

歯車の3次元接触問題の解析的方法*

(境界要素法を用いた基礎的研究)

田中道彦*¹, 辺見信彦*¹, 籠橋孝光*²

Practical Method for Analyzing the Three Dimensional Contact Problems of Gears

Michihiko TANAKA*³, Nobuhiko HENMI and Takamitsu KAGOHASHI

*³ Shinshu University, 4-17-1, Wakasato, Nagano, Nagano, 380-8554 Japan

This paper describes the analytical method for calculating contact stresses in spur and helical gears using the boundary element method. Since in many old studies the effect of load distribution is not analytically taken into account, attention must be given to some essential and fundamental method for computing the influence of contact stresses into the analysis. The main advantage of applying the boundary element method to the contact problem of gears is to give the proper expressions for load distribution and contact width along the line of contact.

Key Words: Contact Problem, Meshing Gears, Meshing Stiffness, BEM

1. はじめに

本論文は、従来取扱が非常に難しいとされていた歯車の接触問題について、境界要素法を用いた新しい観点からの解析的な方法について研究した結果を報告するものである。

歯車の噛合剛性は歯部全体のたわみ剛性と噛合部での局所的な接触剛性によって決定される。このようなマクロ的な全体特性とミクロ的な局所特性が混在する問題を通常の構造解析手法を用いて解析する場合には、特殊な解析モデルと解析法の工夫が必要となってくる。最も簡単に考えられる方法は、噛合接触部付近を非常に細かな要素に分割し、噛合接触部以外は比較的疎の要素に分割する方法である。しかしながら、このようなモデル化は解析節点数が増大し、要する解析時間も莫大なものとなる欠点がある。

近年、比較的疎に分割したモデルから噛合線上での2点間の影響係数を有限要素法により計算して、接触問題

として計算する方法が提案されている¹⁾。しかしながら、この方法では噛合部の接触特性が考慮できないことから、最近有限要素法解析により近似的に求められた影響関数に局所的な接触特性式を含めて、変形量と接触圧の関係を積分方程式形で表示し、これを更に離散化して解析するという非常に厄介な方法が採られているのが現状である。

本論文では、従来いろいろな問題点のあった歯車の接触問題の解析方法について、境界要素法を用いた純解析的な方法について紹介する。領域を区分近似して解析する有限要素法とは異なり、解析的に導かれた境界積分方程式を直接に解く境界要素法では困難なく歯車の接触特性を扱うことができる。

2. 歯車接触問題への境界要素法の応用

境界要素法解析においても、通常の解析手法で接触問題の解析を行う場合には、接触部近傍を密な境界要素に割し接触部から離れるにしたがって順次分割を粗くしていき、接触の局所的な影響が現れなくなる領域ではほぼ一様な分割とする方法がとられる。有限要素法より

* 原稿受付 1999年8月26日。

*¹ 正員, 信州大学工学部(☎380-8553 長野市若里4-17-1)。

*² 信州大学大学院。

E-mail: tnkmich@gipwc.shinshu-u.ac.jp

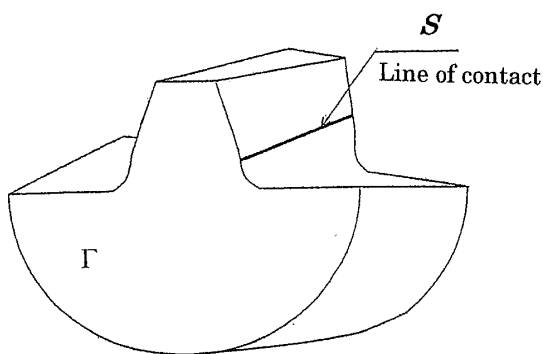


Fig. 1 Contact zone having infinitesimal width

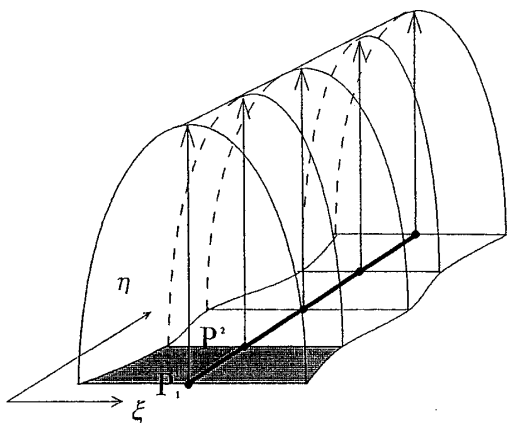


Fig. 2 Cells throughout the contact zone

1次元低い分割をする境界要素法でも、従来の方法による分割要素数はかなりの大きさとなるため、接触判定を伴う繰り返し計算に必要な時間は莫大なものとなる。

そこで、本研究では歯車の自由表面および固定部表面は疎な境界要素で分割し、啮合線には有限な未知の微小幅を持った荷重セルを考えて歯車の接触問題を扱う方法について検討した。これは、境界要素内の変位は要素の内挿関数によって分布するように定式化がされているものの、境界表面を含む領域内の任意の点での変位式を独立に作成することができるためである。

静弾性問題における境界積分方程式は

$$c_{ij}u_{ij}^l + \int_{\Gamma} t_{ij}^* u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* t_j d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^* b_j d\Omega \quad (1)$$

で与えられる。ここに、左辺第1項の u_j は定式化の際での考えている点 l の変位であり、 c_{ij} はその点での特異積分の評価値である。被積分項内での t, u は境界上における積分点での表面力と変位であり、 $\int d\Gamma$ は境界積分を表している。 t^*, u^* は単位荷重を点 l においたときの補助解で、通常基本解と呼ばれているものである。右辺第2項の b は体積力を表し、 $\int d\Omega$ は領域積分を表している。

いま、この体積力を表面で外から物体に作用する分布荷重 p に置き換え、 $\int u^* b d\Omega \rightarrow \int u^* p dS$ とし、境界 Γ を変位0の支持境界 Γ_S と表面力0の自由境界 Γ_f に分けて考えると、式(1)は次式に変形できる。

$$c_{ij}u_{ij}^l + \int_{\Gamma_f} t_{ij}^* u_j d\Gamma_f = \int_{\Gamma_S} u_{ij}^* t_j d\Gamma_S + \int_S u_{ij}^* p_j dS \quad (2)$$

本研究では、境界 Γ を境界要素に分割し、外荷重作用域 S をセル要素に分割する。歯車の接触問題において、図1に示すように、 S は啮合線に沿った有限で微小な幅を持つ接触域となる。ここで、啮合線に沿った接触幅の大きさと作用荷重の分布は、歯のたわみ剛性と啮合部での接触剛性、ならびに歯車対の相対変位(弾性変形によって生じる歯車の相対的な変位)によって決まるものである。この相対変位は、荷重作用域 S での変位で表されるから、 S 上の点 k における変位 u_{ij} に関する式

$$c_{ij}u_{ij}^k + \int_{\Gamma_f} t_{ij}^* u_j d\Gamma_f = \int_{\Gamma_S} u_{ij}^* t_j d\Gamma_S + \int_S u_{ij}^* p_j dS \quad (3)$$

を、式(2)と連立させて接触問題を解けば良いことがわかる。

歯車の接触問題は、通常の構造解析で行われている接触問題と異なり、接触域が歯部全体の構造と較べて線接触に近い極めて微小なる接触幅を持つ点にある。そこで、本研究では接触応力は接触線上で応力が最大となり、歯だけ方向にそって楕円状に分布すると仮定した。すなわち、ヘルツの接触分布と同じように楕円の短軸は接触幅となるが、楕円の長軸である最大接触圧は歯幅の方向に沿って変化するものとした。

3. 離散化と接触判定

歯車全体の要素分割は、啮合線の位置や傾きとは独立に、通常の境界要素解析と同じように表面全体を分割する。荷重セルは、図2に示すように、啮合線の点を中心に歯筋方向上下に等しく、歯幅方向に変化する未知の幅を持つ4角形とする。啮合線に沿って分割された接触域の荷重セル j の啮合線上の接触圧 p_j の節点値を p_j^k とすると、接触域内の任意点での接触圧は内挿関数 ϕ_1, ϕ_2 を使って次の様な楕円分布に表すことができる。

$$p_j(\xi, \eta) = \phi^1(\xi, \eta)p_j^1 + \phi^2(\xi, \eta)p_j^2 \quad (4)$$

$$\phi^1(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\sqrt{1-\xi^2}(1-\eta) \quad (5)$$

$$\phi^2(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\sqrt{1-\xi^2}(1+\eta) \quad (6)$$

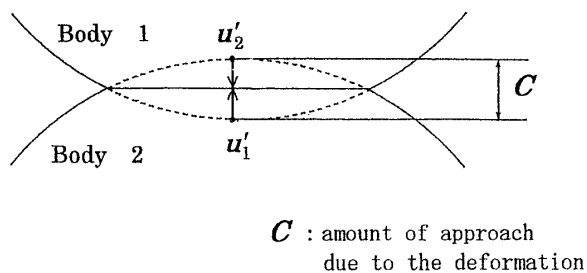


Fig. 3 Deformation of the contact bodies

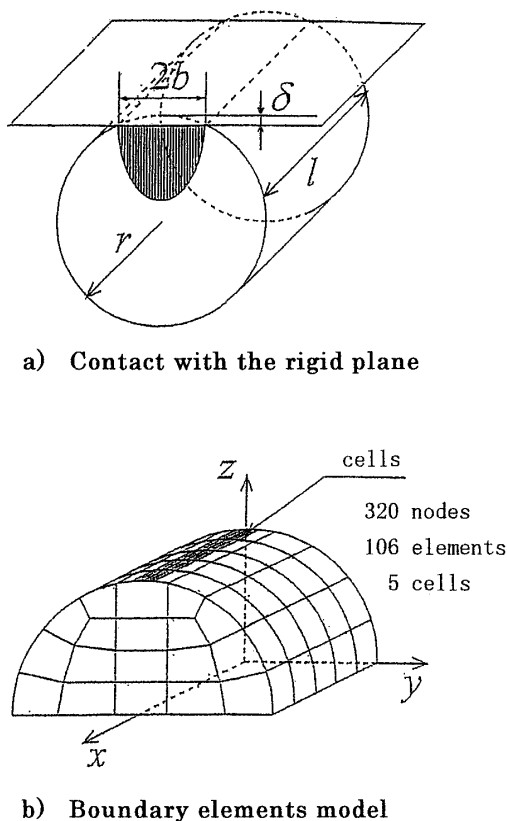


Fig. 4 Hertz contact problem

ここで、 ξ_1 と ξ_2 は4角形荷重セルの歯筋方向と歯幅方向にとった局所座標である。式(2)と(3)を離散化すれば、式(7)、(8)を連立方程式とする噛み合い歯車の一方の歯車の係数方程式を導くことができる。

$$[H]\{u\} = [G]\{t\} + [G']\{p\} \quad (7)$$

$$[c]\{u'\} + [\bar{H}]\{u\} = [\bar{G}]\{t\} + [\bar{G}']\{p\} \quad (8)$$

ここで $\{u\}$ 、 $\{t\}$ は要素節点に関する変位と表面力のベク

トルであり、 $\{u'\}$ 、 $\{p\}$ は荷重セルの嚙合線上の点に関する変位と表面力のベクトルである。

図3に示す2つの歯面が接触変形し、嚙合線上での変位差が引き起こす歯面弾性接近量をCとするなら、嚙合線上の接触条件は

$$\{u'_1\} - \{u'_2\} = \{C\}, \{p_1\} - \{p_2\} = \{0\} \quad (9)$$

となる。ここに嚙合線上の変位 $\{u'\}$ と $\{p\}$ に関する下添字は、図3の2つの歯面を表している。接触解析として、まず任意の大きさの接触幅を初期値として与えて、式(7)、(8)の係数方程式を、式(10)、(11)のように接触する2つの歯車について作成する。

$$\begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ H_1 & c_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u'_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & G'_1 \\ G_1 & G'_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ p_1 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} H_2 & 0 \\ H_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ C - u'_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_2 & G'_2 \\ G_2 & G'_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_2 \\ -p_1 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

嚙合線上での相手歯車との相対変位量 $\{C\}$ を既知として、連立する係数方程式(10)、(11)を解いて、境界要素上の節点に関する表面力 $\{t\}$ と変位 $\{u\}$ 、ならびに嚙合線上の接触圧 $\{p^k\}$ を求める。

得られた結果を用いれば、内点計算と同じように、仮定された接触幅の端点位置における相手歯車との相対変位量を計算することができる。この端点位置における相対変位量より、接触域内で相手歯車との位置関係が重なりあっているか、間隙があるかによって、仮定された接触幅を大きくとったり、また小さくとっていき繰り返す計算により収束計算を行っていく。繰返計算においては、 $[G]$ と $[G']$ の係数マトリクスがその都度計算されることになる。収束判定としては、仮定された接触幅内で、2つの歯車が位置関係において重なりも隙間も無い条件となる。

4. 円筒接触のヘルツ問題への応用

本研究で提案された解析方法の妥当性を検討するため、まず円筒問題の接触解析を行い、これをヘルツの厳密解と比較した。図4-(a)は円筒と平面の接触について示したものであり、同図-(b)は円筒部の境界要素モデルとなっている。ここでは剛体平面との接触解析を行うため、円筒部の半分のみを106の境界要素に分割した。また、剛体平面との接触線に沿って有限な微小幅を持つ5つの荷重セルを配置して、半円筒モデルの下面および側面に垂直な方向を固定し、接触部の相対変位量 $C = 1.83 \times 10^{-2} \text{mm}$ を与えて平面ひずみ状態での解析を行った。

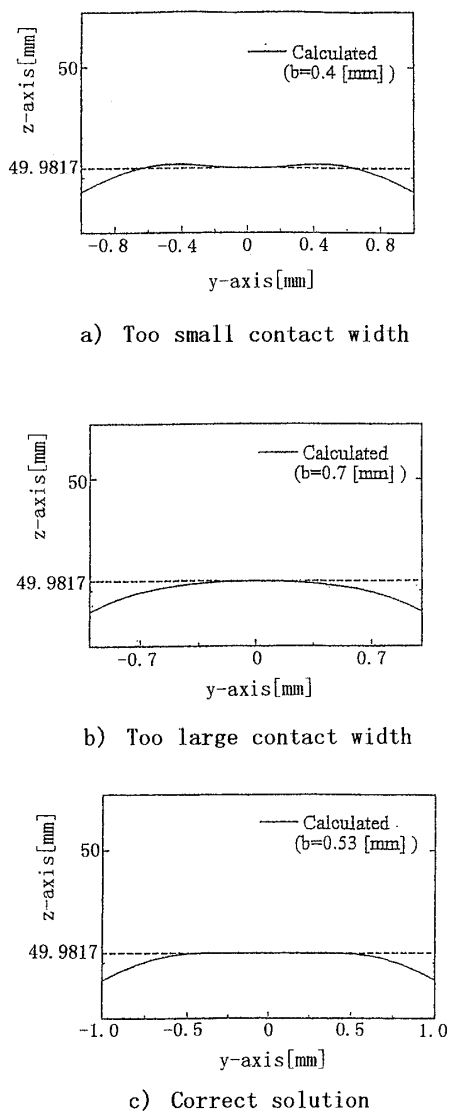


Fig. 5 Iteration process for finding the correct contact width

図5は、円筒接触計算の収束の過程を説明したものである。図5-(a)では、接触の幅を0.4mmとして解析を行った場合での接触域の変形状態を示したものであり、接触域両端（接触幅位置）で破線で示した剛体平面と円筒部上面が重なりあっていることがわかる。これは、仮定した接触幅が小さ過ぎたため、改めて接触幅を0.7mmと大きめに計算した結果が図5-(b)である。図5-(b)において、接触域両端位置で剛体平面と円筒部上面とに間隙が生じていることがわかる。このことは、仮定された接触幅0.7mmが大き過ぎることを意味しており、改めて接触幅を仮定しなおして計算する必要がある。図5-(c)は、接触幅を0.53mmと仮定して計算し直したものであり、仮定された接触域内で剛体平面と円筒上面が重合や間隙なく接触していることを示しており、解が収束したことを示している。得られた接触幅

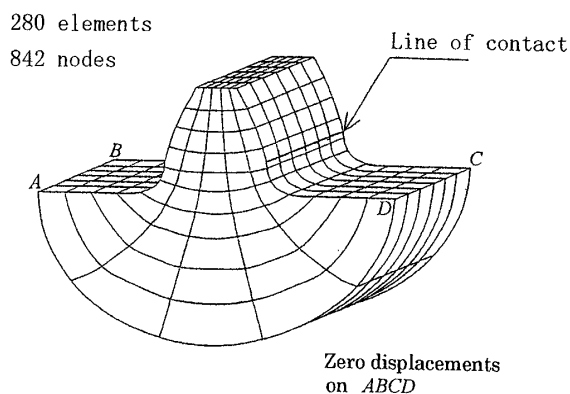


Fig. 6 Spur gear model

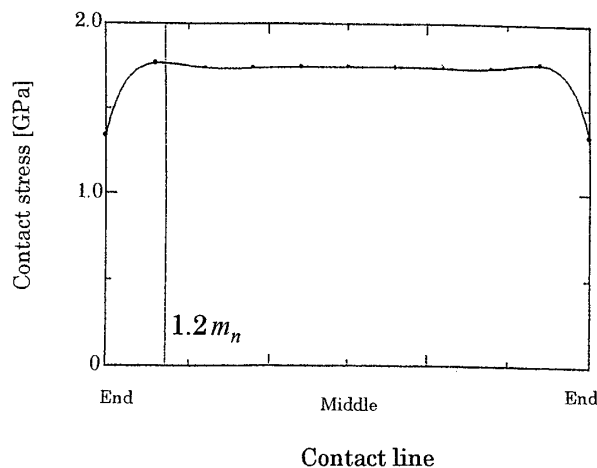


Fig. 7 Stress distribution on the contact line of spur gear

0.53 mm はヘルツ接触問題の厳密解と一致している。

図4、5の円筒問題でのヘルツ接触問題の解析と厳密解との比較から、本研究で開発された接触問題解析プログラムは、実際の接触問題の解析に非常に有効であることがわかる。

5. 歯車の接触解析

本研究で開発された境界要素法による接触問題解析プログラムを、歯車の実際の接触問題に応用してみる。図6は、本解析で用いた平歯車の境界要素法モデルであり、2次要素により280要素、842節点に分割しており、歯車基底部底面は固定としている。歯車の諸元は、モジュール $m=3$ 、歯数 $Z=30$ 、歯幅 $b=30$ 、頂隙係数 $c_k=0.25$ 、圧力角 $\alpha=20^\circ$ である。また、接触線は歯車中心から44mmの位置にとり、荷重セル数は10、相手歯車

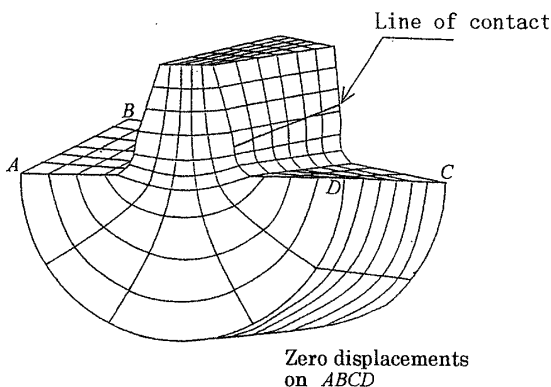


Fig. 8 Helical gear model

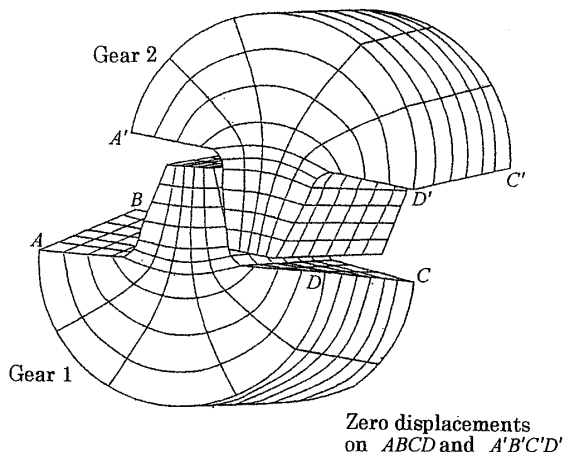


Fig. 10 Contact problem of two mating helical gears

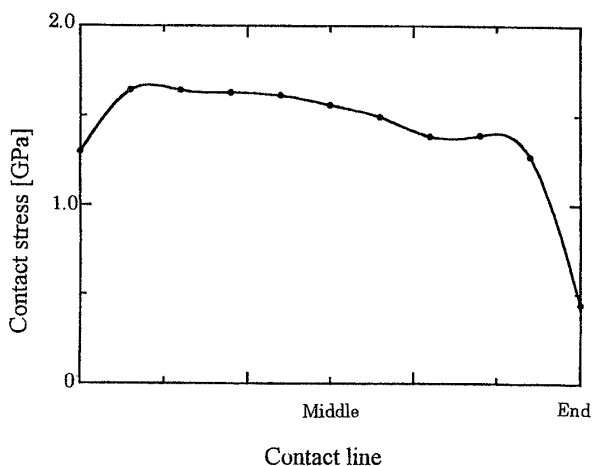


Fig. 9 Stress distribution on the contact line of helical gear meshing with rigid one

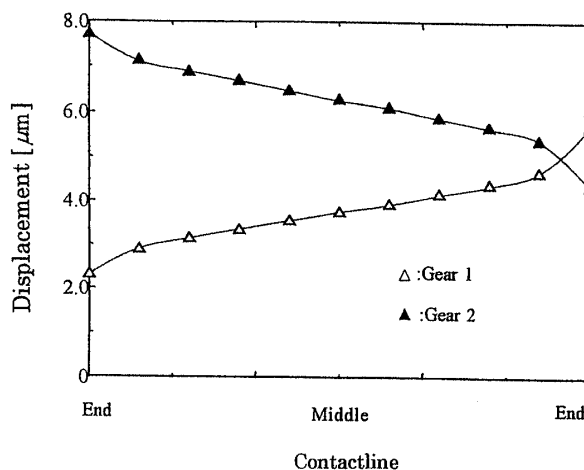


Fig. 11 Displacement distribution along the contact line

との相対変位量を $10.0\mu\text{m}$ として解析を行った. 図 7 は, 相手歯車を剛体平面として解析した場合に得られた接触圧分布について示したものである. これによると, 平歯車の接触応力の分布は, 歯幅中央部ではほぼ一様であるが, 歯幅端で低くなる傾向がある. また, m_n を歯直角モジュールとすると, 歯幅端から $1.2m_n$ 付近で最大接触応力が生じているが, このことは小出等の実験結果²⁾と傾向が同じとなっている.

図 8 は, はずば歯車の境界要素法モデルであり, 2 次要素により 280 要素, 842 節点に分割している. 歯車の諸元は, $m_n=3$, $Z=30$, $b=30$, $c_k=0.25$, $\alpha=20^\circ$, ねじれ角 $\beta=10^\circ$ である. また, 接触線はもっとも近い点で歯車中心から 44mm の位置にとり, 荷重セル数は 10, 相手歯車との相対変位量を $10.0\mu\text{m}$ として解析を行った. 図 9 は相手歯車を剛体とした場合での, はずば歯車の

接触応力の分布であり, 歯のたわみ剛性の高い歯元側での接触応力が高くなっている.

図 10 は, 図 8 のはずば歯車モデルに, これと同じ諸元を持つはずば歯車を嚙合せた歯車同士の接触モデルを示したものである. 各歯車基底部底面は固定とし, 歯車接触線に沿って一様な相対変位量 $10.0\mu\text{m}$ を与えて解析した. 図 11 は, 解析によって得られた一方のはずば歯車の嚙合線上の変位分布を Δ 印で, また相手歯車の変位を \blacktriangle 印で示したものである. これによると, 歯のたわみ剛性の高い歯元側での変位量が小さくなっている. 図 12 は, 嚙合線上に沿った接触応力分布を示したものである. これによると, 嚙合線に沿った変位分布は一定でないにも関わらず, 相手歯車が同じ諸元の弾性体であるため, 接触応力は 2 つの歯車のたわみ剛性が相殺しあつてほぼ一定の分布となっている.

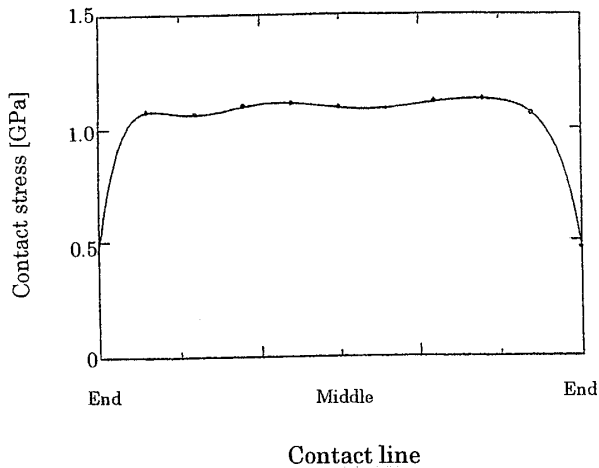


Fig. 12 Stress distribution on the contact line of two mating helical gears

6. まとめ

本論文では、従来解析上いろいろな問題点のあった歯車の接触問題について、新しい観点からの解析法について述べた。本論文で得られた成果を要約すると次のようになる。

- (1) 境界要素法を用いた3次元歯車接触問題の新しい境界積分方程式解法について示した。
- (2) 本方法は、歯車モデルの要素分割パターンに無関係に接触線をとった解析が可能な、簡便で汎用的な解法である。
- (3) 接触線上に有限な微小幅を持つ荷重セルを考慮することにより、モデルの要素分割に独立な接触解析が可能とした。
- (4) 境界要素法を用いることにより、全体特性（曲げ剛性）と局所特性（接触剛性）を区別することなく、純解析的な解法が可能となった。

- (5) 本方法により解析された円筒接触問題はヘルツの理論解と一致し、本解析法の妥当性が確認された。
- (6) 本方法を平歯車に応用した結果は、従来報告されているものと傾向を同じにする。
- (7) 本方法は、従来取り扱いが複雑であった歯車の弾性接触問題を、新しい観点から解析する専用の方法となっている。

本論文では、境界要素法を用いた新しい観点からの歯車接触問題の解法について述べ、ヘルツの円筒接触問題での解析法の検討から、平歯車およびはすば歯車解析への応用の可能性について探った。

今後の課題としては、解析プログラムの簡素化と解析時間の短縮化による実際的なプログラムにしていく予定であり、はすば歯車から傘歯車などの問題を解決していく予定である。特に、クラウニングを施した場合や歯形誤差のある場合など、また噛合歯車の歯面間の間隙と相対変位量の関係など本解析法が今後適用できる分野は少なくない。また、複数歯噛合における接触応力分布や荷重分担率、さらには噛合ピッチ点における伝達力評価の問題などもある。

最後に、本研究にご協力を頂いた信州大学大学院博士前期課程院生石橋寛之君にお礼申しあげる。また、歯車接触に関して貴重なご意見を頂いた鳥取大学宮近幸逸博士にお礼申しあげる。

7. 参考文献

- (1) Lowell E. Wilcox, International Symposium on Gearing and Power Transmission, 1981 Tokyo, Vol. 2, 115.
- (2) 小出隆夫, 小田哲, 機論, 64-626, C(1998), 4015.