Journal of the Faculty of Engineering, Shinshu University, No. 71, 1992
信州大学工学部紀要　第71号

弱非線形微分方程式系の作る積分多様体と最適レギュレータへの応用

江口　正義*・師玉　康成**・蔡　大維***・山浦　弘夫****
（平成4年5月29日受理）

Integral manifold of weak non-linear differential equations and its application to optimal regulator problems

Masayoshi EGUCHI*, Yasunari SHIDAMA**, and Dawei CAI***
Hiroo YAMAURA***

In this paper, we use the fixed point theorem to generate a set of sufficient conditions which confine the solutions of weak non-linear differential equations to a low order stable integral manifold. Furthermore, we show that these conditions can be weakened to a great extent if the initial values of the differential equations are confined to a bounded region.

Next, we apply the obtained conditions in the solution of weak non-linear optimal regulator problems and derive sufficient conditions for the existence of a non-linear feedback control law which meet the neccesary conditions for optimality. We propose a method for finding the feedback control in an analytic form such as a Fourier series and a new calculation algorithm which applies the Newton method and other techniques. Simulations using the algorithm exhibited favorable results.

1. まえがき

線形の動作をするシステムの状態量を，なるべく小さな制御入力で0にする問題は，線形レギュレータ問題としてよく知られている．この問題はカルマンにより，はじめて評価関数最小化問題として，厳密に定式化され，解かれた[1]．最適な制御入力は状態フィードバック，すなわち状態量にある行列をかけた形となる．現代制御理論の視点から古典的なフィードバック制御の意義を明確にしただけでなく，広い応用分野が考えられるため，大きなインパクトを与えた．その後多くの研究が行われ，モータや発電機の制御など広く応用されている。

しかし，現実のシステムは多かれ少なかれ非線形特性を持つ．これを線形近似して線形レギュレータとみなし，フィードバック則を算出しているが，制御の仕上がりが悪くなり，発散してしまう場合も起こる．非線形の場合にも最適フィードバックが構成できれば理論

* 情報工学科　助手
** 情報工学科　助教授
*** 大学院博士後期課程学生
**** 情報工学科　教授

上も，応用上も意義が大きい．しかし，非線形の場合は解析が難しく，非線形の度合いが弱い場合でも最適フィードバック解が存在するかどうかは解っていない．本論文は，この問題を考察する．

まず2章で非線形レギュレータ問題について簡単な考察を行う．制御入力が，ある非線形連立微分方程式系を満足することが，最適性の必要条件となること，この解がある低次の安定な積分多様体に拘束されるとき制御則がフィードバック則で与えられることを示す．

3章では，弱非線形の場合に上述の連立微分方程式の解が無限時間にわたって低次の安定な積分多様体に拘束される十分条件を，不動点定理を用いて求める．

4章ではこれらの結果を弱非線形最適レギュレータ問題に適用し，最適性の必要条件を満たすフィードバック則が存在する十分条件を求める．

5章ではフィードバック則を求める数値解法を提案する．

6章では具体的な非線形レギュレータ問題に適用し，理論と解法が有効であることを示す．

2．非線形最適レギュレータの必要条件式

初めに線形レギュレータの定式化とその解，次に非線形レギュレータの定式化とその解が満たすべき必要条件式について説明する．

2.1 線形レギュレータについて

線形レギュレータ問題は次のように記述される．

システム方程式

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ x(s) &= \xi \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

と，評価関数

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_s^\infty \{x(t)^T Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\}dt \tag{2}$$

が与えられたとき，$J(u)$を最小にする制御量$u(t)$（$s \leqq t < \infty$）を求めること．ここで，$x(t) \in R^n$，$u(t) \in R^m$，A，Bは$n \times n$，$n \times m$定数行列．Q，Rはそれぞれ$n \times n$，$n \times m$の対称準正定，対称正定な定数行列．

（A, B）が可制御対（*i.e.* 行列〔$B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B$〕のランクが$n$）のとき，この問題は解（最適制御則と呼ぶ）を持ち，

$$u(t) = -R^{-1}B^TSx(t) \tag{3}$$

で与えられる．ここでSはリカッチ行列方程式

$$SA + A^TS - SBR^{-1}B^TS + Q = 0 \tag{4}$$

の対称正定値解である．最適入力(3)式に対するシステムの応答

$$\dot{x}(t) = (A - BR^{-1}B^TS)x(t) \tag{5}$$

は漸近安定，すなわち行列（$A - BR^{-1}B^TS$）の固有値の実部は全て負となる．

2.2 非線形レギュレータについて

本論文で考察する非線形レギュレータ問題は次のように記述される．

システム方程式

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}(t)&=Ax(t)+Bu(t)+g(x(t))\\ x(s)&=\xi\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

と，評価関数(2)式が与えられたとき，$J(u)$を最小にする制御量$u(t)$（$s\leqq t<\infty$）を求めること．ここで，$g(x)$は非線形な連続関数であり，微分方程式(6)の解の存在性，一意性を保証する程度のなめらかさを持っているとする．

この問題の解を求めることは困難なので，解であるための必要条件を求める．

ハミルトン関数

$$H(x,\ \lambda,\ u)=\frac{1}{2}x^TQx+\frac{1}{2}u^TRu+\lambda^T\{Ax+Bu+g(x)\} \tag{7}$$

を導入する．このとき$J(u)$が最小となる必要条件は

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial\lambda} \tag{8}$$

$$\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial x} \tag{9}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0 \tag{10}$$

$$x(s)=\xi,\ \lambda(\infty)=0 \tag{11}$$

で与えられる[9]．

(10)式より

$$u=-R^{-1}B^T\lambda \tag{12}$$

$\lambda(t)=Sx(t)+h(t)$とおき(8)，(9)式に代入（但しSはリカッチ方程式(4)の解）すると，

$$\dot{x}(t)=(A-BR^{-1}B^TS)x(t)-BR^{-1}B^Th(t)+g(x(t)) \tag{13}$$

$$\dot{h}(t)=-(A-BR^{-1}B^TS)^Th(t)-Sg(x(t))-\frac{\partial}{\partial x}g^T(x(t)(Sx(t)+h(t)) \tag{14}$$

が得られる．

もし(13)，(14)式が$h(t)=p(x(t))$という形の解を持てばフィードバック則

$$u=-R^{-1}B^T(Sx(t)+p(x(t)) \tag{15}$$

が最適制御則であるための必要条件を満たすことになる．

3．非線形微分方程式系の作る積分多様体

最適レギュレータだけでなく非線形振動など他の分野にも応用できるように，少し一般化した方程式を考える．

$$\dot{x}(t)=\tilde{A}x(t)+\tilde{B}h(t)+\varepsilon\Theta(x(t),\ h(t)) \tag{16}$$

$$\dot{h}(t)=\tilde{C}h(t)+\varepsilon F(x(t),\ h(t)) \tag{17}$$

$$x(s)=\xi$$

ここで$x(t)\in R^n$，$h(t)\in R^m$，$\tilde{A}$，$\tilde{B}$，$\tilde{C}$は定数行列，εは正の実数．

3.1 基本定理

本論文ではベクトルノルムはユークリッドノルム，行列Aのノルム$|A|$としては$\max_{|x|=1}|Ax|$を考える．次の仮定をおく．

(H0)　$\tilde{A}$の固有値の実部は全て負であり，$\tilde{C}$の固有値の実部は全て正である．すなわち$\forall t\in[0,\infty)$

$$\left.\begin{array}{l}|e^{\tilde{A}t}|\leqq M_1e^{-k_1t}\\ |e^{-\tilde{C}t}|\leqq M_2e^{-k_2t}\end{array}\right\} \tag{18}$$

をみたす正数M_i，k_iが存在．$(i=1,2)$

(H1)　$\Theta(y,v)$，$F(y,v)$：$R^n\times R^m$で連続，有界

(H2)　Θ，Fは次のリプシッツ条件1，2をそれぞれ満たす．

1．$\forall\sigma>0$，$\exists L_\Theta^\sigma>0$

$$\begin{gathered}(\forall y,\ y'\in R^n)\ (\forall v,\ v'\in R^m;|v|,\ |v'|\leq\sigma),\\ |\Theta(y,v)-\Theta(y',v')|\leq L_\Theta^\sigma\{|y-y'|+|v-v'|\}\end{gathered} \tag{19}$$

2．$\forall\sigma>0$，$\exists L_F^\sigma>0$

$$\begin{gathered}(\forall y,\ y'\in R^n)\ (\forall v,\ v'\in R^m;|v|,\ |v'|\leq\sigma),\\ |F(y,v)-F(y',v')|\leq L_F^\sigma\{|y-y'|+|v-v'|\}\end{gathered} \tag{19}$$

(H3)　σについて単調増加な$N(\sigma)$が存在し，

$$\begin{gathered}(\forall\sigma>0)\ (\forall y\in R^n)\ (\forall v\in R^m;|v|\leq\sigma)\\ |F(y,v)|\leq N(\sigma)\end{gathered} \tag{21}$$

［定理1］

仮定（$H0$)，（$H1$)，（$H2$)，（$H3$）が成り立つものとする．ϵ_0を次の不等式を満たすεの最大数（ないしなるべく大きな正数）とせよ

$$\alpha\overset{\triangle}{=}k_1+k_2-M_1\sqrt{\varepsilon}\{|\tilde{B}|\varDelta+\sqrt{\varepsilon}L_\Theta^{\sqrt{\varepsilon}D}(1+\sqrt{\varepsilon}\varDelta)\}>0 \tag{22}$$

$$\alpha^{-1}\sqrt{\varepsilon}M_1M_2L_F^{\sqrt{\varepsilon}D}(1+\sqrt{\varepsilon}\varDelta)\leq\varDelta \tag{23}$$

$$\sqrt{\varepsilon}\frac{M_2}{k_2}N(\sqrt{\varepsilon}D)\leq D \tag{24}$$

このとき$\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$をもつ系(16)，(17)について；

関数$q:x\in R^n\mapsto q(x)\in R^m$が存在し$h(s)=\sqrt{\varepsilon}q(x(s))$を満たす解は次の関係式を満たす．

$$\forall t\in[s,\infty);h(t)=\sqrt{\varepsilon}q(x(t)) \tag{25}$$

すなわち，初期値$(x(s),\sqrt{\varepsilon}q(x(s))$を満たす系（16)，（17）は$n$次元の曲面（積分多様体）

$$\Omega=\{(x,\sqrt{\varepsilon}q(x))|x\in R^n\} \tag{26}$$

に拘束される．

ここで，qは以下のような関数の集合$S(D,\varDelta)$の元である．

$$S(D,\varDelta)\triangleq\{p|p\in C(R^n,R^m),\|p\|\leq D,\\ \forall y,y'\in R^n,|p(y)-p(y')|\leq\varDelta|y-y'|\} \tag{27}$$

ただし，

$$C(R^n,\ R^m)\triangleq\{p|R^n\to R^m,\ \text{有界},\ \text{連続}\} \tag{28}$$

$$\|p\|\triangleq\sup_{y\in R^n}|p(y)| \tag{29}$$

（証明）

［第一段］ $h(t)=\sqrt{\varepsilon}\,p(t)$を方程式（16），（17）に代入して変形すると

$$\dot{x}(t)=\tilde{A}x(t)+\sqrt{\varepsilon}\,\tilde{B}p(t)+\varepsilon\Theta(x(t),\sqrt{\varepsilon}\,p(t)) \tag{30}$$

$$\dot{p}(t)=\tilde{C}p(t)+\sqrt{\varepsilon}\,F(x(t),\sqrt{\varepsilon}\,p(t)) \tag{31}$$

(30)式の右辺の$p(t)$に$q(x(t)),q\in S(D,\ \varDelta)$を代入する．

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}(t)=\tilde{A}x(t)+\sqrt{\varepsilon}\,\tilde{B}q(x(t))+\varepsilon\Theta(x(t),\sqrt{\varepsilon}\,q(x(t))\\&x(s)=\xi\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

(32)式の解は，Θのリプシッツ条件から唯一つ存在する．

この解を$x(t;s,\xi,q)$と書くと解の一意性から

$$x(t+s\,;\,s,\xi,q)=x(t;\,0\,,\xi,q) \tag{33}$$

(32)式を解くと

$$x(t;s,\xi,q)=e^{\tilde{A}(t-s)}\xi+\int_s^t e^{\tilde{A}(t-r)}\{\sqrt{\varepsilon}\,\tilde{B}q(x(r;s,\xi,q))\\+\varepsilon\Theta(x(r;s,\xi,q),\sqrt{\varepsilon}\,q(x(r;s,\xi,q)))\}dr \tag{34}$$

$$R(|\xi|,M_1,k_1,|\tilde{B}|,D,|\Theta|,\varepsilon)=M_1|\xi|+\frac{M_1}{k_1}\{\sqrt{\varepsilon}|\tilde{B}|\cdot D+\varepsilon|\Theta|\} \tag{35}$$

とおくと

（18）式，（27）式，仮定（$\mathrm{H_1}$）より

$$|x(t;s,\xi,q)|\leq R(|\xi|,M_1,k_1,|\tilde{B}|,D,|\Theta|,\varepsilon) \tag{36}$$

ここで$|\tilde{B}|$は行列$\tilde{B}$のノルム，$|\Theta|$は関数Θの上限である．

［第二段］ 不動点問題への変換

次に，（31）式に着目して関数F中の$x(t),p(t)$に，$x(t)=x(t;s,\xi,q)$

$p(t)=q(x(t;s,\xi,q)$を代入し，

$$T(q)(\xi)=-\sqrt{\varepsilon}\int_s^\infty e^{\tilde{C}(s-r)}F(x(r;s,\xi,q),\sqrt{\varepsilon}\,q(x(r;s,\xi,q)))dr \tag{37}$$

とおこう．この$T(q)(\xi)$はxの初期点ξと関数qのみに依存し，初期時刻$s\geq 0$によらず一定であることが，（33）式と積分変数の変換により示せる．

この定理の証明は作用素Tの不動点$q=T(q)$の存在証明に帰着する．

実際，不動点$q=T(q)$が存在すれば，

$$\begin{aligned} q(\xi) &= T(q)(\xi) \\ &= \sqrt{\varepsilon}\int_s^\infty e^{\tilde{C}(s-r)}F(x(r;s,\xi,q),\sqrt{\varepsilon}\,q(x(r;s,\xi,q)))dr \\ &= -\sqrt{\varepsilon}\int_s^t e^{\tilde{C}(s-r)}F(x(r;s,\xi,q),\sqrt{\varepsilon}\,q(x(r;s,\xi,q)))dr \\ &+ e^{\tilde{C}(s-t)}q(x(t;s,\xi,q)) \end{aligned}$$

が導かれる．上式の両辺をtで微分し整理すると

$$\dot{q}(x(t;s,\xi,q)) = \tilde{C}q(x(t;s,\xi,q)) + \sqrt{\varepsilon}F(x(t;s,\xi,q),\sqrt{\varepsilon}\,q(x(t;s,\xi,q)))$$

が従う．これは$q(x(t;s,\xi,q))$が(31) 式の解であることを示す．

［第三段］不動点定理の適用

不動点定理を利用して写像Tの不動点が存在する条件を求める．このために，qが所属している関数空間$C(R^n,R^m)$にコンパクト一様収束の位相[2]τをいれる．すなわち任意の$f\in C(R^n,R^m)$の基本近傍系を

$$U(f;K,\delta)\stackrel{\triangle}{=}\{g\in C(R^n,R^m)\,;\sup_{x\in K}|f(x)-g(x)|<\delta\} \tag{38}$$

$$\{U(f;K,\delta);K\text{は}R^n\text{の任意のコンパクト集合，}\delta\text{は任意の正数}\} \tag{39}$$

で定義する．$(C(R^n,R^m),\tau)$は局所凸な位相線形空間[3]となる．

［1］ $S(D,\varDelta)$は$(C(R^n,R^m),\tau)$のなかのコンパクト凸集合である．

- 凸集合であることは容易に示せるので，証明を略す．
- R^n,R^mはノルム位相でそれぞれ局所コンパクトT_2空間と距離空間となる．アスコリ・アルゼラの定理[2]により$S(D,\varDelta)$が相対コンパクトである必要十分条件は，各点$x\in R^n$で，$S(D,\varDelta)$が同程度連続で $\{p(x):p\in S(D,\varDelta)\}$ がR^nの相対コンパクト集合で与えられる．この２つの条件が成り立つことは容易に示せる．
- $S(D,\varDelta)$は閉集合であることも明白である．以上より$S(D,\varDelta)$はコンパクト集合である．

［2］ Tは$S(D,\varDelta)$から$S(D,\varDelta)$のなかへの写像となる．

$q\in S(D,\varDelta)$とする．

(37) 式と仮定（H0），（H3）より

$$|T(q)(\xi)|\le\sqrt{\varepsilon}\int_0^\infty M_2e^{-k_2r}N(\sqrt{\varepsilon}D)dr=\sqrt{\varepsilon}\frac{M_2}{k_2}N(\sqrt{\varepsilon}D) \tag{40}$$

がすべての$\xi\in R^n$に対して成立する．定理の条件（24）式より

$$|T(q)(\xi)|\le D$$

が得られる．次に$T(q)$のリプシッツ条件を調べる．

ξ_1，ξ_2をR^nの任意の２点とする．表現を簡略にするため$x(t;0,\xi,q)$を$x^i(t)$, と書く．(18)，(20)，(27) 式より

$$|T(q)(\xi_1)-T(q)(\xi_2)|=\Big|-\sqrt{\varepsilon}\int_0^\infty e^{-\tilde{C}r}\Big\{F\Big(x^{(1)}(r),\sqrt{\varepsilon}\,q(x^{(1)}(r))\Big)$$

$$-F\Big(x^{(2)}(r),\sqrt{\varepsilon}\,q(x^{(2)}(r))\Big)\Big\}dr\Big|$$

$$\leq\ \sqrt{\varepsilon}\,M_2L_F^{\sqrt{\varepsilon}D}(1+\sqrt{\varepsilon}D)\int_0^{\infty}e^{-k_2r}|x^{(1)}(r)-x^{(2)}(r)|dr \tag{41}$$

次に（34）式で$s=0$とおくとき，$|x^{(1)}(t)-x^{(2)}(t)|$を評価すると

$$|x^{(1)}(t)-x^{(2)}(t)|$$

$$\leq M_1e^{-k_1t}|\xi_1-\xi_2|+\int_0^t M_1e^{-k_1(t-r)}\sqrt{\varepsilon}\Big\{|\tilde{B}|\varDelta|x^{(1)}(r)-x^{(2)}(r)|$$

$$+\sqrt{\varepsilon}\,L_{\Theta}^{\sqrt{\varepsilon}D}(1+\sqrt{\varepsilon}\varDelta)|x^{(1)}(r)-x^{(2)}(r)|\Big\}dr\qquad(\forall\, t\geq 0)$$

$$\therefore e^{k_1t}|x^{(1)}(t)-x^{(2)}(t)|\leq M_1|\xi_1-\xi_2|+\int_0^t M_1\sqrt{\varepsilon}\{|\tilde{B}|\varDelta$$

$$+\sqrt{\varepsilon}\,L_{\Theta}^{\sqrt{\varepsilon}D}(1+\sqrt{\varepsilon}\varDelta)\}e^{k_1r}|x^{(1)}(r)-x^{(2)}(r)|dr \tag{42}$$

不等式(42)にGronwall-Bellmanの補題[4)]を適用すると

$$|x^{(1)}(t)-x^{(2)}(t)|\leq M_1|\xi-\eta|\,e^{-\{k_1-M_1\sqrt{\varepsilon}(|\tilde{B}|\varDelta+\sqrt{\varepsilon}L_{\Theta}^{\sqrt{\varepsilon}D}(1+\sqrt{\varepsilon}\varDelta))\}t} \tag{43}$$

（41）式の右辺に（43）式を代入して整頓すると

$$|T(q)(\xi_1)-T(q)(\xi_2)|\leq\sqrt{\varepsilon}\,M_1M_2L_F^{\sqrt{\varepsilon}D}(1+\sqrt{\varepsilon}\varDelta)$$

$$\cdot\int_0^{\infty}e^{-\{k_1+k_2-M_1\sqrt{\varepsilon}(|\tilde{B}|\varDelta+\sqrt{\varepsilon}L_{\Theta}^{\sqrt{\varepsilon}D}(1+\sqrt{\varepsilon}\varDelta))\}t}\,dr\cdot|\xi_1-\xi_2| \tag{44}$$

定理の仮定(22)式より(44)式の右辺の積分は存在し

$$|T(q)(\xi_1)-T(q)(\xi_2)|\leq\frac{1}{\alpha}\sqrt{\varepsilon}\,M_1M_2L_F^{\sqrt{\varepsilon}D}(1+\sqrt{\varepsilon}\varDelta)\cdot|\xi_1-\xi_2|$$

（23）式より

$$\leq\varDelta\cdot|\xi_1-\xi_2| \tag{45}$$

［3］　Tは連続写像となる．

$q^1,q^2\in S(D,\varDelta)$とし，$x^{(i)}(t)=x(t;0,\xi,q)$とおく．

$$x^{(i)}(t)=e^{\tilde{A}t}\xi+\int_0^t e^{\tilde{A}(t-r)}\sqrt{\varepsilon}\Big\{\tilde{B}q^i(x^{(i)}(t))+\sqrt{\varepsilon}\,\Theta(x^{(i)}(t),\sqrt{\varepsilon}\,q^i(x^{(i)}(t)))\Big\}dr \tag{47}$$

（36）式より，任意の$t>0$に対し

$$|x^{(i)}(t)|\leq R(|\xi|,M_1,k_1,|\tilde{B}|,D,|\Theta|,\varepsilon) \tag{48}$$

と表せる（$i=1,2$）．(48)式を利用して

$$|q^1(x^{(1)}(r))-q^2(x^{(2)}(r))|$$

$$\leq\varDelta|x^{(1)}(r)-x^{(2)}(r)|+\|q^1-q^2\|_{R(|\xi|)} \tag{49}$$

$$\text{ここで}\|q^1-q^2\|_{R(|\xi|)}\overset{\triangle}{=}\sup_{|x|\leq R(|\xi|)}|q^1(x)-q^2(x)|$$

$$R(|\xi|)\overset{\triangle}{=}R(|\xi|,M_1,k_1,|\tilde{B}|,D,|\Theta|,\varepsilon) \tag{50}$$

(19)，（49）式より

$$|\Theta(x^{(1)}(r),\sqrt{\varepsilon}\,q^1(x^{(1)}(r)))-\Theta(x^{(2)}(r),\sqrt{\varepsilon}\,q^2(x^{(2)}(r)))|$$

$$\leq L_{\Theta}^{\sqrt{\varepsilon}D}\{|x^{(1)}(r)-x^{(2)}(r)|+\sqrt{\varepsilon}\varDelta|x^{(1)}(r)-x^{(2)}(r)|$$

$$+\sqrt{\varepsilon}\|q^1-q^2\|_{R(|\xi|)}\} \tag{51}$$

(19)，(47)，(49)，(51)式より

$$|x^{(1)}(t)-x^{(2)}(t)|\leq\sqrt{\varepsilon}\,M_1\{|\tilde{B}|\varDelta+\sqrt{\varepsilon}\,L_{\Theta}^{\sqrt{\varepsilon}D}(1+\sqrt{\varepsilon}\varDelta)\}$$

$$\cdot\int_0^t e^{-k_1(t-r)}|x^{(1)}(r)-x^{(2)}(r)|dr$$

$$+\sqrt{\varepsilon}\frac{M_1}{k_1}\{|\tilde{B}|+\varepsilon L_\Theta^{\sqrt{\varepsilon}D}\}\|q^1-q^2\|_{R(|\xi|)} \tag{52}$$

(52)式の両辺にe^{k_1t}をかけGronwall-Bellmannの補題を適用すると

$$e^{k_1t}|x^{(1)}(t)-x^{(2)}(t)|\leq\sqrt{\varepsilon}\frac{M_1}{k_1}\{|\tilde{B}|+\varepsilon L_\Theta^{\sqrt{\varepsilon}D}\}\|q^1-q^2\|_{R(|\xi|)}e^{k_1t}$$

$$+\int_0^t\varepsilon\frac{M_1^2}{k_1}\{|\tilde{B}|\Delta+\sqrt{\varepsilon}L_\Theta^{\sqrt{\varepsilon}D}(1+\sqrt{\varepsilon}D)\}\{|\tilde{B}|+\varepsilon L_\Theta^{\sqrt{\varepsilon}D}\}$$

$$\cdot\|q^1-q^2\|_{R(|\xi|)}e^{k_1r}\,e^{\sqrt{\varepsilon}M_1\{|\tilde{B}|\Delta+\sqrt{\varepsilon}L_\Theta^{\sqrt{\varepsilon}D}(1+\sqrt{\varepsilon}D)\}(t-r)}dr \tag{53}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\beta_1\triangleq\sqrt{\varepsilon}\frac{M_1}{k_1}\{|\tilde{B}|+\varepsilon L_\Theta^{\sqrt{\varepsilon}D}\}\\
&\beta_2\triangleq\varepsilon\frac{M_1^2}{k_1}\{|\tilde{B}|\Delta+\sqrt{\varepsilon}L_\Theta^{\sqrt{\varepsilon}D}(1+\sqrt{\varepsilon}\Delta)\}\{|\tilde{B}|+\varepsilon L_\Theta^{\sqrt{\varepsilon}D}\}\\
&\beta_3\triangleq\sqrt{\varepsilon}M_1\{|\tilde{B}|\Delta+\sqrt{\varepsilon}L_\Theta^{\sqrt{\varepsilon}D}(1+\sqrt{\varepsilon}\Delta)\}
\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

とおくと，(53) 式より

$$|x^{(1)}(t)-x^{(2)}(t)|\leq\beta_1\|q^1-q^2\|_{R(|\xi|)}$$

$$+\frac{\beta_2}{k_1-\beta_3}(1-e^{-(k_1-\beta_3)t})\|q^1-q^2\|_{R(|\xi|)} \tag{55}$$

が得られる．($H2$)，(49)式より

$$|T(q^1)(\xi)-T(q^2)(\xi)|$$

$$=\sqrt{\varepsilon}\left|\int_0^\infty e^{-\tilde{C}r}\{F(x^{(1)}(r),\sqrt{\varepsilon}q^1(x^{(1)}(r)))\right.$$

$$\left.-F(x^{(2)}(r),\sqrt{\varepsilon}q^2(x^{(2)}(r)))\}dr\right|$$

$$\leq\beta_4\int_0^\infty e^{-k_2r}|x^{(1)}(r)-x^{(2)}(r)|dr+\beta_5\|q^1-q^2\|_{R(|\xi|)} \tag{56}$$

ここで

$$\left.\begin{aligned}
&\beta_4\triangleq\sqrt{\varepsilon}M_2L_F^{\sqrt{\varepsilon}D}\}(1+\sqrt{\varepsilon}\Delta)\\
&\beta_5\triangleq\varepsilon\frac{M_2}{k_2}L_F^{\sqrt{\varepsilon}D}
\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

(56)式に(55)式を代入して積分を実行する．(22)，(54)式から$k_1+k_2-\beta_3=\alpha>0$なので，この積分は存在し，次式が成立する．

$$|T(q^1)(\xi)-T(q^2)(\xi)|\leq\delta\|q^1-q^2\|_{R(|\xi|)}$$

すなわち

$$\|T(q^1)-T(q^2)\|_r\leq\delta\|q^1-q^2\|_{R(r)} \tag{58}$$

ここで

$$\delta=\beta_4\left\{\frac{\beta_1}{k_2}+\frac{\beta_2}{k_1-\beta_3}\left(\frac{1}{k_2}-\frac{1}{k_1+k_2-\beta_3}\right)\right\}+\beta_5 \tag{59}$$

(58)式はTが位相τで，連続であることを示している．

以上[１]〜[３]の議論より，Tは，局所凸な位相線形空間$(C(R^n,R^m),\tau)$のコンパクト

凸集合$S(D,\varDelta)$を，そのなかに写す連続写像である．ゆえにチホノフの定理[5)]を適用出来，不動点の存在が示せた．　QED.

3.2　定理の仮定を弱める

定理１の仮定（H1)，（H2)，（H3）は大変強い．（13)，（14）式と（16)，（17）式($\varepsilon=1$とする）を比較することにより，非線形レギュレータでは

$$\tilde{A}=A-BR^{-1}B^TS \tag{60}$$

$$\tilde{B}=-BR^{-1}B^T \tag{61}$$

$$\tilde{C}=-(A-BR^{-1}B^TS)^T=-\tilde{A}^T \tag{62}$$

$$\Theta(x,h)=g(x) \tag{63}$$

$$F(x,h)=-Sg(x)-\frac{\partial}{\partial x}g^T(x)(Sx+h) \tag{64}$$

となる．$\tilde{A},-\tilde{C}$の固有値の実部は全て負であり（H0）は満たされるが，（H1)，（H2)，（H3）は一般に満たされない．たとえば$g(x)=\sin x$のときには$\Theta(x,h)=g(x)$は有界でリプシッツ条件を満たすが，$F(x,h)$は有界でなく，リプシッツ条件を満たさない．$g(x)=x^2$の場合には，Θ,Fのどちらも，有界でなくリプシッツ条件を満たさない．そこで初期値を有界領域に限定することにより，仮定（H1)，（H2)，（H3）を弱め，これらにも適用できるようにする．

まず$\Theta(x,h)$が有界で．任意の有界領域上でリプシッツ条件を満たすときを考えよう．定理１の証明の第一段の議論（(36)式）により，$|\xi|\leq r$である初期値を考える限り，

$$|x(t)|\leq R(r;M_1,k_1,|\tilde{B}|,D,|\Theta|,\varepsilon)$$

また，常に$|h(t)|=|\sqrt{\varepsilon}\,q(x(t))|\leq\sqrt{\varepsilon}D$となる．ここで$x(t)=x(t;s,\xi,q)$.

そのため集合

$$S_{R(r)}\times S_{\sqrt{\varepsilon}D}=\{(x,h)\in R^n\times R^m\,;\,|x|\leq R(r;M_1,k_1,|\tilde{B}|,D,|\Theta|,\varepsilon),\ \|h\|\leq\sqrt{\varepsilon}D\}$$

の外部で$F(x,h)$を変形しても解$x(t),h(t)$は変化しない．

Fを上記の集合上でリプシッツ定数$L_F^{\sqrt{\varepsilon}D,R(r)}$を持つとする．そのとき次のように$F$を変更する．

$$\tilde{F}(x,h)=F(x,h),\quad (x,h)\in S_{R(r)}\times S_{\sqrt{\varepsilon}D} \tag{65}$$

$$|\tilde{F}|=\max_{(x,h)\in R^n\times R^m}|\tilde{F}(x,h)|=\max_{(x,h)\in S_{R(r)}\times S_{\sqrt{\varepsilon}D}}|F(x,h)| \tag{66}$$

$(\forall x,x'\in R^n)\,(\forall h,h'\in R^m\,;\,|h|,|h'|\leq\sqrt{\varepsilon}D)$のとき

$$|\tilde{F}(x,h)-\tilde{F}(x',h')|\leq L_F^{\sqrt{\varepsilon}D,R(r)}(|x-x'|+|h-h'|) \tag{67}$$

このような変更が可能であることを次の命題で示す．

補題１　$R>0$，$n\in N$とする．次のようなR^nから$S_R^n[0]=\{x\in R^n\,;\,|x|\leq R\}$への写像$P_R^n$を考える．

$$P_R^n(x)=\left\{\begin{array}{ll} x & ;\,|x|\leq R\text{のとき}\\ \alpha(x)x=\dfrac{2R-|x|}{|x|}x & ;\,R\leq|x|\leq 2R\text{のとき}\\ 0 & ;\,2R\leq|x|\text{のとき}\end{array}\right\} \tag{68}$$

すると

(1)　$|P_R^n(x)-P_R^n(y)|\leq|x-y|$　$(\forall x,y\in R^n)$

(2)　$\tilde{F}(x,h)\overset{\triangle}{=}F(P_{R(r)}^n(x),P_{\sqrt{\varepsilon}D}^m(h))$　は，(65) ～ (67) 式を満たす．

(証明)　(1)を証明する．

x,yの役割は対称的なので次のケースを証明すれば十分．

①　$x,y\in S_R[0]$,　②　$x,y\in S_{2R}[0]-S_R[0]$,　③　$x,y\in R^n-S_{2R}[0]$

④　$y\in S_{2R}[0]-S_R[0]$かつ$x\in S_R[0]$,　⑤　$y\in R^n-S_{2R}[0]$かつ$x\in S_R[0]$

⑥　$y\in R^n-S_{2R}[0]$かつ$x\in S_{2R}[0]-S_R[0]$

このうち①，③，⑤は明白なので，②，④，⑥だけを証明する．

以下　$\theta\overset{\triangle}{=}\left(\frac{x}{|x|},\frac{y}{|y|}\right)$ とおく．これは$-1\leq\theta\leq1$を満たす

②；$|x-y|^2-|P_R^n(x)-P_R^n(y)|^2=|x-y|^2-|\alpha(x)x-\alpha(y)y|^2$

$=4R(|x|+|y|-2R)(1-\theta)\geq0$

④；$|x-y|^2-|P_R^n(x)-P_R^n(y)|^2=(x-y|^2-|x-\alpha(y)y|^2$

$=4(R-|x|\theta)(|y|-R)\geq0$

⑥；$|P_R^n(x)-P_R^x(y)|=|\alpha(x)x|=2R-|x|$

$|x-y|^2=|x|^2+|y|^2-2|x||y|\theta$

$\therefore$　$|x-y|^2-|P_R^n(x)-P_R^n(y)|^2=|y|^2-4R^2+4R|x|-2|x||y|\theta$

$z=|y|$の２次式とみなすと，この関数は対称軸$z=\theta|x|\in[-2R,2R]$を持ち，$z=2R$のときの値は，$4R(1-\theta)|x|\geq0$

従って$|y|\geq2R$上で非負となる．

(2)の証明　(65)，(66) 式は，$\tilde{F}(x,y)$とP_R^nの定義から明らかである．

(67)式は次の式より成り立つ．

$$|\tilde{F}(x,h)-\tilde{F}(x',h')|=|F(P_{R(r)}^n(x),P_{\sqrt{\varepsilon}D}^m(h))-F(P_{R(r)}^n(x'),P_{\sqrt{\varepsilon}D}^m(h'))|$$
$$\leq L_F^{\sqrt{\varepsilon}D,R(r)}\{|P_{R(r)}^n(x)-P_{R(r)}^n(x')|+|P_{\sqrt{\varepsilon}D}^m(h)-P_{\sqrt{\varepsilon}D}^m(h')|\}$$
$$\leq L_F^{\sqrt{\varepsilon}D,R(r)}\{|x-x'|+|h-h'|\}$$

QED.

初期値を有界領域 $\{\xi\in R^n;|\xi|\leq r\}$ に限定して，定理１の仮定を弱める．

(H1')　$\Theta(y,v)$は$R^n\times R^m$上で有界 $(\leq|\Theta|)$,連続

$F(y,v)$は$S_{R(r)}\times S_{\sqrt{\varepsilon}D}$上で連続で，その最大値を次のように書く．

$$N(\sqrt{\varepsilon}D)\overset{\triangle}{=}\max_{\substack{|y|\leq R(r)\\|v|\leq\sqrt{\varepsilon}D}}|F(y,v)|$$

(H2')：

１．$\forall\sigma\leq D$　$\exists L_\Theta^{\sigma,R(r)}>0$

$$(\forall y,y'\in R^n;|y|,|y'|\leq R(r))(\forall v,v'\in R^m;|v,|v'|\leq\sigma),$$
$$|\Theta(y,v)-\Theta(y',v')|\leq L_\Theta^{\sigma,R(r)}\{|y-y'|+|v-v'|\}\tag{69}$$

２．$\forall\sigma\leq D$　$\exists L_F^{\sigma,R(r)}>0$

$$(\forall y,y'\in R^n;|y|,|y'|\leq R(r))(\forall v,v'\in R^m;|v|,|v'|\leq\sigma)$$
$$|F(y,v)-F(y',v')|\leq L_F^{\sigma,R(r)}\{|y-y'|+|v-v'|\}\tag{70}$$

定理２　仮定 (H0)，(H1')，(H2') が成り立つものとする．$\varepsilon_0\leq1$を次の不等式を満

たすεの最大数（ないしは，なるべく大きな正数）とする．

$$\alpha \stackrel{\triangle}{=} k_1 + k_2 - M_1\sqrt{\varepsilon}\{|\tilde{B}|\Delta + \sqrt{\varepsilon}\,L_{\Theta}^{\sqrt{\varepsilon}D,R(r)}(1+\sqrt{\varepsilon}\Delta)\} > 0 \tag{71}$$

$$\alpha^{-1}\sqrt{\varepsilon}\,M_1M_2L_F^{\sqrt{\varepsilon}D,R(r)}(1+\sqrt{\varepsilon}\Delta) \le \Delta \tag{72}$$

$$\sqrt{\varepsilon}\frac{M_2}{k_2}N(\sqrt{\varepsilon}D) \le D \tag{73}$$

このとき$\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$を持つ系（16），（17）について，

$q \in S(D,\Delta)$ が存在して，xの初期値ξが$|\xi| \le r$を満たし，hの初期値が $\sqrt{\varepsilon}\,q(\xi)$を満たす解（$x(t), h(t)$）は$\Omega = \{(x, \sqrt{\varepsilon}\,q(x)) | x \in R^n\}$に拘束される．

証明　$|\xi| \le r$と，任意の$q \in S(D,\Delta)$に対して，(36) 式より

$$|x(t;s,\xi,q)| \le R(r, M_1, k_1, |\tilde{B}|, D, |\Theta|, \varepsilon) = R(r) = M_1 r + \frac{M_1}{k_1}\{|\tilde{B}|D + |\Theta|\}$$

さらに$|h(t)| \le \sqrt{\varepsilon}D$がすべての$t \ge s$に対して成立する．そこで$S_{R(r)}[0] \times S_{\sqrt{\varepsilon}D}$の外部で$\Theta$と$F$を変更しても，$|\xi| \le r$なる初期値を持つ解は変化しない．

$$\tilde{\Theta}(x,h) = \Theta(P^n_{R(r)}(x), P^m_{\sqrt{\varepsilon}D}(h))$$
$$\tilde{F}(x,h) = F(P^n_{R(r)}(x), P^m_{\sqrt{\varepsilon}D}(h))$$

とおくと，補題１よりこの$\tilde{\Theta}$，$\tilde{F}$は仮定（H1）～（H3）を満たし，

$$L_{\tilde{\Theta}}^{\sqrt{\varepsilon}D} = L_{\Theta}^{\sqrt{\varepsilon}D,R(r)},\quad L_{\tilde{F}}^{\sqrt{\varepsilon}D} = L_F^{\sqrt{\varepsilon}D,R(r)}$$

となる．従って，$\tilde{\Theta}$，$\tilde{F}$に対して定理１を適用でき，定理２が成立する．　QED.

Θが$R^n \times R^m$上では有界でなく，リプシッツ条件も満たさない一般の場合を考察する．

(H1")　$\forall R > 0$，$\forall D > 0$ に対して$\Theta(y,v), F(y,v)$は$S_R \times S_D$上で連続．この集合上での最大値をそれぞれ$|\Theta|_{R,D}, N(D)$と書く．

$M_1 r < R$という関係が成り立つ正数Rとrを固定する．

$\forall q \in S(D,\Delta)$に対して$h(t) = \sqrt{\varepsilon}\,q(x(t))$を（16）式に代入して解くと，$|\xi| \le r$かつ$M_1 r + \frac{M_1}{k_1}\{\sqrt{\varepsilon}|\tilde{B}| \cdot D + \varepsilon|\Theta|_{R,D}\} \le R$という条件を満たすときは，解$x(t;s,\xi,q)$は$S_R[0]$内に留まることが示せる．

(H2")

１．$\forall R > 0$，$\forall \sigma \ge 0$，$\exists L_{\Theta}^{\sigma,R} > 0$

$$(\forall y, y' \in R^n\,;\, |y|, |y'| \le R)(\forall v, v' \in R^m\,;\, |v|, |v'| \le \sigma),$$
$$|\Theta(y,v) - \Theta(y',v')| \le L_{\Theta}^{\sigma,R}\{|y-y'| + |v-v'|\} \tag{74}$$

２．$\forall R > 0$，$\forall \sigma \ge 0$，$\exists L_F^{\sigma,R} > 0$

$$(\forall y, y' \in R^n\,;\, |y|, |y'| \le R)(\forall v, v' \in R^m\,;\, |v|, |v'| \le \sigma)$$
$$|F(y,v) - F(y',v')| \le L_F^{\sigma,R}\{|y-y'| + |v-v'|\} \tag{75}$$

定理３　仮定（H0），（H1"），（H2"）が成り立つとする．

$M_1 r < R$が成り立つ正数rとRを任意に固定する．

ε_0を次の不等式を満たすεの最大数（ないしは，なるべく大きな正数）とする．

$$M_1 r+\frac{M_1}{k_1}\{\sqrt{\varepsilon}|\tilde{B}|\cdot D+\varepsilon|\Theta|_{R,D}\}\leq R \tag{76}$$

$$\alpha\overset{\triangle}{=}k_1+k_2-M_1\{\sqrt{\varepsilon}|\tilde{B}|\cdot\varDelta+\varepsilon L_{\Theta}^{\sqrt{\varepsilon}D,R}(1+\sqrt{\varepsilon}\varDelta)\}>0 \tag{77}$$

$$\alpha^{-1}\sqrt{\varepsilon}M_1M_2L_F^{\sqrt{\varepsilon}D,R}(1+\sqrt{\varepsilon}\varDelta)\leq\varDelta \tag{78}$$

$$\sqrt{\varepsilon}\frac{M_2}{k_2}N(\sqrt{\varepsilon}D)\leq D \tag{79}$$

このとき$\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0]$を持つ系（16），（17）について，$q\in S(D,\varDelta)$が存在して，$x$の初期値$\xi$が$|\xi|\leq r$を満たし，$h$の初期値が$\sqrt{\varepsilon}q(\xi)$を満たす解$(x(t),h(t))$は$\Omega=\{(x,\sqrt{\varepsilon}q(x))|x\in R^n\}$に拘束される．さらに$x(t)\in S_R[0]$が成り立つ．

証明は定理２と殆ど同様にしてできるので省略する．

4．非線形フィードバック則

前章で与えられた結果を弱非線形レギュレータ問題に適用し，最適性の必要条件を満たすフィードバック則が存在する条件を求める．$(x(t),h(t))=(0,0)$は（16），（17）式の平衡点と仮定する．レギュレータ問題では自然な仮定である．システム方程式を

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}(t)&=Ax(t)+Bu(t)+\varepsilon g(x(t))\\ x(s)&=\xi\end{aligned}\right\} \tag{80}$$

とする．$(0,0)$が平衡点であることと$g(0)=0$とは同等である．2.2の議論により，制御則

$$u(t)=-R^{-1}B^T\{Sx(t)+h(t)\} \tag{81}$$

が$J(u)$を最小にする必要条件は

$$\dot{x}(t)\ =\ \tilde{A}x(t)+\tilde{B}h(t)+\varepsilon g(x(t) \tag{82}$$

$$\dot{h}(t)\ =\ -\tilde{A}h(t)+\varepsilon\{-Sg(x(t))-\frac{\partial}{\partial x}g^T(x(t))(Sx(t)+h(t))\} \tag{83}$$

$$x(s)\ =\ \xi \tag{84}$$

$$h(\infty)\ =\ 0\quad（但し，\lim_{t\to\infty}x(t)=0とする） \tag{85}$$

で与えられる．（16），（17）式と対比させると$\Theta(x,h)$には$g(x)$, $F(x,h)$には

$$-Sg(x)-\frac{\partial}{\partial x}g^T(x)(Sx+h)$$

が対応している．(A,B)を可制御対とすると$\tilde{A}=A-BR^{-1}B^TS$の固有値の実部はすべて負となり，仮定（H0）が満たされる．この場合$M_1=M_2$，$k_1=k_2$となる．M,kと書く．さらに$F(y,h)=g(y)$は２階連続微分可能で有界（上限$\|g\|$）かつ$g(0)=0$を満たすとする．このとき$F(y,h)=-Sg(x)-\dfrac{\partial}{\partial y}g^T(x)(Sx+h)$は有界閉領域上で連続，すなわち仮定（H1'）を満たす．$g(x)$が有界なので，$h(t)=\sqrt{\varepsilon}q(x(t)),q\in S(D,\varDelta)$, $0\leq\varepsilon\leq 1$を（82）式に代入して解を求めると，

$$|x(t;s,\xi,q)| \leq R(r) \stackrel{\triangle}{=} R(r,M,k,|\tilde{B}|,D,\|g\|,1)$$

となる（3.2参照）．$\Theta(x,h)=g(x)$を微分すると連続なので$\frac{\partial g}{\partial x}(x)$は任意の有界閉領域上で有界な行列となり（H2')1.を満たす（但しhを含まないのでσには依存しない）．同様にして$F(x,h)$は(H2')2.を満たす．

$$\tilde{S}(D,\Delta) \stackrel{\triangle}{=} \{q \in S(D,\Delta) \mid q(0)=0\} \tag{86}$$

という関数の集合を考えると$S(D,\Delta)$の閉部分集合なのでコンパクトである．$q \in \tilde{S}(D,\Delta)$のとき$x(t;s,0,q)=0$，$F(0,0)=0$なので（37）式により$(Tq)(0)=0$が導ける．従って，$S(D,\Delta)$の代わりに$\tilde{S}(D,\Delta)$を用いても，定理1,2の証明はそのままで成り立つ．従って定理2より次の定理4が得られる．

定理4　システム方程式が(80）式で与えられ，評価関数が(2)式で与えられる非線形レギュレータ問題を考える．$g(x)$が2階連続微分可能で，有界（上限$\|g\|$）かつ$g(0)=0$を満たすとする．

$\forall r>0$を固定すると，ある$\varepsilon_0>0$が存在して，$\forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$に対する(82)，(83）式について；$q \in \tilde{S}(D,\Delta)$が存在して，$x$の初期値$\xi$が$|\xi| \leq r$を満たし，$h$の初期値が$\sqrt{\varepsilon}\,q(\xi)$を満たす解$(x(t),h(t))$は

$\Omega=\{(x,\sqrt{\varepsilon}\,q(x)) \mid x \in R^n\}$に拘束される．さらに

$$\lim_{t\to\infty} h(t)=\lim_{t\to\infty}\sqrt{\varepsilon}\,q(x(t))=0$$

が言える．すなわち最適性の必要条件を満たすフィードバック則

$$u(t)=-R^{-1}B^T\{Sx(t)+\sqrt{\varepsilon}\,q(x(t))\}$$

が存在する．

（証明）　(71)，(72)，(73）式を満たすようなε_0を考える．すると定理2より，$\varepsilon \leq \varepsilon_0$，$|\xi| \leq r$ならば（82)，(83）式の解は，ある$g \in \tilde{S}(D,\Delta)$に対して，

$\Omega=\{(x,\sqrt{\varepsilon}\,q(x)) \mid x \in R^n\}, x(t) \in S_{R(r)}[0]$に拘束される．

$|x(t)|$を評価し，両辺にe^{kt}をかけると，

$$e^{kt}|x(t)| \leq M|\xi| + \int_0^t M\{\sqrt{\varepsilon}|\tilde{B}|\Delta+\varepsilon L_\Theta^{R(r)}\}\,e^{kr}|x(r)|dr$$

この式にGronwall-Bellmanの補題を適用すると

$$e^{kt}|x(t)| \leq M|\xi|\,e^{\sqrt{\varepsilon}M\{|\tilde{B}|\Delta+\sqrt{\varepsilon}L_\Theta^{R(r)}\}t}$$

が得られる．従って

$$k>\sqrt{\varepsilon}_0 M\{|\tilde{B}|\Delta+\sqrt{\varepsilon}\,L_\Theta^{R(r)}\} \tag{87}$$

ならば

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=0, \quad \lim h(t)=\lim\sqrt{\varepsilon}\,q(x(t))=0$$

QED.

もっと一般のgに対しても，定理3を適用して次の定理が得られる．

定理5　定理4においてgの有界性がない場合には，$Mr<R$が成り立つ正数rとRを任意に固定する．するとある$\varepsilon_0>0$が存在して，

$\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$を持つ系（82），（83）について；

$q \in \tilde{S}(D, \varDelta)$ が存在して，

$u(t) = -R^{-1}B^T\{Sx(t) + \sqrt{\varepsilon}\, q(x(t))\}$は，$|\xi| \leq r$に対して最適性の必要条件式を満たす．

定理４，５は最適性の必要条件を満たすフィードバック則の存在を言っているだけである．これが最適制御を与えるかどうかは別途吟味の必要がある．

５．Newton 法による不動点問題の近似解法

前章までに誘導した関数空間上の不動点問題$q = T(q) i.e\ \ \forall \xi \in R^n$

$$q(\xi) = T(q)(\xi) = -\sqrt{\varepsilon}\int_0^\infty e^{\tilde{C}(-r)}F(x(r;0,\xi,q), \sqrt{\varepsilon}\, q(x(r;0,\xi,q)))dr \tag{88}$$

の近似解を求める．議論を簡単にするため，スカラ系すなわち$n = 1$の場合を考えよう．ベクトル系でも次数は高くなるが，同様な方法が適用できる．

$q(x)$を例えばフーリエ級数

$$q(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{k=1}\{a_{2k-1}\cos(kx) + a_{2k}\sin(kx)\} \tag{89}$$

で近似し，これを（88）式に代入する．積分時間の上限は適当に大きな時刻t_fに置き換える．

xの$2l+1$個の初期点$\xi^0, \xi^1, \ldots, \xi^{21}$を与えれば，連立$2l+1$元方程式

$$G^j(\alpha) = 0, j = 0, \ldots, 2l \tag{90}$$

が定義される．ここで$\alpha = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{21})$

$$G^j(\alpha) = q(\xi^j) + \sqrt{\varepsilon}\int_0^{t_f} e^{\tilde{C}(-r)}F(x(r;0,\xi^j,q), \sqrt{\varepsilon}\, q(x(r;0,\xi^j,q)))dr \tag{91}$$

この方程式を *Newton-Rapson* 法で解くことにする．その際G^jのαに関する *Jacobian* を計算する必要があるが，これは微分方程式

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}^j &= \tilde{A}x^j + \sqrt{\varepsilon}\,\tilde{B}q(x^j) + \varepsilon\Theta(x^j, \sqrt{\varepsilon}\, q(x^j)) \\ x^j(0) &= \xi^j \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{h}^j(t) &= \tilde{C}h^j(t) + \sqrt{\varepsilon}\, F(x^j, \sqrt{\varepsilon}\, q(x^j)) \\ h^j(t_f) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

のパラメータαについての変分方程式の解h^j_αによって

$$G^j_\alpha = q_\alpha(\xi^j) - h^j_\alpha(0)\ \ j = 0, \ldots, 2l \tag{94}$$

で表される．

無論ここで与えられる近似解は，xの$2l+1$個の初期点$\xi^0, \xi^1, \ldots, \xi^{2l}$を含むある有界な領域でのみ有効である．

６．数　値　例

制御系の状態方程式を

$$\dot{x}=x+u+g(x)$$

評価関数を

$$J=\frac{1}{2}\int_0^\infty(x^2+u^2)dt$$

(4)式からSを求めると，$S=1+\sqrt{2}$　(60)～(64)式から

$$\varepsilon=1, \tilde{A}=-\sqrt{2}, \tilde{B}=-1, \tilde{C}=\sqrt{2}$$
$$\Theta(x,h)=g(x)$$
$$F(x,h)=-(1+\sqrt{2})g(x)-\frac{\partial}{\partial x}g(x)((1+\sqrt{2})x+h)$$

以下のすべての例で

$$x(0)=2.0,\ l=5,\quad t_f=10T\left(T=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$\alpha^{(0)}=(a_0^{(0)},...,a_{10}^{(0)})=0$（すなわち$q^{(2)}=0$）とする．初期点$\xi^i$は〔−2.5，2.5〕を等分した．

例1　$g(x)=0.8x^2$のとき

Newton 法を実行するため（92)，(93）式を積分して，$q^1=T(q^0)$を求め，$\alpha^{(1)}$を決める．同様の操作を繰り返し，各$\alpha^{(j)}$を計算する．この手続きを必要な精度まで繰り返す．この計算例では，5回の計算によって$q(x)$の近似を得た．そのときの評価関数値は$J=8.7483$である．図1に$x(t)$を示す．線形フィードバック$u(t)=-Sx(t)$のみを用いた場合，系の軌道$x(t)$が発散していることがわかる．本稿で求めた非線形フィードバックは系を安定にしている．

例2

$g(x)=0.6sin(x)$のとき，これも5回の計算で$q(x)$を得た．その計算結果を図2に示す．そのときの評価関数値は$J=6.3329$であり，線形フィードバックのみの場合の評価関数値は$J=6.9666$である．この結果も非線形フィードバックの有効性を示している．

例3　$g(x)=(e^x-e^{-x})/(e^x+e^{-x})$のとき

これも5回の計算で不動点（関数）$q(x)$を得た．図3にこの非線形フィードバックによる$x(t)$を示す．これによる評価関数値は$J=7.280$であり，線形フィードバックのみによる評価関数値$J=9.480$より確かに小さい．これら3つの例は本稿の非線形フィードバックの有用性を示すものと考えられる．

7．おわりに

ある弱非線形な連立微分方程式の解が，無限時間にわたってある低次の安定な積分多様体を構成する十分条件を，不動点定理を用いて，求めた．次にこれを弱非線形最適レギュレータ問題に応用し，最適制御のための必要条件をみたす非線形フィードバック解を持つ十分条件を導いた．

さらに初期状態が有界領域に限定される場合には，この十分条件を大幅に弱くすることが出来ることを示した．

またそれから得られる不動点問題の近似解法を示し，簡単な系について数値実験をおこなって，この理論の有用性を示した．

末筆ながら日頃からご指導を頂いている信州大学工学部情報工学科の中村八束教授に深謝いたします.

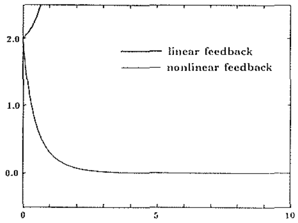

Fig. 1　state x (ex.1)

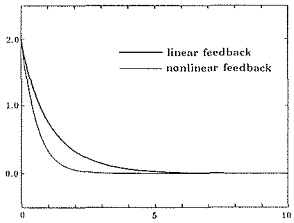

Fig. 2　state x (ex.2)

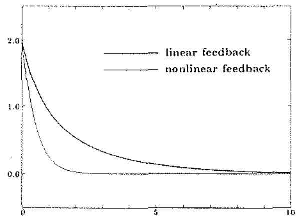

Fig. 3　state x (ex.3)

参 考 文 献

1) R. E. Kalman : Contributions to the theory of optimal control, Bol. Soc. Mexicana. 5 : pp. 102-119(1960)

2) J. L. Kelley : General topology, Van Nostrand (1955)

3) トレーブ：位相ベクトル空間・超関数・核，吉岡書店（1973）

4) ハラナイ：微分方程式，吉岡書店（1969）

5) 高橋　渉：非線形関数解析学，近代科学社（1988）

6) Y. Shidama et al : "A study of the weak non-linear optimal control problem using the fixed point theorem" Trans. IEICE (E), J72-E, 12, pp. 1317-1325 (1989)

7) 師玉，太田：ある種の非線形最適制御問題の一次近似解とその収束条件，電気学会論文誌，109-C-4, pp.203-210 (1989)

8) 師玉，太田：ある最適近似計算法の収束条件，計測自動制御学会論文集，25-3，pp.290-297（1989）

9) ポントリャーギン他：最適過程の数学的理論，総合図書（1967）