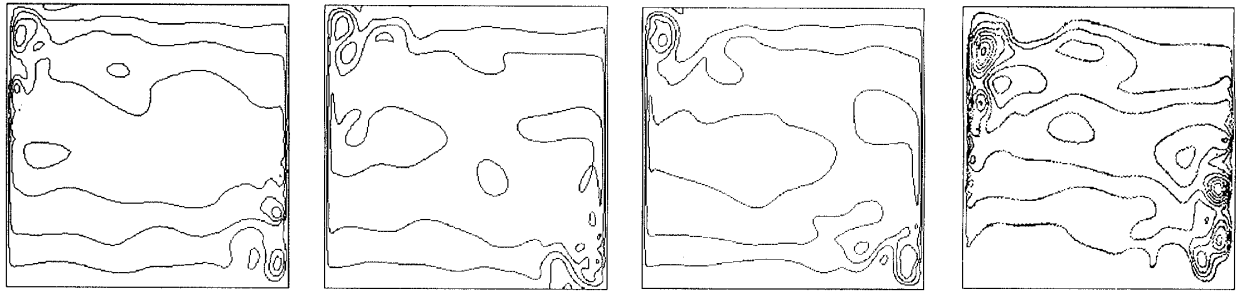
$$\delta\omega = \text{Max} \left| \frac{\omega_{i,j}^{m-1} - \omega_{i,j}^m}{\omega_{i,j}^m} \right| \times 100(\%) \quad (9)$$

ただし、 m は時間方向の繰り返し回数である。図7に $Ra=10^9$ での相対渦度変化率を示す。高 Ra 数流れの非定常性により渦度変化は小さな振動を繰り返している。

4.3 平均ヌッセルト数の収束状況 図8に $Ra=10^9$ での高温壁と低温壁での平均ヌッセルト数(式(8))の計算繰り返し回数による変化を示す。上の線が高温壁、下の線が低温壁での値である。図8(b)に文献(8)での結果をヌッセルト数について同じスケールで示したが、いずれの結果も計算の進行につれて平均ヌッセルト数が定常値に収束し熱量の出入りが平衡状態になっていることが分かる。

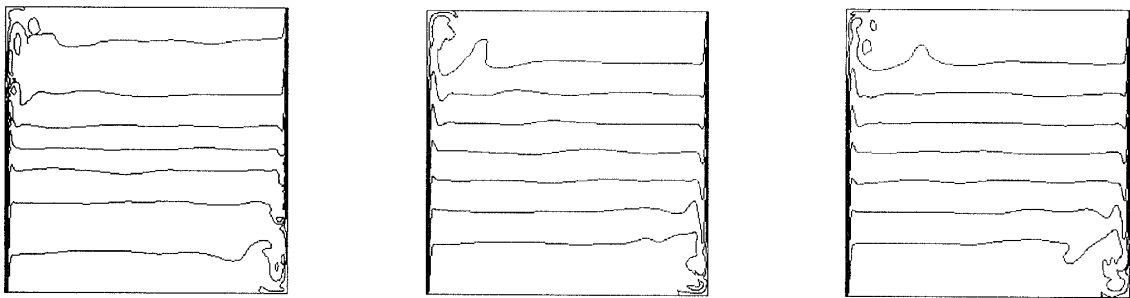
Table 1 Computational parameters and results

Ra	10^9		10^{10}	10^{11}	
	$100 \times 100^{(a)}$	200 × 200		200 × 200	
Meshes	$100 \times 100^{(a)}$	200 × 200		200 × 200	
Δt	10.0×10^{-8} (20.0×10^{-8})	4.0×10^{-8} (5.0×10^{-8})	2.0×10^{-8} (5.0×10^{-8})	2.0×10^{-8} (4.0×10^{-8})	1.0×10^{-8} (2.0×10^{-8})
Loop	200,733	602,861	1,343,205	497,127	550,000
$ \psi _{mid}$	102.39	86.93	96.02	148.75	222.02
$ \psi _{max}$ (x, y)	149.94 (0.962, 0.266)	104.04 (0.056, 0.911)	130.72 (0.070, 0.882)	445.18 (0.073, 0.914)	864.16 (0.034 0.779)
u_{max} (y)	603.03 (0.962)	450.13 (0.904)	450.56 (0.949)	1931.44 (0.774)	2420.21 (0.983)
v_{max} (x)	6662.57 (0.007)	6956.49 (0.007)	6939.38 (0.007)	21238.77 (0.003)	61175.54 (0.003)
\bar{Nu}	58.24	55.32	55.18	104.92	209.32
Nu_{max} (y)	300.30 (0.000)	218.85 (0.003)	217.75 (0.003)	588.38 (0.002)	934.05 (0.002)
Nu_{min} (y)	4.20 (1.000)	2.82 (1.000)	3.32 (1.000)	5.07 (1.000)	8.15 (1.000)



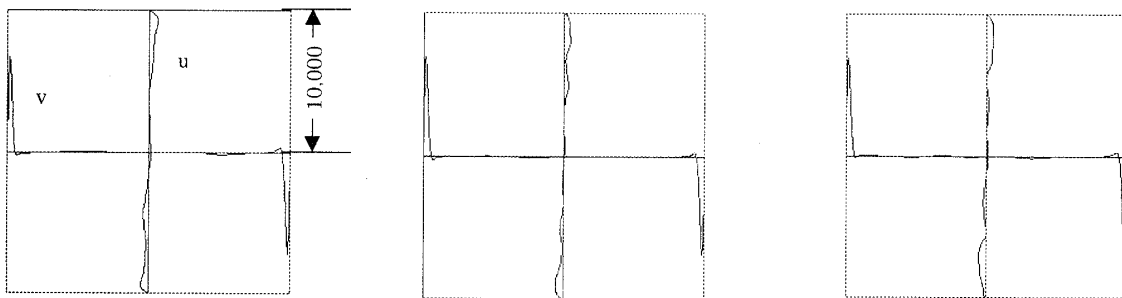
(a) 100×100 meshes, (b) 200×200 meshes, (c) 200×200 meshes, (d) Inada et al.⁽⁸⁾, 80×80 meshes
 $\Delta t = 10.0 \times 10^{-8}$, Loop = 200,733 $\Delta t = 4.0 \times 10^{-8}$, Loop = 602,861 $\Delta t = 2.0 \times 10^{-8}$, Loop = 1,343,205 $\Delta t = 5.0 \times 10^{-8}$, Loop = 300,000

Fig. 4 Contour maps of ψ for $Ra=10^9$ ($\Delta\psi=30$)



(a) 100×100 meshes, $\Delta t = 10.0 \times 10^{-8}$ (b) 200×200 meshes, $\Delta t = 4.0 \times 10^{-8}$ (c) 200×200 meshes, $\Delta t = 2.0 \times 10^{-8}$

Fig. 5 Contour maps of θ for $Ra=10^9$ ($\Delta\theta=0.1$)



(a) 100×100 meshes, $\Delta t = 10.0 \times 10^{-8}$ (b) 200×200 meshes, $\Delta t = 4.0 \times 10^{-8}$ (c) 200×200 meshes, $\Delta t = 2.0 \times 10^{-8}$

Fig. 6 Velocity distributions for $Ra=10^9$

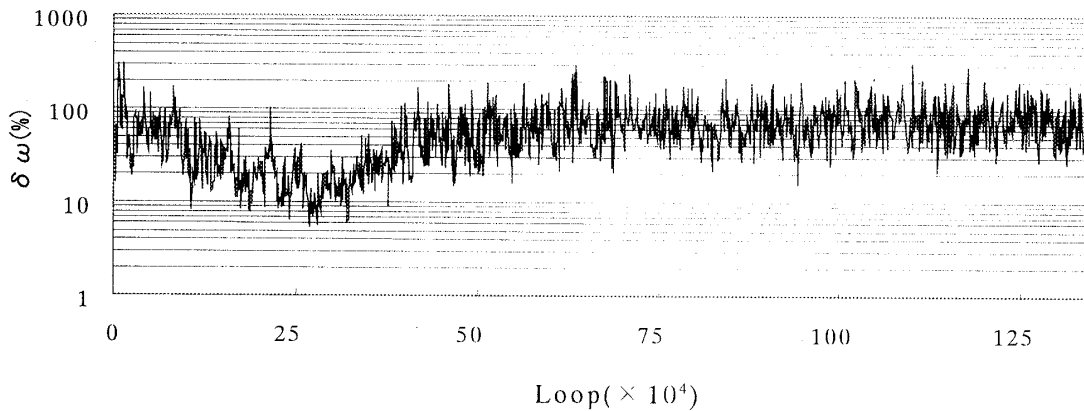


Fig. 7 Change of $\delta\omega$ for $Ra=10^9$ (200×200 , $\Delta t = 2.0 \times 10^{-8}$)

5. $Ra=10^{10}$ での数値計算結果と考察

5.1 計算結果 図9に 200×200 メッシュでの(a)流れ関数、(b)温度、および(c)速度の分布を示す。流れは $Ra=10^9$ の場合よりもさらに複雑となり、特に境界壁の影響でさらに左上角と右下角での渦の発生と熱の混合が激しくなっていることがわかる。また速度分布図から、対流が壁付近に集中していることがわかる。

5.2 相対渦度変化率 図10に相対渦度変化率を示す。高レイリー数での流れの非定常性のため、小さな振動を伴った横ばい状態の推移が分かる。

5.3 平均ヌッセルト数の収束状況 図11に我々の計算結果と文献(8)による高温壁と低温壁での平均ヌッセルト数の変化を示す。これよりFWA(C)法による我々の計算結果では、計算の進行につれて高・低温壁でのヌッセルト数が定常値に収束していくことが分かる。(この点は文献(8)の結果と大きく異なっている。)

6. $Ra=10^{11}$ での数値計算結果と考察

6.1 計算結果 図12に 200×200 メッシュでの(a)流れ関数、(b)温度、および(c)速度の分布を示す。流れ関数および温度分布図から、左右の壁付近で渦の発生と熱の混合が激しく行われると同時に、領域全体で渦が現れていることが分かる。また速度分布図より、上下方向の流れは左右の壁付近のごく薄い範囲内に集中し、水平方向の流れは細かく交錯していることが分かる。

6.2 相対渦度変化率 図13に相対渦度変化率を示す。 $Ra=10^9$ 及び 10^{10} と同様に高レイリー数での流れの非定常性のため小さな振動を伴う横ばい状態で推移している様子が分かる。

6.3 平均ヌッセルト数の収束状況 図14に $Ra=10^{11}$ での高温壁と低温壁での平均ヌッセルト数の変化を示す。これより熱の出入りは高 Ra 数での流れの非定常性のため小刻みに振動しているものの、計算の進行につれて平衡状態に収束していく状況が分かる。

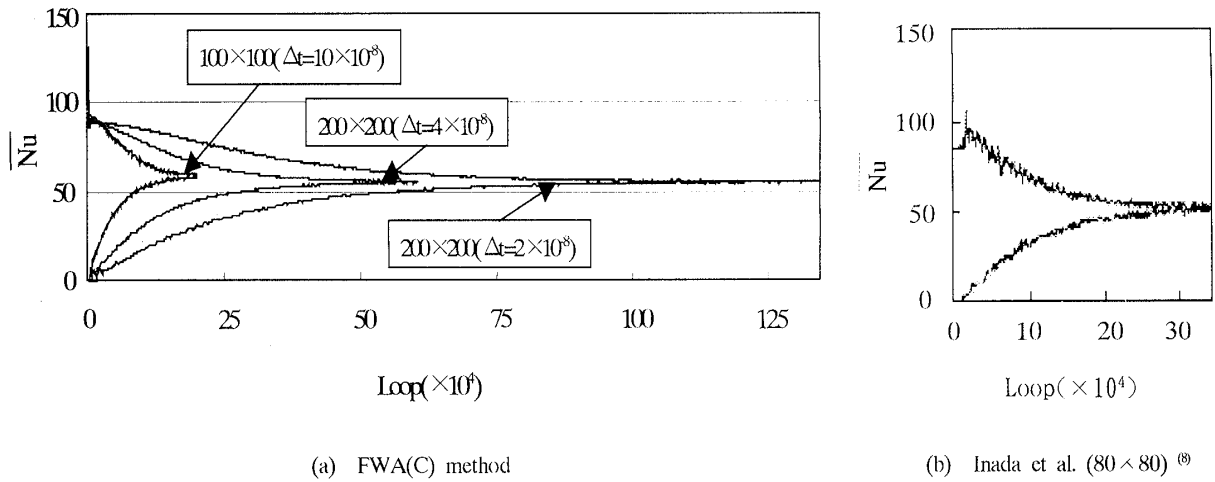


Fig. 8 Change of Nu for $Ra=10^9$

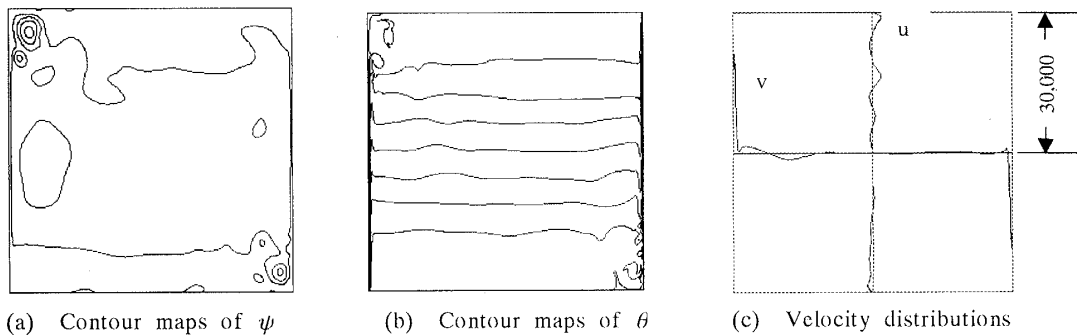


Fig.9 Computational results for $Ra=10^{10}$ ($\Delta t = 2.0 \times 10^{-8}$, $Loop = 497,127$)

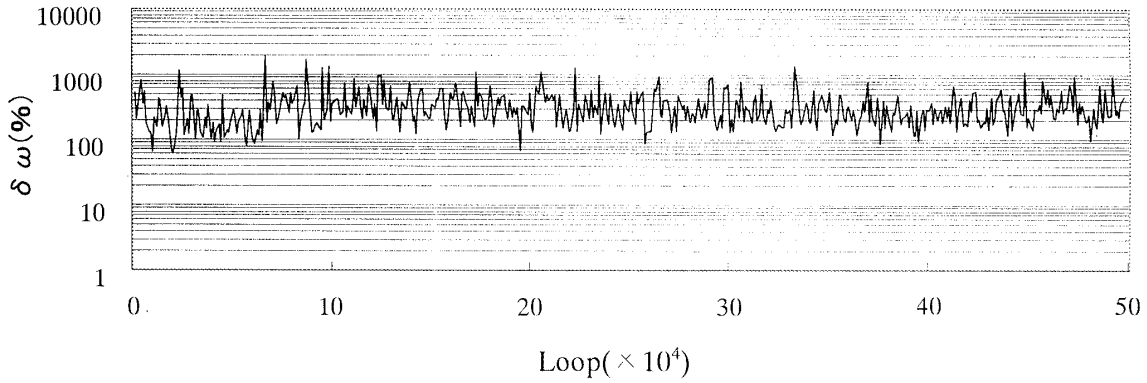


Fig. 10 Change of $\delta \omega$ for $Ra=10^{10}$

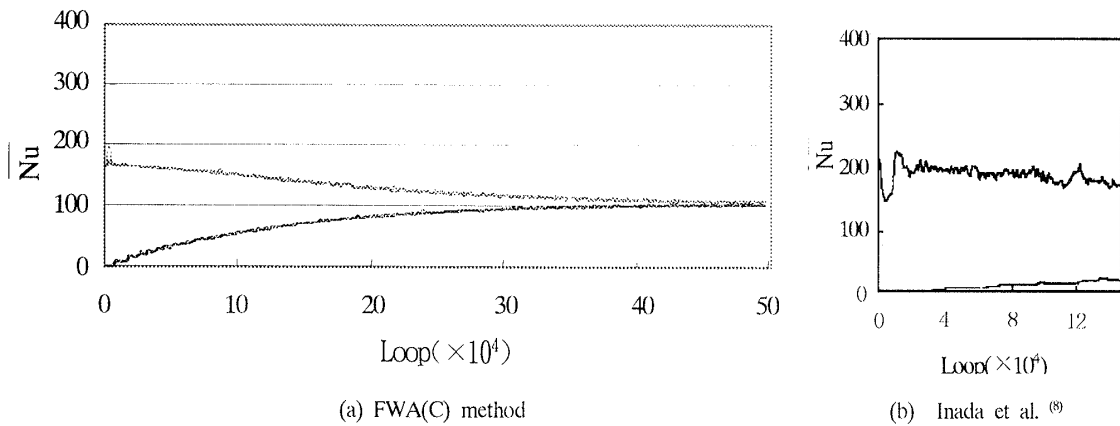


Fig.11 Change of Nu for $Ra=10^{10}$ (200×200)

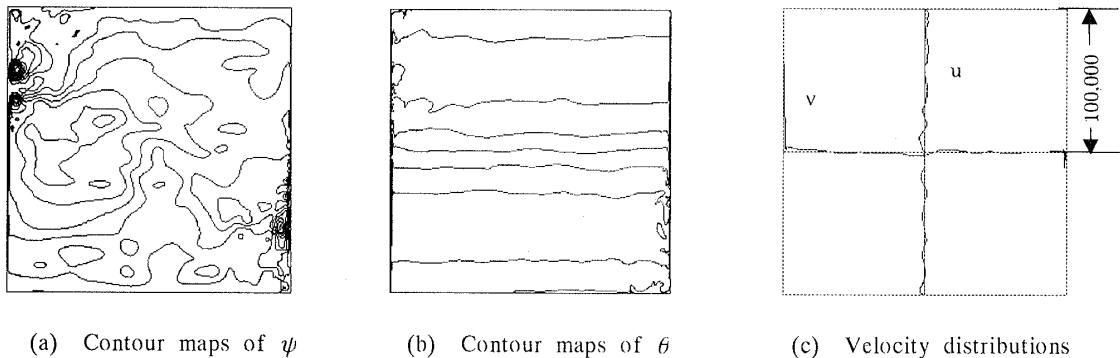
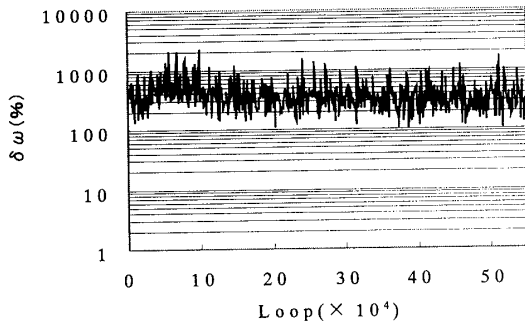
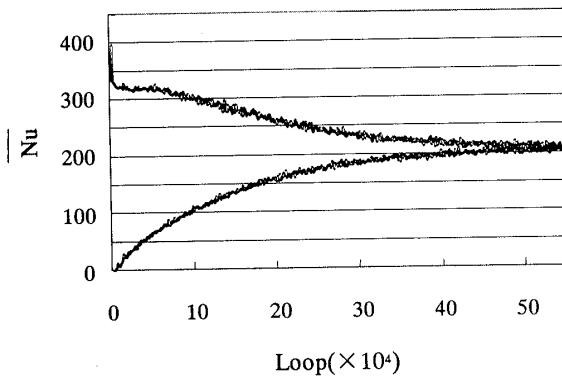


Fig. 12 Computational results for $Ra=10^{11}$ (200×200 , $\Delta t = 1.0 \times 10^{-8}$, $Loop = 550,000$)

7. 平均ヌッセルト数とレーリー数との関係

図15に平均ヌッセルト数とレーリー数との関係をまとめて示した。FWA(C)法による計算結果は最小2乗法により $Nu = 0.357 \times Ra^{1/4}$ の関係式にまとめられ、平均ヌッセルト数がレーリー数と1/4乗に比例しているという実験結果⁽⁹⁾と対応することが確認できる。また比較のため図15と16に他の研究結果を示したが、こ

でMarkatos⁽¹⁰⁾らの結果は乱流モデルによる時間平均値である。著者らの知る限りでは、 $Ra=10^{10}$ と 10^{11} の場合に高・低温壁での平均ヌッセルト数の収束解が得られた研究例は無さそうである。

Fig. 13 Change of $\delta \omega$ for $Ra=10^{11}$ Fig. 14 Change of \overline{Nu} for $Ra=10^{11}$

8. 結論

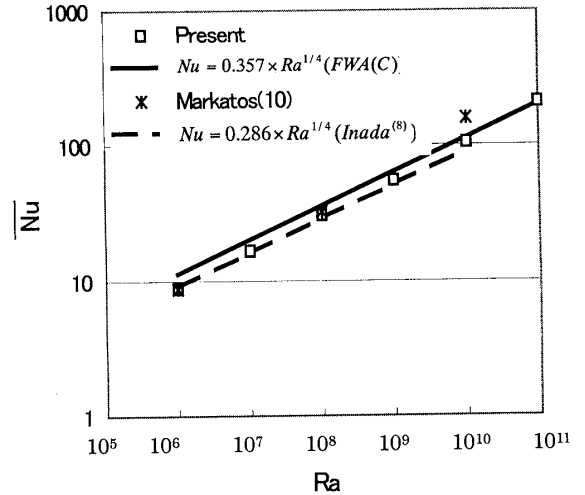
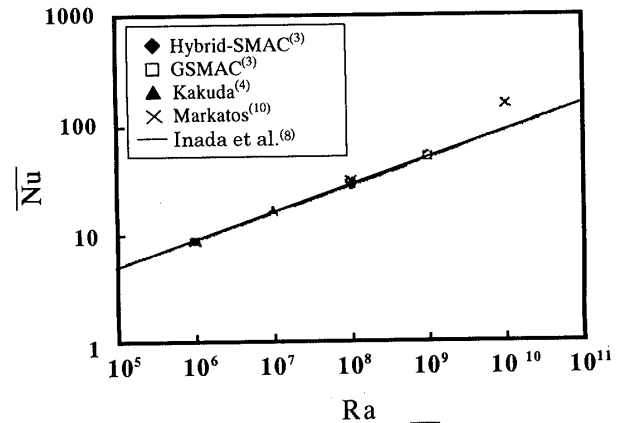
誤差解析手法により補正された四次重み付き位相誤差差分法のFWA(C)方式を用いて正方形キャビティ内での自然対流問題の解析を行い、以下の結論を得た。

(1) レーリー数 (Ra) $10^9 \sim 10^{11}$ の範囲での数値計算において、高温壁と低温壁での平均ヌッセルト数が収束することを確認した。

(2) レーリー数 $Ra \geq 10^9$ では流れは定常状態とならず、特に左上角と右下角では熱の混合が激しく発生している。

(3) 解析範囲における平均ヌッセルト数とレーリー数とが四分の一乗の関係となることから、本解法の熱流動問題解析への基本的な有効性を確認した。

(4) 四次精度の重み付き位相誤差差分法に補正係数を導入した本差分法 (FWA(C)法) により、著者らの知る限りでは現在のところ研究例が無いと思われる高レーリー数 (10^{10} と 10^{11}) での解析が可能となった。

Fig. 15 Relationship between \overline{Nu} and Ra Fig. 16 Relationship between \overline{Nu} and Ra from FWA(C), Ref. (8) and (10)

文献

- (1) G. De Vahl Davis, Int. Numer. Methods Fluids, 3 (1983), 249.
- (2) M.R. Ravi, R.A.W.M. Henkes, C.J. Hoogendoorn, J. Fluid Mech. 262(1994), 325-351.
- (3) 岡永・棚橋, 機論, 56-530, B(1990), 2922.
- (4) 角田・他2名, 機論, 59-564, B(1993), 123.
- (5) 松田・三木, 機論, 60-577, B(1994), 3032.
- (6) 松田・他3名, 機論, 64-617, B(1998), 10.
- (7) Woods, L. C., Aeronaut. Q., 5-3(1954), 176.
- (8) 稲田・他2名, 機論, 62-597, B(1996), 1685.
- (9) 相原利雄, 伝熱工学, 裳華房(1994), 120.
- (10) Markatos, N.C. et al., Int. J. Heat Mass Trasf., 27(1984), 755.