Journal of the Faculty of Engineering, Shinshu University, **No.74,1994**
信州大学工学部紀要 第74号

粗近傍を用いた画像ノイズの除去について

井村 寛* 江口 正義** 不破 泰*** 中村 八束****

On the Elimination of Noise in Images by using the Concept of a Loose Neighborhood

Hiroshi IMURA Masayoshi EGUCHI Yasushi FUWA
Yatsuka NAKAMURA

In this study, we defined the concept of a Formal Topology by extending the ideas of Finite Topology used as a geometry for discrete spaces. We also defined such concepts as boundaries, closures, interiors, isolated points, and connectedness for Formal Topological Spaces and applied them to the work of image processing. As a result, the mathematical nature of more complicated image processings were clarified.

The detection of images such as flaws on a hard disk is difficult with conventional image processing techniques because such images may appear as disconnected points embedded in noise. By defining the concept of a loose neighborhood for describing the adjacency relationships of disconnected points in a formal topological space, we performed the detection of flaws on an actual hard disk and verified the effectiveness of these concepts.

1. はじめに

従来，図形は連続的な対象物として扱われ，連続的な図形，空間の幾何学である位相幾何学が，図形の性質，認識などの研究に役立ってきた．しかし，コンピュータにおける画像処理では，画像を画素と呼ばれる格子状に分割し，各画素における濃淡を量子化することによって表現する．ところが，位相幾何学ではこのような互いに離れた点の集まりは，隣接関係のない単なる点の集まりとして扱われる．しかし，空間は分割されても全体としての形や点どうしには隣接という関係がある．このため，従来の位相幾何学ではコンピュータによる画像処理に対応することができない．

従来から画像工学では隣接関係を「近傍」という概念でとらえる幾何学的な研究もされてきた[1]．しかし，近傍の形が限定されている上，数学的な性質も十分には研究されてい

* 大学院博士後期課程 システム開発工学
** 情報工学科 助手
*** 情報工学科 助教授
**** 情報工学科 教授

ない．そこで，著者らは近傍の形の限定を取り除いた Finite Topology を定義して，その数学的性質を解析し，この離散的な幾何学が画像処理に有効なことを示した[2)3)]．

Finite Topology では各点の近傍を 1 つしか考えていない．そのため，多種類の隣接関係を同時に考えて処理しなければならないような画像処理に対しては，その処理を表現すると複雑になってしまい数学的な性質が分かりにくくなってしまう．そこで，本論文では複数の近傍を同時に考えることができるように，Finite Topology を拡張し Formal Topology として定義した．

そして，Formal Topological Space において画像処理に有用な「境界」,「内点」,「閉包」,「連結性」などの概念を定義し，その数学的な性質を明らかにした．この結果は複雑な画像処理の数学的な基礎づけや性質の解明に役立つと考える．

これらの応用の一例として，実際のハードディスクの製造工程で生じる傷の検出を行なった．ハードディスクの表面を傷が見えるような画像として取り込もうとすると，その傷は多数のノイズの中に埋もれたものになってしまう．しかも，傷は離ればなれになっている．このようにノイズに埋もれた離ればなれの対象を画像処理で検出することは困難であった．しかし，傷のついている方向をいくつか考慮し，それに対応した複数の粗近傍（離れた点が隣接関係にある近傍）を用いた Formal Topology による処理により，傷の検出に成功し，本手法の有効性を示した．

2. Formal Topology と画像処理

2.1 Formal Topology の定義と近傍

Xを一般の集合とした時，Xの各点 x に対し Xの部分集合族 $\mathcal{U}(x)$ が定まっている時，$(X,\mathcal{U})$ を Formal Topological Space と定義する．このとき，$\mathcal{U}(x)$ を近傍の基 (*base of neighbourhoods*) と呼び，$\mathcal{U}(x)$ の要素である Xの部分集合を x の近傍と呼ぶ．

画像工学では x の近傍に属する点は x と隣接関係があるとみなす．Formal Topology では各点に複数個の近傍が対応しており，同時に複数の種類の隣接関係を考慮していることになる．近傍は，図 1 のように様々な形が考えられる．従来の画像工学で良く使われてい

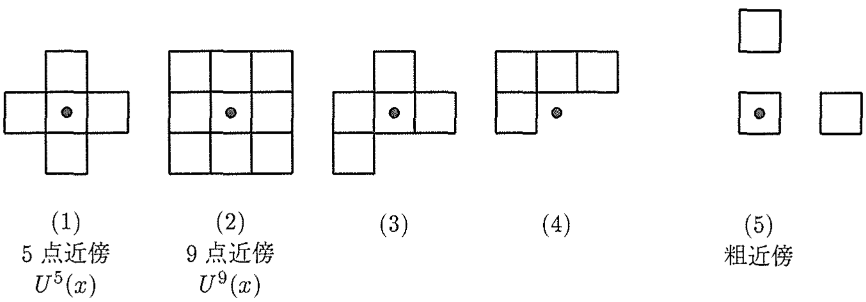


図 1 様々な形の近傍

るのは，図 1–(1) の 5 点近傍や図 1–(2) の 9 点近傍などであるが，図 1–(4) のように自分自身を含まないような近傍や，図 1–(5) のように離れた点を近傍とする形も考えられる．このような 9 点近傍以外の点が近傍に属する場合，この近傍を粗近傍と呼ぶ．

$\mathcal{U}(x)$ がただ 1 つの部分集合からなる時，Finite Topological Space となる[3]．

また，$\mathcal{U}(x)$ が無限個の部分集合で，かつ，次の 3 つの条件が成り立つ時，従来から位相数学で研究されている General Topological Space となる．

1. $\forall\, x \in X;\ \forall\, U(x) \in \mathcal{U}(x);\ x \in U(x)$　　（この性質を filled と呼ぶ．）
2. $\forall\, U_1(x),\ U_2(x) \in \mathcal{U}(x);\ \exists\, U_3(x) \in \mathcal{U}(x);\ (\ U_3(x) \subseteq U_1(x) \cap U_2(x)\ )$
3. $\forall\, x \in X;\ \forall\, U_1(x) \in \mathcal{U}(x);\ \exists\, U_2(x) \in \mathcal{U}(x);$
   $\forall\, y \in U_2(x);\ \exists\, U_3(y) \in \mathcal{U}(y);\ U_3(y) \subseteq U_1(x)$

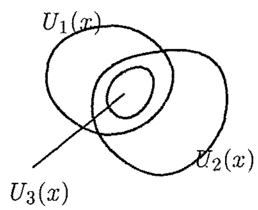


図 2　条件 2 の概念図

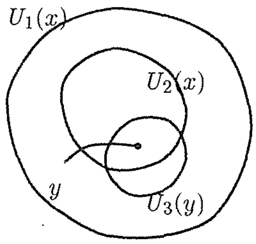


図 3　条件 3 の概念図

このように，Formal Topological Space は離散的空間の幾何学である Finite Topology や連続空間の幾何学である General Topology を包含する一般的な位相空間である．このため，連続空間と離散的空間のどちらにも対応することができる理論を構築することができる．

2.2 Formal Topology における諸概念

以下では Formal Topological Space において様々な概念を定義し，画像処理との対応を示し，その数学的性質を明らかにする．

Definition 2.1 境界 (Boundary) Xの部分集合 A の境界 *(boundary)* A^{∂} とは，

$$A^{\partial} = \{x : \forall\, U(x) \in \mathcal{U}(x);\ U(x) \cap A \neq \phi \ and\ U(x) \cap A^c \neq \phi\}$$

と定義される．

図 1–(1) で示す 5 点近傍を用いて近傍の基 $\mathcal{U}(x) = \{U^{(5)}(x)\}$ について境界 A^{∂}を求めると，図 4 の画像に対して図 5 が得られる．これは，画像工学では「輪郭の抽出」と呼ばれる処理と考えられる．

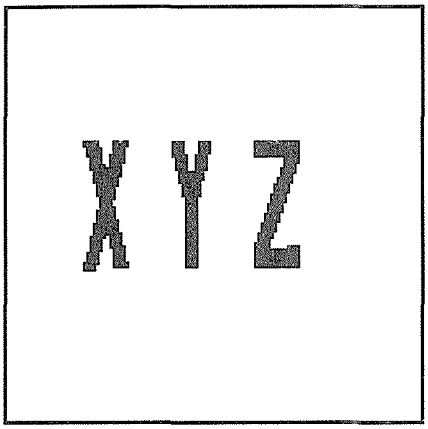


図 4　原画像

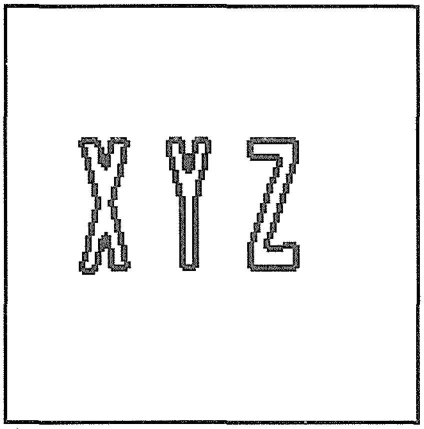
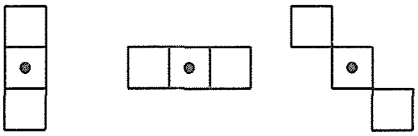


図 5　5 点近傍による境界

境界の形は，近傍の基 $\mathcal{U}(x)$ の種類に依存する．例えば図 4 の画像に対して，図 6 の $U_1(x)$ で示す縦の 3 点近傍を用いて $\mathcal{U}(x)=\{U_1(x)\}$ とすると，境界 A^∂は，図 7 のようになる．縦の 3 点近傍による境界は，縦方向に見ていった時の図形の境界が得られる．このため，横線の境界が主に抽出される．

また，図 6 で示す縦，横，ななめの 3 点近傍を組み合わせ，近傍の基$\mathcal{U}(x)=\{U_1(x),U_2(x),U_3(x),U_4(x)\}$ で境界 A^∂を考えると，図 8 のようにコーナー点を抽出することができる．(ただし，縦，横，ななめの 4 方向についての境界しか考えていないため，4 方向のコーナー点の他にそれ以外の傾きの境界が抽出されている．)

A^∂を集合 A の変換と考えると，近傍の基 $\mathcal{U}(x)$ の種類によって変換結果が変わる．$\mathcal{U}(x)$ に依存することを表現するために，$A^{\partial<\mathcal{U}>}$と書くこともある．これは以下の変換においても同様に表現できる．



$U_1(x)$　　$U_2(x)$　　$U_3(x)$　　$U_4(x)$

図 6　3 点近傍

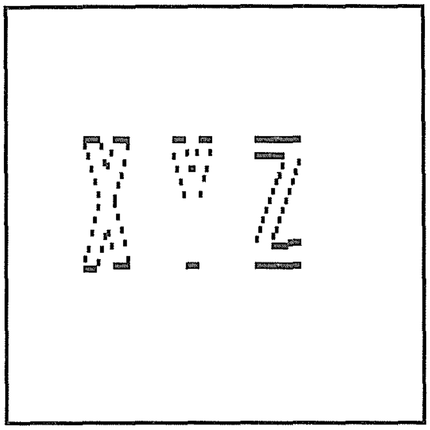


図 7　縦 3 点近傍による境界

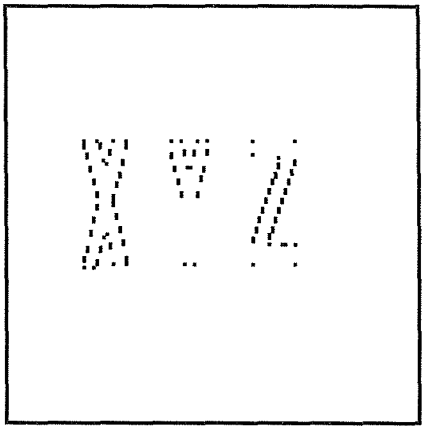


図 8　コーナー点

Theorem 2.1 $\mathcal{U}(x) = \{U_1(x),\ U_2(x),\ \cdots,U_n(x)\}$ の時,

$$A^{\partial<\mathcal{U}>} = \bigcap_{i=1,\cdots,n} A^{\partial<\mathcal{U}_i>}$$

ただし, $\mathcal{U}_i$は$\mathcal{U}(x)$ の各要素ごとを近傍の基$\mathcal{U}_i = \{U_i(x)\}$ とすることである. また, 有限個でなく一般に$\mathcal{U}(x) = \{U_\alpha(x)\}_{\alpha\in\Lambda}$のときにも,

$$A^{\partial<\mathcal{U}>} = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} A^{\partial<\mathcal{U}_\alpha>}$$

が成り立つ.

これは, 近傍の基に属する近傍が複数個ある時に, この近傍系による図形の境界は, それぞれの近傍についての境界の共通部分になることを意味する. この定理によって Formal Topology の境界を Finite Topology の境界で表現することができるが複雑になってしまう.

Definition 2.2 閉包 (Closure) A の閉包 *(closure)* A^b は,

$$A^b = \{x : \forall\ U(x) \in \mathcal{U}(x);\ U(x) \cap A \neq \phi\}$$

と定義される.

近傍の基として図 1-(1) で示す 5 点近傍を用いて$\mathcal{U}(x) = \{U^5(x)\}$ について閉包 A^bを求めると, 図 4 の画像に対して図 9 が得られる. これは, 画像工学では「膨張」と呼ばれる処理である.

Definition 2.3 内点集合 (Interior) A の内点集合 *(interior)* A^i は,

$$A^i = \{x : \exists\ U(x) \in \mathcal{U}(x);\ U(x) \subseteq A\}$$

と定義される.

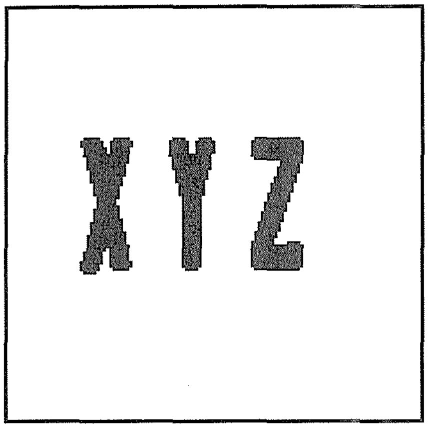


図 9　5 点近傍による閉包

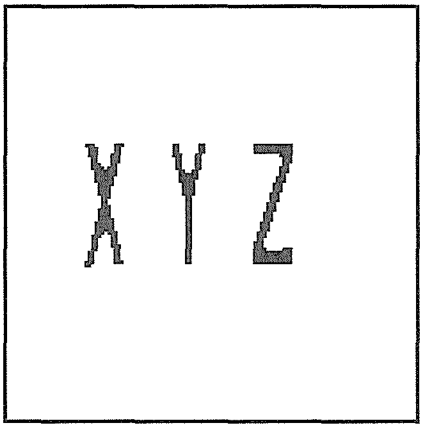


図 10　5 近傍による内点集合

近傍の基 $\mathcal{U}(x) = \{U^5(x)\}$ を用いて内点集合 A^i を求めると，図 4 の画像に対して図 10 が得られる．これは「収縮」と呼ばれる処理である．

Theorem 2.2 $\mathcal{U}(x) = \{U_1(x),\ U_2(x),\ \cdots\ , U_n(x)\}$ の時，

$$A^{b<\mathcal{U}>} = \bigcap_{i=1,\cdots,n} A^{b<\mathcal{U}_i>}$$
$$A^{i<\mathcal{U}>} = \bigcup_{i=1,\cdots,n} A^{i<\mathcal{U}_i>}$$

ただし，$\mathcal{U}_i$ は $\mathcal{U}(x)$ の各要素ごとを近傍の基 $\mathcal{U}_i = \{U_i(x)\}$ とすることである．

収縮で（あるいは膨張と組み合わせて）傷の検出を行なうことができる[4]．そして，近傍の基の種類を変えることによって検出する傷の種類を変えることができる．

例えば，右下がりに連結した傷を検出するには，図 11 に示す近傍を用いて $\mathcal{U}(x) = \{U_1(x), U_2(x), \cdots, U_9(x)\}$ を近傍の基とする収縮を繰り返し求めることによって行なう．この近傍は右下がりにつながっていることを意味するパターンを集めたもので，右下がりにつながっている図形を検出することができる．右下がりにつながっていないものは収縮の性質から取り除かれていく．収縮を行なう回数は傷の大きさによって決めるが，最後に画素が残っていれば右下がりの傷があると判断する．収縮を繰り返すと図形はどんどん小さくなってしまう．適切な膨張と組み合わせると，ノイズは除去され傷はあまり小さくならないように検出することができる．

Definition 2.4 孤立点 (Isolated Points) A の孤立点集合 *(a set of isolated points)* A^s は，

$$A^s = \{x : x \in A \ and \ (\exists\ U(x) \in \mathcal{U}(x);\ (U(x) \setminus \{x\}) \cap A = \phi\}$$

と定義される．

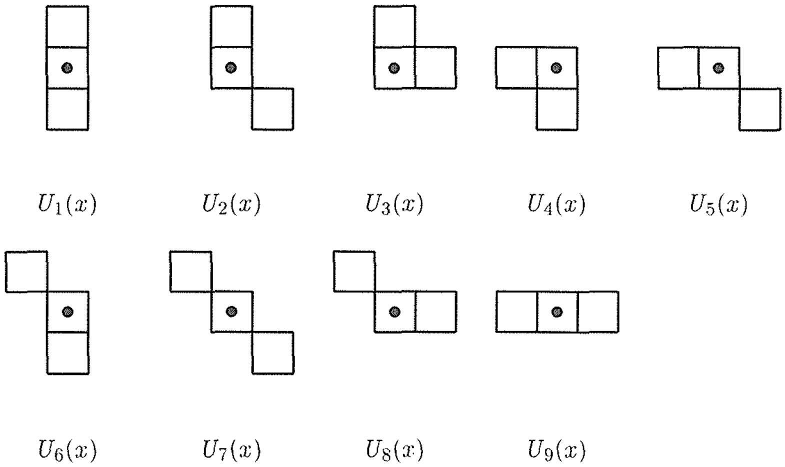


図 11　右下がりの傷を検出する近傍

これは，画素の近傍に他の画素が含まれていないことも意味し，画像工学では「ノイズ」と呼ばれる．そこで，

$$A^n = A \setminus A^s$$

と定義すると，A^n は「ノイズ除去」の処理になる．

Definition 2.5 連結集合 (Connected Set) A が連結 *(connected)* とは，

$$\forall\ B \subseteq X;\ \forall\ C \subseteq X;\ A = B \cup C,\ B \neq \phi,\ C \neq \phi,\ B \cap C = \phi$$
$$\rightarrow B^b \cap C \neq \phi \ or\ C^b \cap B \neq \phi$$

と定義される．

これは，図形が連結していることを表している．

Theorem 2.3 X が *filled symmetric finite topological space* で，A の要素が有限の時，

$$A\ が\ connected\ \Leftrightarrow\ \forall\ x \in A;\ (\cdots((\{x\}^b \cap A)^b \cap A)^b \cdots)^b \supseteq A$$

この定理は，連結成分を検出する方法を与える．

また，以上の概念において成り立つ様々な数学的性質を証明できる．たとえば，

1. $((A^c)^i)^c = A^b$
2. $((A^c)^b)^c = A^i$

3. $A \subseteq B \Rightarrow A^i \subseteq B^i$, $A^b \subseteq B^b$

4. Xが filled の時，$A^i \subseteq A$, $A \subseteq A^b$

5. $A^\partial = A^b \cap (A^c)^b = (A^c)^\partial = A^b \cap (A^i)^c = A^b \setminus A^i$

これらの定理は画像処理の性質の解明などに役立つと考えられる．

3.　ハードディスクの傷の検出

ハードディスクの製造工程で表面にさまざまな傷が発生する．その種類にはスクラッチ傷や接傷と呼ばれるものがある．これらの傷を画像として取り込むと，ノイズが多く傷も画素が離れていて，画像処理による検出が難しい対象である．例えば，図 12 で示すハー

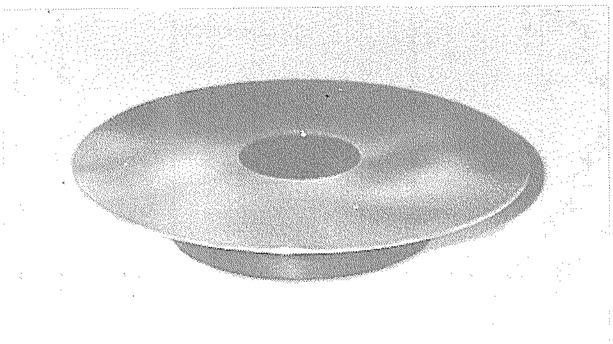


図 12　ハードディスクの外観

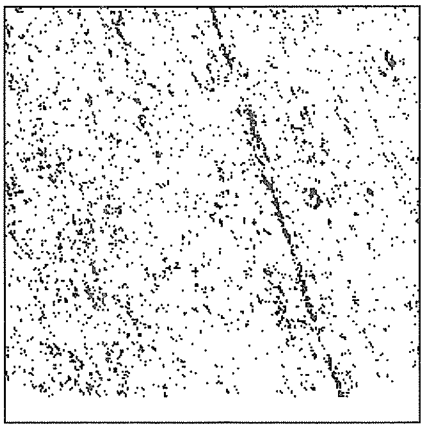


図 13　ハードディスクのスクラッチ傷

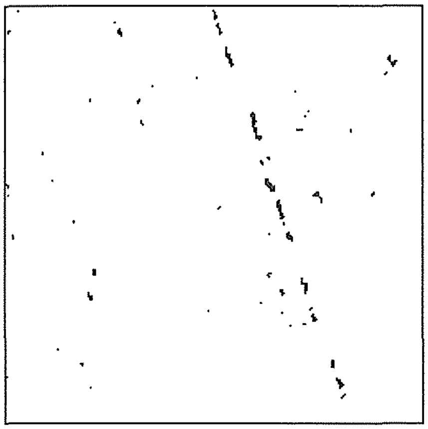


図 14　3 回処理した結果

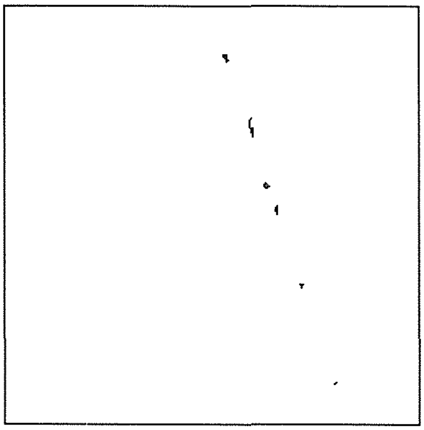


図 15　7 回処理した結果

スクラッチ傷の検出

ドディスクの表面を取り込むと，スクラッチ傷は図 13 のようにノイズに埋もれたものになる．

この傷は右下がりになっているので，検出するためには図 11 を近傍の基とする収縮を繰り返すことによって行なう．しかし，図 13 に対して収縮を行なうと，3 回処理した時点で図 14 となりまだノイズが残っている．ノイズが完全に除去されるまで収縮を繰り返すと図 15 となり，検出された傷はだいぶ小さくなってしまう．ノイズが多い時はノイズ除去のために収縮回数を増やさなければならない．このため，ノイズが多い場合には正しく傷を検出できない．これは，図 11 の近傍の基では隣合った画素だけを近傍としているため，スクラッチ傷のように画素が離れているような傷の形状を内点として検出することは難しいからである．

そこで，図 16 で示す粗近傍を用い，$\mathcal{U}(x) = \{U_1(x), U_2(x), \cdots, U_{25}(x)\}$ を近傍の基とする処理を考える．この粗近傍による内点集合は，画素は離れていても右下がりにならんでいる形状が検出される．図 13 に対して，この粗近傍による収縮を行なうと，5 回処理した時点で図 17 となり，9 回処理をするとノイズがなくなり図 18 のようにスクラッチ傷が残る．このように粗近傍を使うことによって傷をはっきりと検出できることが分かり，粗近傍と Formal Topology の概念が有効であることが分かる．

4. まとめ

Finite Topology を拡張し，連続空間と離散的空間のどちらにも対応することができる幾何学として Formal Topology を定義した．そして,「境界」,「内点」,「閉包」,「粗近傍」などを定義し，画像処理との対応を示し，その数学的な性質を明らかにした．

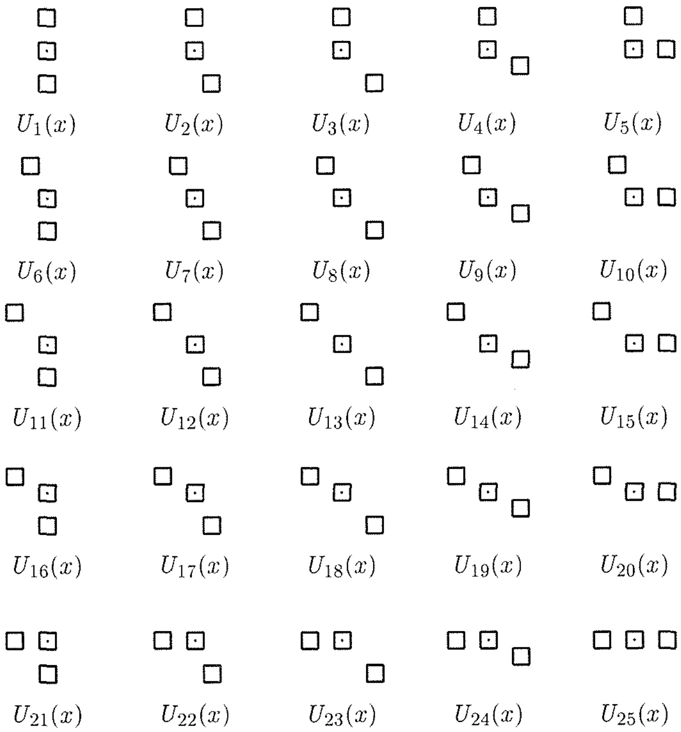


図 16　右下がりの傷を検出する粗近傍

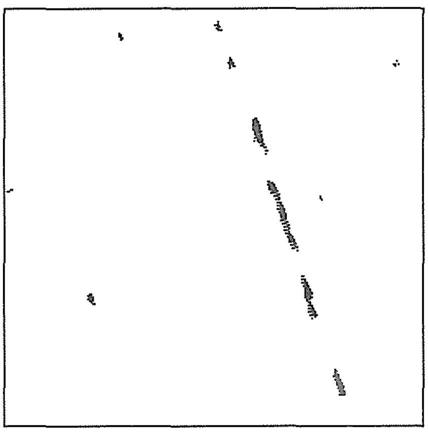


図 17　5 回処理した結果

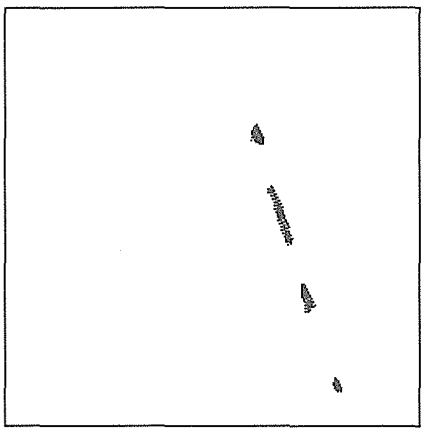


図 18　9 回処理した結果

粗近傍によるスクラッチ傷の検出

また，ノイズの中に埋もれているハードディスクの傷を粗近傍によって検出し，本手法の有効性を示した．

今後はさらに幾何学としての体系を整える必要がある．そして，それを元に実際の画像処理の数学的な性質を解析していく予定である．

参考文献

1) 鳥脇 純一: “画像理解のためのディジタル画像処理 [II]”, 昭晃堂.

2) Y.Nakamura: “Finite Topology Concept for Discrete Spaces”, 11th Seminar on Applied Functional Analysis(edited by H.Umegaki),1988.

3) Y.Nakamura, Y.Fuwa and H.Imura: “A Theory of Finite Topology and Image Processing”, Journal of the Faculty of Engineering, Shinshu University, No.69, 1991.

4) 柳沢 加代子: “多段ディジタルフィルタ装置を利用した画像処理の可能性”, 信州大学工学部情報工学科情報基礎講座卒業論文, 昭和 63 年度.