

水文量頻度分析へのC-ヒストグラムの 導入について

寒川典昭* 荒木正夫** 森川 智***

(昭和63年7月22日受理)

An Introduction of c-Histogram into Hydrologic Frequency Analysis

Noriaki SOGAWA*, Masao ARAKI**,
and Satoru MORIKAWA***

A data analysis was conducted to examine the effectiveness of the introduction of c-histograms into hydrologic frequency analysis, in view of the fact that no maximum entropy distribution may in some cases exist over the range $0 \leq x$ (random variate) $< \infty$. The initiation of this study was based on the characteristic of the c-histogram that it is the most objective distribution obtainable from given information and appropriate for hydrologic frequency analysis on a small number of data. The applicability of c-histograms containing statistical moments as information was examined by using daily, monthly, and annual maximum daily precipitation data and compared with that of the maximum entropy distribution with the same information when available. It has proved that c-histograms containing the following pieces of information are practically equal to respective precipitation histograms in the sense of hydrologic statistics: (1) 3-moment fit with 20 or 30 blocks for daily precipitations at the Fukushima and Yabuhara Rain-Gauge Stations; (2) 4-moment fit with 28 blocks for monthly precipitations at the Nagano Rain-Gauge Station; and (3) 3-moment fit with 30 blocks for annual maximum daily precipitations at the Nagano and Matumoto Rain-Gauge Stations.

1. ま え が き

筆者らは1変数^{1),2)}から2変数^{3),4)}, 3以上の多変数⁵⁾, 及び条件付き⁶⁾へと最大エントロピー分布を拡張させ, この分布による水文量の頻度分析を提唱した. また, 年最大日降水量を用いた1変数確率分布の適用比較から, 最大エントロピー分布の実用面に着目した有効性を明らかにした.⁷⁾ これらの研究は, 水工計画の信頼性向上に大きく寄与するとともに, 今まで水文量に適合する確率分布が存在しない理由で見送られてきた3個以上の

* 土木工学科 助手

** 土木工学科 教授

*** 和歌山県(研究当時, 工学部土木工学科及び大学院工学研究科土木工学専攻学生)

水文量の同時頻度分析を可能にした。

しかし、さらに最大エントロピー分布に関して詰めていかなければならない問題がいくつかある。それらの内主要なものは、(1)最大エントロピー分布が存在しない場合の対処の仕方、(2)2個及び3個以上の変数を持つ最大エントロピー分布への情報の与え方、(3)2変数最大エントロピー分布と既存の2変数分布、特に2変数ガンマ分布との適用比較、の3つであろう。特に(1)は、水文量の頻度分析を行う上で早急に解決しておかなければならない重要な問題と考えられる。

そこで、いまこの問題について、少し概観しておこう。

1977年、Einbu⁸⁾は統計モーメントで情報を与えた1変数最大エントロピー分布の存在範囲を明らかにした。2変数以上の場合、及び他の関数で情報を与えた場合については、今のところ同様な存在範囲が解明されていない。またそれを得るのは難解と思われる。しかし、筆者らの数値計算の経験からすると、上述の場合にも情報の状態によってはパラメータ同定がなされないことがあった。このようなとき、情報の与え方を変更したり情報量を増減させたりすれば、存在範囲内に最大エントロピー分布を持ち込めることが多いが、そうした対処の仕方は求まった確率水文学あるいはリターンピリオドの精度低下を招くことになる。また、解が求まらないとき、確率変数の存在区間を上限も適切な値で有限として対処する方法も考えられるが、そのようにしてもほとんどの場合でパラメータ同定がなされなかった。

そこで、本稿ではこの問題の解決をはかるために Collins・Wragg⁹⁾によって定式化された最大エントロピーヒストグラム（別名C-ヒストグラム（Common-area histogram 略））の水文学頻度分析への導入を考えた。この分布は、母集団を有限個の、個々のブロック面積が等しいヒストグラムで近似し、統計モーメントを制約条件としてエントロピーを最大にするように個々のブロック間隔を設定したものである。従って、指定したブロック数と与えた情報に依存してこの分布の適切な形状が定まり、最大エントロピー分布が存在しない場合にも必要な情報を用いたC-ヒストグラムが求まることになる。

そこでまず、第2章ではC-ヒストグラムの定式化とパラメータ同定法について述べる。

第3章では、第2章の理論を代表的な水文学量である日降水量、月降水量、年最大日降水量に適用して、C-ヒストグラムの特徴を最大エントロピー分布と比較しながら把握する。特に、最大エントロピー分布が存在しない場合の水文学データへのC-ヒストグラムの適用性、両者とも存在する場合の分布の形状とリターンピリオドの比較、及びパラメータ同定に要した計算時間の比較を通じてC-ヒストグラムの特徴を明らかにしていく。最後に、第4章では得られた結果を要約して提示するとともに、水文統計におけるこの分布の今後の発展の方向を示しておく。

なお、最大エントロピー分布は特定の水文学量（種類別及び時間単位別の水文学量）を対象としたものでなく、適切な情報の与え方をその都度選択することにより、すべての水文学量の頻度分析を可能にすることを目差したものであった。従って、C-ヒストグラムも当然そのように位置付けられる。

2. C-ヒストグラムの推定

2.1 定式化

いま、確率変数 $x \in [0, R]$ 上に M 個のブロックを考え、 n 番目ブロックの確率密度を

$$w(x) = w_n = \frac{1}{Ma_n}, \quad x_{n-1} < x < x_n \quad (1)$$

で定義する。ただし

$$a_n = x_n - x_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, M \quad (2)$$

とする。このとき、式(1)のエントロピーは

$$\begin{aligned} H_M &= - \int_0^R w(x) \ln w(x) dx = - \sum_{n=1}^M \int_{x_{n-1}}^{x_n} w_n \ln w_n dx \\ &= \ln M + \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \ln a_n \end{aligned} \quad (3)$$

となる。一方、原点のまわりの r 次のモーメントは

$$\mu_r = \int_0^R x^r w(x) dx = \frac{1}{M(r+1)} \sum_{n=1}^M \sigma_{rn} \quad (4)$$

で与えられる。ここに

$$\begin{aligned} \sigma_{rn} &= x_{n-1}^r + x_{n-1}^{r-1} x_n + \dots + x_{n-1} x_n^{r-1} + x_n^r, \\ \sigma_{r0} &= 0, \quad r = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (5)$$

である。なお、確率密度関数の全領域にわたる面積が1という条件は、式(1)に含まれている。

Collins・Wragg⁹⁾ は、式(4)の制約の下で、式(3)を最大にする a_n から式(1)の w_n を求め、それをC-ヒストグラムと呼んだ。

これは有限区間内のヒストグラムの形で与えられているが、基本的には最大エントロピー分布と同様である。従って、最大エントロピー分布と同様、与えた条件を除くと一様指向性を持つものである。しかも、最大エントロピー分布では扱えない問題へも適用可能であるという特徴を持っている。筆者ら¹⁾ がすでに述べた最大エントロピー分布で議論しているように、データ数が少なく不確定性の強い水文現象の説明に、この確率分布を導入することは妥当な立場と考える。

2.2 パラメタ同定法

本節でも、Wragg・Dowson¹⁰⁾ と同様な考え方から導出された Collins・Wragg¹⁾ の手法を採用する。この手法は収束過程が明示でき、その収束度合をみながら補正量(残差)を修正できるため、利用しやすいという長所がある。

さて、前節で定式化された最大化問題は、ラグランジュ関数

あるいは、次のように略記される。

$$A(x_0) E = R(x_0) \tag{12}$$

ここに、 $[]^{(0)}$ は、マトリックスの各要素に、式(9)で設定した近似値を代入することを意味している。

式(11)及び式(12)は $(M+N)$ 元 1 次連立方程式である。従って、ここでも最大エントロピー分布のパラメタを同定するとき採用してきた繰り返し法¹⁾と同様にして解くことができる。ただし、初期値としての式(9)の λ_i^0 には、固定した値を与えることができず、ヒストグラムから判断してその都度適切な値を仮定しなければならない。 λ_i^0 の初期値は、最大エントロピー分布のパラメタ同定計算の経験から判断して零に設定している。

3. 実データへの適用

本章では、前章の理論を実データに適用して、c-ヒストグラムの特徴を検討する。実データとして、長野県内の次の観測所の降水量を採用した。

- 1) 福島：1938年～1983年までの9月15日の日降水量。
- 2) 蕨原：1938年～1983年までの6月15日の日降水量。
- 3) 長野：1888年～1985年までの6月の月降水量。
- 4) 長野：1890年～1973年までの年最大日降水量。
- 5) 松本：1898年～1969年までの年最大日降水量。

一般に、日降水量は逆J字型の形状を、月降水量、年最大日降水量は正規型よりも右にひずんだ形状をとる。

いま、得られた結果を、適合度とパラメタ同定時間の立場から考察すると次のようになる。ただし、以下の図中で最大エントロピー分布の掲載がない箇所は、パラメタ同定がなされなかった場合である。

(a) 1), 2)の降水量への適用比較

1)と2)は同じ時間単位の降水であるため、図1に1)の福島日降水量のヒストグラムを、図2に図1に対応したc-ヒストグラムと最大エントロピー分布を示した。ただし、3モーメント適合では紙面の都合でブロック数 $M=10$ 個、30個の場合は省略した。また、2)の蕨原の場合も福島と同様の傾向を示した。

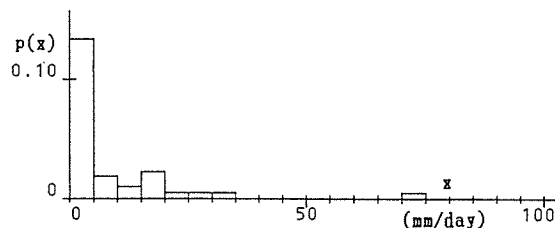


Fig. 1 Histogram of the precipitation on September 15 (Fukushima).

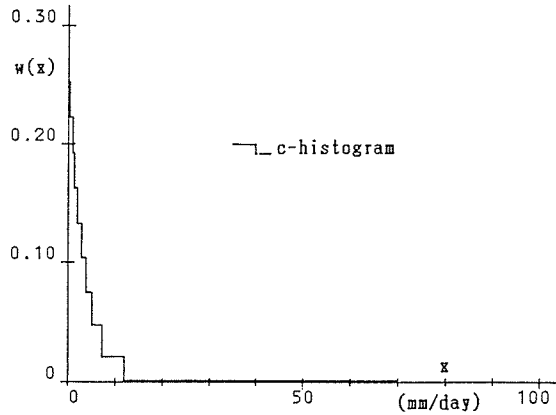
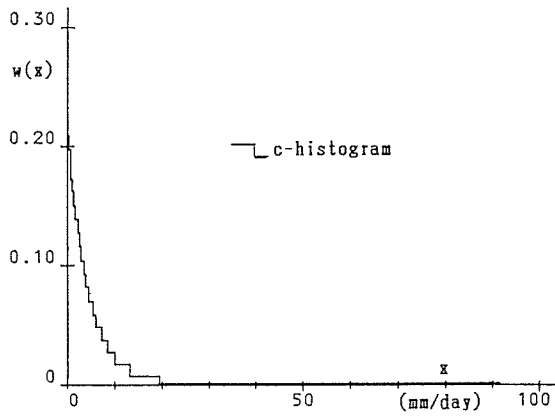
(a) 2 moments fit, $M=10$ (b) 2 moments fit, $M=20$

Fig. 2 c-Histograms and maximum entropy distributions calculated from the precipitation on September 15 (Fukushima).

データのヒストグラムは原点付近の第1ブロックにパルスの大きな密度を持ち、次のブロックからの密度が急減する逆J字形状を示している。右裾は、福島では75(mm/day)程度まで、蕨原では155(mm/day)程度まで広がっている。

いま得られたc-ヒストグラムの実データヒストグラムに対する適合度からみて、 $M=10$ 個は少なすぎ、ここでは $M=20$ 個程度以上を必要とした。そこで、 $M=20$ 個、30個の場合についてみると、2モーメント適合のc-ヒストグラムは減衰が十分に得られず、右裾がデータの存在区間のかなり手前で止まった。3モーメント適合にすると上述の2点がほぼ解消され、全体的にも原点付近及び右裾の方も十分に実データヒストグラムに適合した。

一方、最大エントロピー分布は、2モーメント適合の場合 Einbu⁸⁾ の存在条件からは

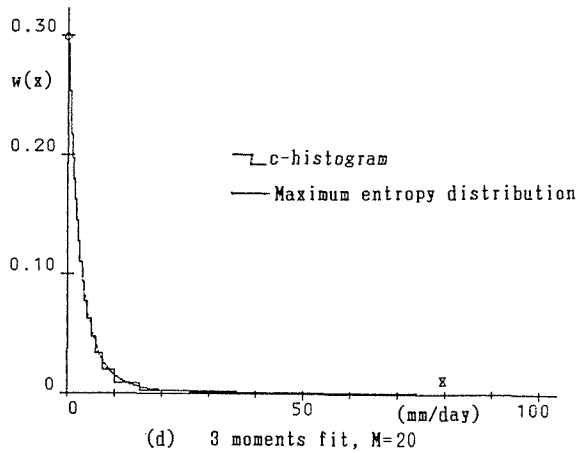
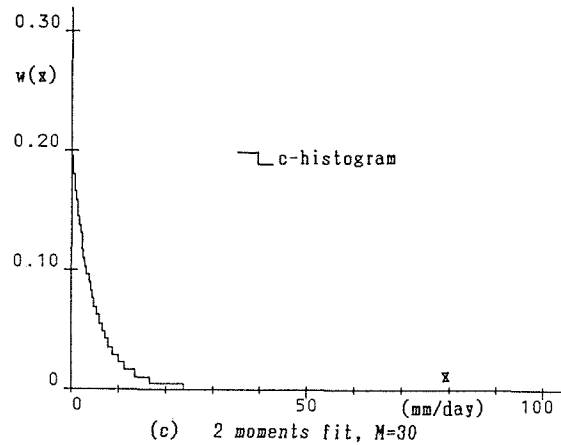


Fig. 2 Continued.

ずれるために得られず、3モーメント適合はほぼC-ヒストグラムの傾向と一致する形で求まった。また、 M を20個程度以上とすればC-ヒストグラムの最大エントロピー分布に対する近似も十分であった。

なお、実データから情報を得る段階で、高次モーメントになる程その推定誤差の増大が予想される。そのため、採用するモーメントはできるだけ低次におさえることが望まれる。筆者らは具体的には水文学頻度分析上の経験からして、4次モーメント以下を情報とすべきであると考えている。ここでは、3次モーメントまでで十分であったので4次モーメントは用いなかった。もちろん2次モーメントまででよい適合度が得られれば、3次モーメント以上を必要としない。

(b) 3)の降水量への適用比較

図3に長野月降水量のヒストグラムを、図4に図3に対応したC-ヒストグラムと最大エントロピー分布を掲載した。ただし、3、4モーメント適合では紙面の都合で $M=10$ 個、20個の場合は省略した。

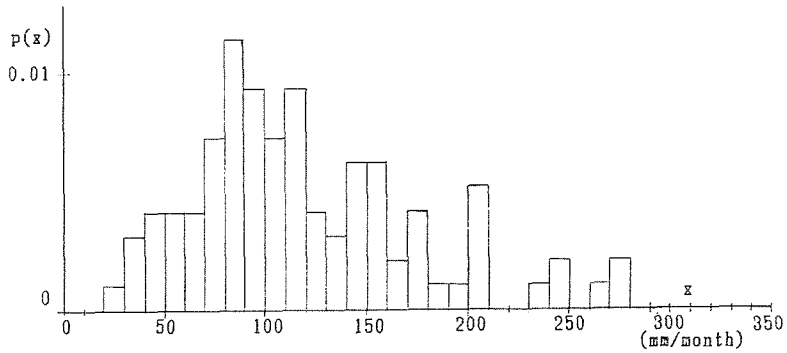


Fig. 3 Histogram of the precipitation in June (Nagano).

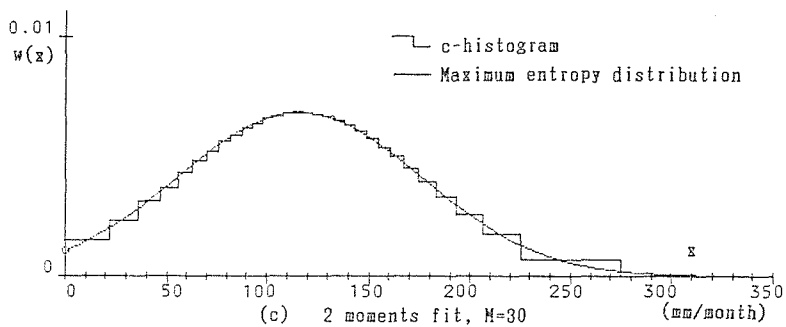
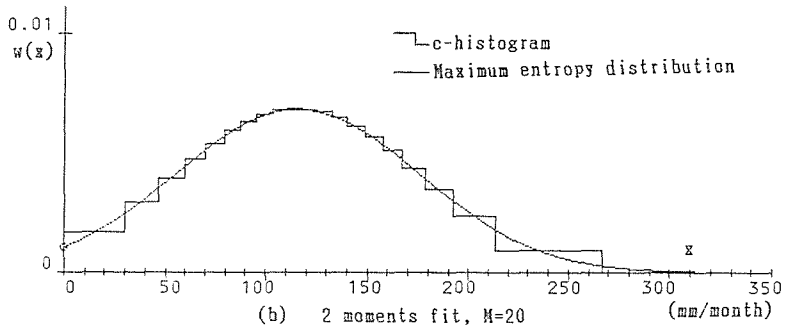
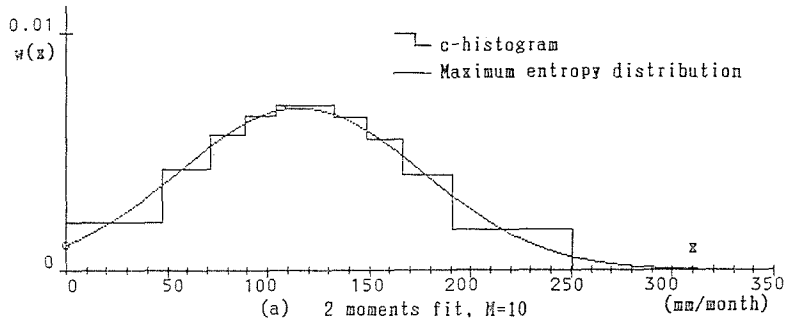


Fig. 4 c-Histograms and maximum entropy distributions calculated from the precipitation in June (Nagano).

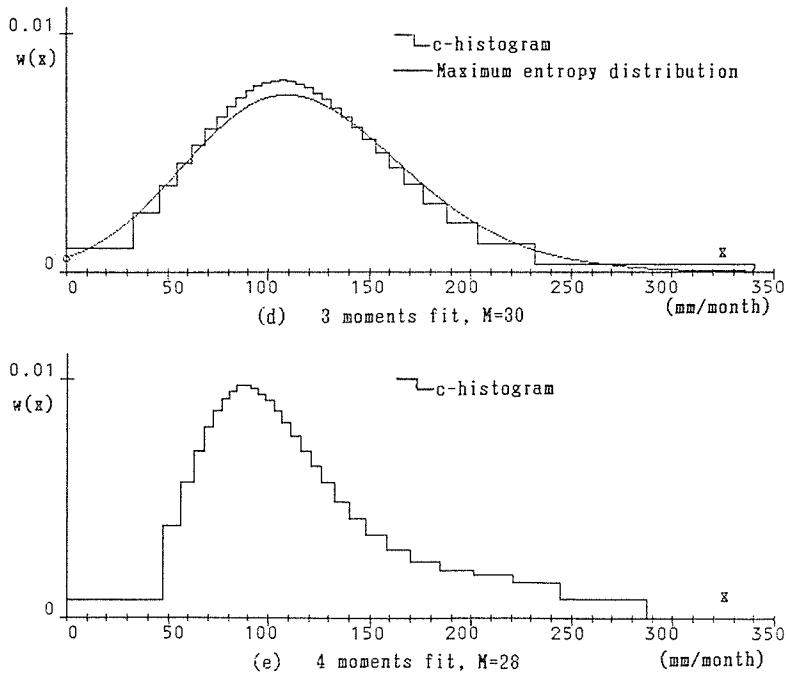


Fig. Continued.

実データのヒストグラムは、80~90 (mm/month) にモードを持ち、左裾は 20(mm/month) から始まり、右裾は 280(mm/month) まで広がる右にひずんだ形状を示している。いま得られたc-ヒストグラムの実データヒストグラムに対する適合度からみて M は 30個程度必要であるので、ここではこの場合について考察する。2モーメント適合のc-ヒストグラムは実データヒストグラムよりフラットになり、ピークの位置も右下に存在してあまり適合度はよくない。また左裾は必要なところまで下がらず、右裾の伸びも十分でない。3モーメント適合にするとピークが左上に上り左右の裾の部分の適合度も改善されるが、まだ実データヒストグラムよりピークの位置が右下にあり、右裾の密度が小さい。4モーメント適合にするとピークの位置が実データヒストグラムと一致し、さらに 240 (mm/month) 程度を越える領域の密度の値が大きくなり実データによく近似してくる。ただし、この場合 $M=29$ 個、30個では初期値の設定がうまくいかずパラメタ同定ができなかったのので $M=28$ 個とした。

最大エントロピー分布は2、3モーメント適合の場合は求めたが、4モーメント適合の場合は解の存在範囲⁸⁾ 外となり、パラメタ同定ができなかった。2モーメント適合では最大エントロピー分布とc-ヒストグラムの形状はほぼ一致していた。3モーメント適合にするとc-ヒストグラムの方が尖った分布となった。また M は30個程度にすれば最大エントロピー分布に対するc-ヒストグラムの近似も十分であった。

なお、表1に参考までに図4(d)を求めたときの x_n の初期値と解、及び $w(x)$ の値を示

Table 1 Initial values of x_n , final values of x_n , and $w(x)$ using the final values of x_n , for Fig. 4 (d).

| Initial value | x_n | $w(x)$ |
|---------------|--------|----------|
| 30.0 | 32.63 | 0.001022 |
| 40.0 | 45.63 | 0.002515 |
| 50.0 | 55.04 | 0.003642 |
| 60.0 | 62.34 | 0.004564 |
| 70.0 | 68.59 | 0.005335 |
| 80.0 | 74.17 | 0.005981 |
| 90.0 | 79.28 | 0.006521 |
| 100.0 | 84.06 | 0.006968 |
| 110.0 | 88.61 | 0.007329 |
| 120.0 | 92.99 | 0.007612 |
| 130.0 | 97.25 | 0.007822 |
| 140.0 | 101.44 | 0.007962 |
| 150.0 | 105.58 | 0.008038 |
| 160.0 | 109.73 | 0.008050 |
| 170.0 | 113.89 | 0.008001 |
| 180.0 | 118.11 | 0.007893 |
| 190.0 | 122.43 | 0.007727 |
| 200.0 | 126.87 | 0.007504 |
| 210.0 | 131.48 | 0.007225 |
| 220.0 | 136.32 | 0.006889 |
| 230.0 | 141.45 | 0.006497 |
| 240.0 | 146.96 | 0.006049 |
| 250.0 | 152.98 | 0.005542 |
| 260.0 | 159.68 | 0.004977 |
| 270.0 | 167.34 | 0.004351 |
| 280.0 | 176.44 | 0.003663 |
| 290.0 | 187.90 | 0.002908 |
| 300.0 | 203.89 | 0.002085 |
| 350.0 | 231.88 | 0.001191 |
| 400.0 | 340.73 | 0.000306 |

い。また、この時間単位の降水量を用いる治水計画では特に重要となる右裾部分の伸びが十分でない。3モーメント適合にすると、ピークが左上に上り全体的な適合度が改善されるとともに、右裾が広い領域に広がり、長野では140 (mm/day) を越える付近に、松本では160 (mm/day) 付近に右端が存在するようになった。最大値水量を対象とした場

しておく。

(e) 4), 5)の降水量への適用比較

4)と5)は同じ時期単位の降水であるので、図5に4)の長野年最大日降水量のヒストグラムを、図6に図5に対応したc-ヒストグラムと最大エントロピー分布を掲載した。ただし、3モーメント適合では $M=10$ 個、20個の場合は紙面の都合で省略した。また、5)の松本の場合も傾向的には長野と同様であった。

実データのヒストグラムは、長野では50~55 (mm/day) にモードを持ち25~115 (mm/day) の区間に全データが存在し、松本では65~70 (mm/day) にモードを持ち30~120 (mm/day) の区間に全データが存在する、どちらも右にひずんだ形状を示している。

また、b) で述べたように、実データヒストグラムに対する適合度からみて M は30個程度必要であるので、ここでもこの場合について考察する。2モーメント適合のc-ヒストグラムは実データヒストグラムよりフラットで、全体的にc-ヒストグラムが右側に存在してあまり適合度はよくない。

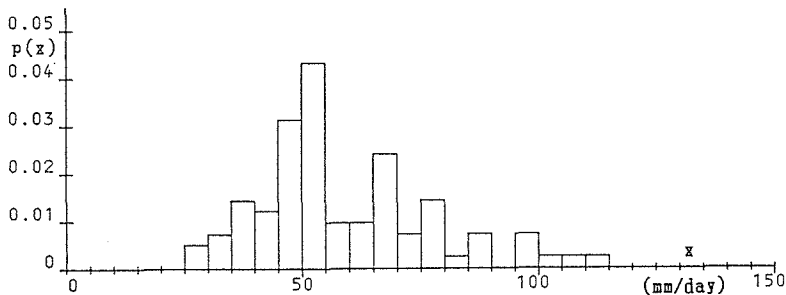


Fig. 5 Histogram of the annual maximum daily precipitation (Nagano).

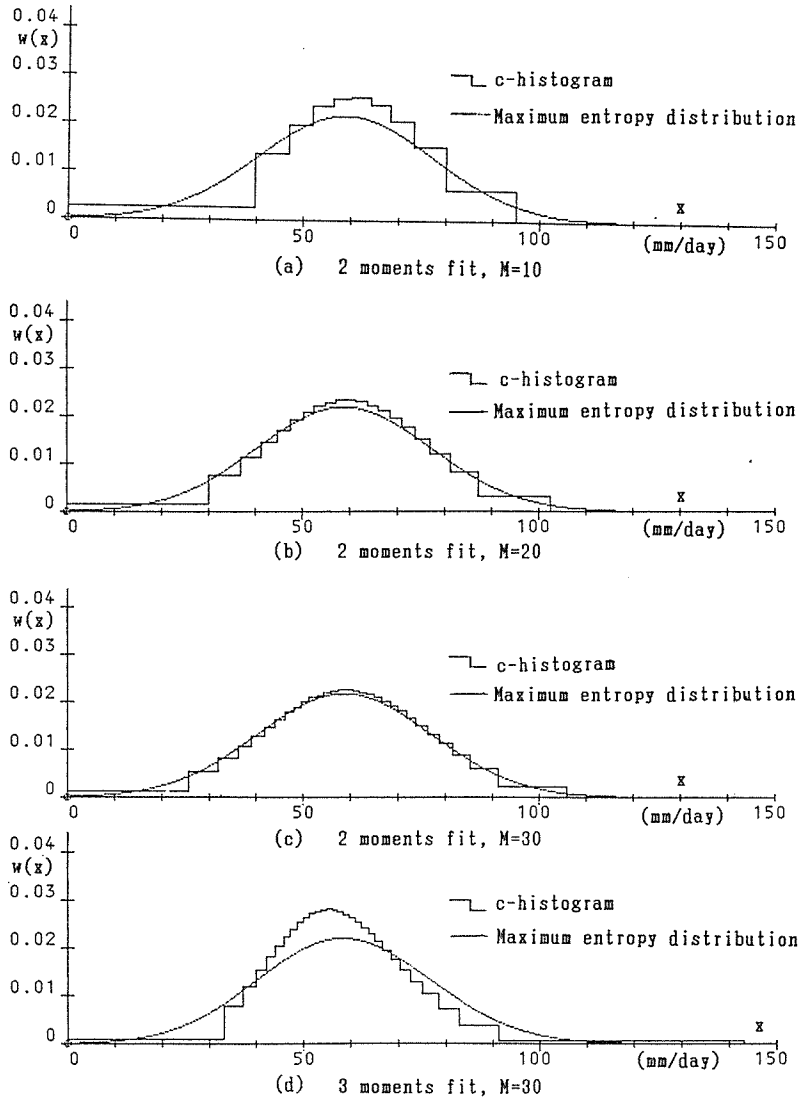


Fig. 6 c-Histograms and maximum entropy distributions calculated from the annual maximum daily precipitation (Nagano).

合、上述したような大きな水文学量の出現の可能性を与えることは好ましい傾向である。なぜなら、データ数が増加するに従って分布の右裾に対応する低確率群のデータの出現が見られるようになるからである。

一方、最大エントロピー分布は2モーメント適合から3モーメント適合にしてもほとんど分布形状に変化がなく、3モーメント適合ではC-ヒストグラムよりフラットになって、実データヒストグラムに対する適合度の改善が得られなかった。また、C-ヒストグラムの最大エントロピー分布に対する近似度合から判断しても M の値は30個程度必要であっ

た。

表2は、右裾部分の実用的な適合度をみるために、3モーメント適合から得られるデータ中の最大値のリターンピリオドについて、最大エントロピー分布とc-ヒストグラムを比較をしたものである。c-ヒストグラムの方が最大エントロピー分布よりかなり小さな値を示している。これは、図6(d)からもわかるように、3モーメント適合にすると3次モーメントの導入により、c-ヒストグラムが最大エントロピー分布より右裾に長く尾を引くためである。データ数と最大値の大きさから判断すると、長野では $M=30$ 個のc-ヒストグラムのリターンピリオドの方が最大エントロピー分布の場合より妥当な値を示している。松本では、両者の間にかなり隔たりがあるが、筆者らの水文量頻度分析の経験からするとどちらも取り得る可能性内にあり、優劣の判断は難しい。次に、 $M=30$ 個、3モーメント適合のc-ヒストグラムがデータ中の最大値のリターンピリオドをどのように評価するかをさらに詳細にみるために、千曲川流域の17箇所の年最大日降水量について同様の検討を行った。表3が得られたリターンピリオドをデータ数と比較したものである。その結果、どの地点のリターンピリオドもデータ数の1/2から2倍の間におさまり、自然な値となっていることがわかった。

Table 2 Comparison of the return periods for the maximum values calculated from the 3-moment fit c-histograms with those from the 3-moment fit maximum entropy distributions (Nagano, Matumoto).

(a) Nagano (Number of data:84)

| Number of block | 10 | 20 | 30 |
|-----------------|-------|----|----|
| c-histogram | 23 | 31 | 39 |
| MED | 119.2 | | |

(b) Matumoto (Number of data:72)

| Number of block | 10 | 20 | 30 |
|-----------------|-------|----|----|
| c-histogram | 36 | 44 | 53 |
| MED | 640.2 | | |

MED:Maximum entropy distribution

Table 3 Return periods for the maximum values calculated from the 3-moment fit c-histograms of 30 blocks (17 rain gauge stations in the Chikuma basin).

| Rain gauge stations | Return period | Number of data |
|---------------------|---------------|----------------|
| Azumi | 45 | 61 |
| Bessho | 45 | 52 |
| Iiyama | 109 | 77 |
| Iwamura | 126 | 77 |
| Kinasa | 88 | 50 |
| Koumi | 39 | 54 |
| Minamiotari | 106 | 58 |
| Nakajo | 53 | 58 |
| Nakano | 82 | 78 |
| Nozawa | 67 | 59 |
| Omachi | 66 | 75 |
| Shinonoi | 56 | 78 |
| Soga | 58 | 59 |
| Suzaka | 60 | 77 |
| Toyoshina | 58 | 71 |
| Ueda | 41 | 79 |
| Yashiro | 71 | 77 |

(d) パラメタ同定の計算時間

最後に、表4に1)~5)の降水量に対して、2, 3モーメント適合の場合のパラメタ同定に要した計算時間を示した。ただし、計算には信州大学情報処理センター HITAC M-240H を用いた。c-ヒストグラムの計算時間は、採用するモーメントの個数やプロッ

Table 4 Calculation times for the parameter estimation (Computer Center HITAC M-240H, Shinshu University).

| Rain gauge station | Number of moment | MED (Sec.) | c-histogram (Sec.) | | |
|---------------------------------|------------------|------------|--------------------|------|------|
| | | | 10* | 20* | 30* |
| Fukushima | 2 | —— | 5.64 | 5.60 | 5.93 |
| Sep.15 | 3 | 8.94 | 7.19 | 7.84 | 8.95 |
| Yabuhara | 2 | —— | 5.70 | 5.82 | 6.01 |
| Jun.15 | 3 | 8.74 | —— | 7.99 | 9.15 |
| Nagano | 2 | 8.56 | 5.33 | 5.46 | 5.55 |
| Jun. | 3 | 38.88 | 7.22 | 7.25 | 8.08 |
| Nagano Annual maximum one day | 2 | 8.39 | 5.30 | 5.27 | 5.55 |
| | 3 | 67.86 | 7.34 | 7.52 | 7.94 |
| Matumoto Annual maximum one day | 2 | 8.45 | 5.52 | 5.69 | 5.81 |
| | 3 | 66.33 | 7.29 | 7.66 | 8.26 |

*:Number of block

ク数にあまり依存することなく、5.27秒から9.15秒の間におさまっている。

一方、最大エントロピー分布では、福島、蕨原の日降水量の3モーメント適合、及び長野の月降水量、長野、松本の年最大日降水量の2モーメント適合では6.56秒から8.94秒の間であるが、長野の月降水量、長野、松本の年最大日降水量の3モーメント適合ではそれぞれ38.88秒、67.86秒、66.33秒となり、 $M=30$ 個、3モーメント適合のC-ヒストグラムと比較して、長野の月降水量で4.8倍、長野、松本の年最大日降水量で、それぞれ8.5倍、8.0倍の計算時間がかかったことになる。これは、最大エントロピー分布のパラメタ同定には数値積分を必要とするため、パラメタ数の増加が計算時間に大きく影響したことになると考えられる。このC-ヒストグラムの計算時間が少なくてすむという特徴は、この分布を2変数以上に拡張したときかなり有効に働くことが予想される。

なお、本章で取りあげた最大エントロピー分布はC-ヒストグラムと条件をあわすために統計モーメントのみを情報としたが、指数関数を情報に加えると、特にリターンピリオドの点で大きく改善されることを付記しておく。(7), (11))

4. 結 論

本稿は、滑らかな曲線を有する最大エントロピー分布が存在しない場合に対処するために、C-ヒストグラムの水文学頻度分析への導入について考察したものである。得られた結果を要約すると次のようになる。

(1) 福島、蕨原の日降水量に対する適用では、最大エントロピー分布が存在しない2モーメント適合に対してC-ヒストグラムが求まること、実データヒストグラムに対する適合度、及び最大エントロピー分布に対する近似度合から判断して、ブロック数は20個程度必要であること、採用するモーメントは3次まで必要であること、が明らかになった。

(2) 長野の月降水量に対する適用では、最大エントロピー分布が存在しない4モーメン

ト適合に対してc-ヒストグラムが求まり、ブロック数は30個程度、採用するモーメントは4次まで必要であるという結果となった。

(3) 長野、松本の年最大日降水量に対する適用では、最大エントロピー分布が存在しない場合は、2, 3モーメント適合においてはなかったが、ブロック数は30個程度、採用するモーメントは3次まで必要とした。さらに、17地点の年最大日降水量のデータを追加して、30ブロック、3モーメント適合のc-ヒストグラムから求めた最大値のリターンピリオドとデータ数の関係を見ると、求めたリターンピリオドはデータ数の1/2から2倍の間におさまり、自然な値をとることがわかった。

(4) 最後に、2, 3モーメント適合のパラメタ同定に要した計算時間を比較すると、c-ヒストグラムの場合は採用するモーメントの個数やブロック数にあまり依存することなく、5.27秒から9.15秒の間におさまったが、最大エントロピー分布の場合は、長野の月降水量、長野、松本の年最大日降水量の3モーメント適合ではそれぞれ対応する30ブロックのc-ヒストグラムの4.8倍、8.5倍、8.0倍かかった。最大エントロピー分布の他の場合は6.56秒から8.94秒の間となり、c-ヒストグラムと大差なかった。

今後は、統計モーメント以外の情報を持つc-ヒストグラムの導出、2変数以上への拡張、及び他の確率分布との適用比較、の3点を検討することにより、この分布を最大エントロピー分布と同じレベルまで発展させたいと考えている。

なお、本研究を行うにあたり、計算・作図等で各務原市・柴山敏英君（研究当時信州大学工学部土木工学科学生）の協力を得た。記して謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) 寒川典昭, 荒木正夫: 水文事象の頻度分析への MEP 導入について; 土木学会論文報告集, 第335号, pp. 89-95 (1983年7月).
- 2) 寒川典昭, 荒木正夫, 小林紀之: 種々の水流量への1変数 MEP 分布の適用性, 信州大学工学部紀要, 第58号, pp. 27-40 (1985年9月).
- 3) 寒川典昭, 荒木正夫, 寺島 彰: 2変数 MEP 分布とその特性に関する研究, 水理講演会論文集, Vol. 28, pp. 397-402 (1984年2月).
- 4) 寒川典昭, 荒木正夫, 寺島 彰: 2変数最大エントロピー分布の適用性, 信州大学工学部紀要, 第62号, pp. 33-48 (1987年9月).
- 5) 寒川典昭, 荒木正夫, 佐藤健次: 多変数最大エントロピー分布とその基礎特性に関する研究, 土木学会論文集, 第375号/II-6, pp. 89-98 (1986年11月).
- 6) Sogawa, N., Araki, M., and Imai, T.: Studies on Multivariate Conditional Maximum Entropy Distribution and Its Characteristics, JHHE, Vol. 4, No. 1, pp. 79-97 (Apr., 1986).
- 7) 寒川典昭, 荒木正夫, 森 茂: 1変数最大エントロピー分布の有効性の検討——他の分布との比較において——, 水文・水資源学会, 第1回研究発表会 (1988年8月).
- 8) Einbu, J. M.: On the Existence of a Class of Maximum-Entropy Probability Density Function, IEEE Transactions on Information Theory, Vol. IT-23, pp. 772-775 (Nov., 1977).
- 9) Collins, R. and Wragg, A.: Maximum Entropy Histograms, J. Phys.: Math. Gen.,

- Vol. 10, No. 9, pp.1441-1464 (1977).
- 10) Wragg, A. and Dowson, D. C. : Fitting Continuous Probability Density Function Over $[0, \infty)$ Using Information Theory Ideas, IEEE Transactions on Information Theory, Vol. IT-16, pp.226-230 (Mar., 1970).
 - 11) 寒川典昭, 荒木正夫, 大原基秀 : 情報の与え方と最大エントロピー分布, 土木学会年次学術講演会, 第42回, II-3, pp.36-37 (1987年9月).