

## 種々の水文量への1変数MEP分布の適用性

寒川典昭\* 荒木正夫\*\* 小林紀之\*\*\*  
(昭和60年5月30日受理)

### Applicability of the Uni-variate MEP Distribution to Various Hydrologic Data

Noriaki SŌGAWA,\* Masao ARAKI,\*\*  
and Noriyuki KOBAYASHI\*\*\*

The applicability of the uni-variate MEP distribution to hydrologic histograms was examined by employing the iteration method to calculate those distributions with two and four moments for observed hydrologic histograms. The observed hydrologic histograms treated comprised quantities of precipitation and discharge registered at intervals of hour(s), one day, ten days, one month, one season, and one year and those selected as extreme values. The information employed for the uni-variate MEP distribution comprised normalized moments. The two-moment distributions obtained here have a tendency to disperse as compared with the histograms observed, but an introduction of the 3rd and 4th moments allows considerable improvement of the degree of agreement between the observed and calculated results. The four-moment distributions are in good agreement with not only normal histograms but also those assuming particular shapes.

### 1 序 論

水文事象の頻度分析のための1変数分布は多数存在するが、対象とする母集団にいかなる分布形をあてはめるかという問題に対する解答は経験則の域を出なかった。これに対し、Sonuga<sup>1)</sup>は最大エントロピー原理(MEP)による水文事象の頻度分析法を提案した。彼の方法は、MEPを置くことにより分布形の採用に思想的妥当性を与えた点で高く評価されるが、パラメタ同定法が複雑なため3次以上のモーメントを制約条件に加え難いという欠

\* 土木工学教室 助手

\*\* 土木工学教室 教授

\*\*\* 徳横河工事

点を有していた。そこで、我々は与えられた任意次数のモーメントを制約条件としてエントロピーを最大にする分布(1変数 MEP 分布)を水文頻度分析へ導入した<sup>2)</sup>。さらに、この分布を2変数から多変数へと拡張しながら、既存分布の導出を裏付けとして MEP 分布の位置付けを行った<sup>3), 4), 5)</sup>。

これらの研究を通じて、MEP 分布は水文量のような小標本で不確定性の多い自然現象の説明に妥当な立場を与えることがわかった。さらに多変数 MEP 分布は、従来実用的には正規分布しか存在しなかった任意変数の確率分布の領域に非対称形を表わし得る分布として導入され、水文量の多変数統計を可能ならしめた。しかし、実測データに対する適用性の検討については不十分であり、重要な課題として残されていた。

本研究ではこの点を明らかにするために、実際の水文量(種々の時間単位の降水、流量データ)を取り上げ、頻度図に対する1変数 MEP 分布の適合度を制約条件とするモーメントの数との関連で把握する。種々の時間単位を考えることにより、水文量のもつ分布形の大部分を捕えることができ、多くの形状の頻度図に対する1変数 MEP 分布の適合度の検証が可能となる。同時に、モーメントの増加に伴う改善度をみることにより、実際の水文頻度分析に用いるモーメントの妥当な個数を判定することができる。

## 2 理論式とパラメタ同定法

### 2.1 1変数 MEP 分布

確率密度関数を  $p(x)$  とする。いま、密度関数の具備すべき条件と任意関数  $g_r(x)$  の期待値を制約条件(得られる情報)とすると、最大エントロピー推定値(1変数 MEP 分布)は次式で与えられる。

$$p(x) = \exp\left\{-\lambda_0 - \sum_{r=1}^N \lambda_r g_r(x)\right\}. \quad (1)$$

ここに、 $\lambda_r$  はラグランジュの未定乗数である。(1)式は  $g_r(x)$  の与え方により、正規分布<sup>6)</sup>、対数正規分布<sup>6)</sup>、指数分布<sup>6)</sup>、一様分布<sup>7)</sup>、コーシー分布<sup>8)</sup>及びグンベル分布<sup>9)</sup>になり得ることが明らかにされている。このことより、MEP 分布はピアソン系の分布等と同レベルに位置付けられ、 $g_r(x)$  の具体形が与えられた分布がピアソン  $k$  形分布 ( $k=1, 2, \dots, 12$ ) の1つに対応すると考えられる。

$g_r(x)$  の与え方は今のところ主観によらなければならないが、4次までのモーメントが分布形状と密接に関係していることを考えて

$$g_r(x) = x^r, \quad r=1, 2, \dots, N \quad (2)$$

を採用する。このとき

$$E[x^r] = \mu_r, \quad r=1, 2, \dots, N \quad (3)$$

は水文データから計算された既知量であり、原点のまわりの  $r$  次のモーメントを表わしている。ただし、 $x$  は水文量であるため、その存在区間を  $[0, \infty)$  とする。したがって、(1)式に含まれる  $\lambda_r$  は

$$\mu_r \int_0^{\infty} \exp\left(-\sum_{r=1}^N \lambda_r x^r\right) dx = \int_0^{\infty} x^r \exp\left(-\sum_{r=1}^N \lambda_r x^r\right) dx, \quad r=1,2,\dots,N \quad (4)$$

なる非線形方程式を解くことにより決定され、 $\lambda_0$  は次式より計算される。

$$\lambda_0 = \ln\left\{\int_0^{\infty} \exp\left(-\sum_{r=1}^N \lambda_r x^r\right) dx\right\}. \quad (5)$$

## 2.2 パラメタ同定法

(4)式 of 非線形方程式を線形化して、繰返し法によるパラメタ同定を考える。いま  $\lambda_r$  の近似値を  $\alpha_r$ 、残差を  $\varepsilon_r$  とすると

$$\lambda_r = \alpha_r + \varepsilon_r. \quad (6)$$

上式を(4)式に代入して、 $\varepsilon_r$  に関してテーラー展開し  $\varepsilon_r^2$  以上の項を無視して整理すると次式が得られる。

$$\sum_{j=1}^N \hat{p}_{ij} \varepsilon_j = q_i, \quad i=1,2,\dots,N. \quad (7)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \hat{p}_{ij} &= c_{i+j} - \mu_i c_j \\ q_i &= c_i - \mu_i c_0, \quad i,j=1,2,\dots,N \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

であり、

$$c_s = \int_0^{\infty} x^s \exp\left(-\sum_{r=1}^N \alpha_r x^r\right) dx, \quad s=0,1,\dots,2N. \quad (9)$$

(7)式は  $\varepsilon_j$  に関する  $N$ 元連立1次方程式になっている。

具体的には図1のフローチャートに従って  $\lambda_r$  を算定する。ここで、初期値  $\alpha_i = 0.0$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) としているのは、この場合が経験的に最も収束性がよいためである。

## 3 実測データの種類と抽出法

水文量として降水量と流量を採用した。一般に、これらの水文量は時間単位の増加に伴い逆J字型から指数型、対数正規型を経て正規型へと変動することが知られている<sup>10)</sup>。そこで、ここでは多くの形状の頻度図への1変数MEP分布の適用性をみるため、種々の時間単位の水文量を取り上げた。

一方、データ数とモーメントの変動関係を調べると、

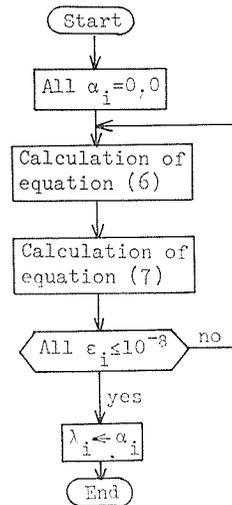


Fig. 1 Flow chart of the estimation procedure for Lagrangian multipliers.

明確ではないが1次、2次モーメントはデータ数が40個付近から、3次、4次モーメントは60個付近から安定する傾向がみられる。しかし、採用した観測所の観測期間はこれらの値より短い場合が多くデータ不足を否認しないため、データ間の独立性をある程度犠牲にしてデータ数の増加をはかった。以下、具体的な採用方法を記述する。

### 3.1 降水データ

長野県下の古谷(採用期間25年)、北牧(29年)、長久保新町(26年)、福島(42年)及び藪原(42年)の降水データをデータ数を考慮して次のような時間単位で採用した。

- 1) 3時間目：主降雨時間帯開始時点から3時間目の時間降水量 ( $t=3$ )。
- 2) 6時間目：主降雨時間帯開始時点から6時間目の時間降水量 ( $t=6$ )。
- 3) 6時間合計：主降雨の1時間目から6時間目までの合計。
- 4) 12時間合計：主降雨の1時間目から12時間目までの合計。

ここに、主降雨時間帯とは出水をもたらす一連降水(今回は総降水量30mm以上)によって流量が流域末端で立ち上がる時刻から15時間分とする。ただし、福島、藪原は時間降水量のデータが得られないため、上記時間単位での採用は行わなかった。

5) 日：古谷、北牧及び長久保新町は6月11日から6月20日までの10日間で3mm以上の場合を日(6月)、9月11日から9月20日までの10日間で3mm以上の場合を日(9月)とする。福島、藪原は6月15日を日(6月)、9月15日を日(9月)とし、3mm以下の場合にはその前後の3mm以上の降水日を採用する。

6) 旬：古谷、北牧及び長久保新町は6月上旬から7月下旬までの6旬を旬(6,7月)、9月上旬から10月下旬までの6旬を旬(9,10月)とし、福島、藪原は6月中旬を旬(6月)、9月中旬を旬(9月)とする。

7) 月：古谷、北牧及び長久保新町は、5,6,7月の3ヶ月を月(5,6,7月)、8,9,10月の3ヶ月を月(8,9,10月)とし、福島、藪原は6ヶ月を月(6月)、9ヶ月を月(9月)とする。

8) 季節：どの観測所も、3,4,5月の合計を季節(春)、6,7,8月の合計を季節(夏)、9,10,11月の合計を季節(秋)、12,1,2月の合計を季節(冬)とする。

9) 年：年総降水量。

10) 年最小月：年間を通じて最小月降水量。

### 3.2 流量データ

長野県下の生田(採用期間6年)、杭瀬下(28年)、立ヶ花(30年)及び小市(27年)の流量データをデータ数を考慮して次のような時間単位で採用した。ただし、生田は観測期間が短いため日以上の時間単位での適用は行わなかった。又、単位は $[m^3/s]$ に統一した。

- 1) 3時間目：主流量時間帯開始時点から3時間目の時間流量。
- 2) 6時間目：主流量時間帯開始時点から6時間目の時間流量。
- 3) 6時間平均：主流量の1時間目から6時間目までの平均時間流量。
- 4) 12時間平均：主流量の1時間目から12時間目までの平均時間流量。

ここに、主流量時間帯とは主降雨によるハイドログラフの立ち上がる時刻から15時間分とする。

5) 日：6月15日を日(6月15日)、9月15日を日(9月15日)とする。又、データ数を増

加させるため、6月11日から6月20日までの10日間を日(6月)、9月11日から9月20日までの10日間を日(9月)として採用する。

6) 旬：6月上旬から7月下旬までの6旬を旬(6,7月)、9月上旬から10月下旬までの6旬を旬(9,10月)とする。

7) 月：5,6,7月の3ヶ月を月(5,6,7月)、8,9,10月の3ヶ月を月(8,9,10月)とする。

8) 年：年総流量。

9) 年最大日：年間を通じての最大日流量。

10) 年最大月：年間を通じての最大月流量。

11) 年最小日：年間を通じての最小日流量。

12) 年最小月：年間を通じての最小月流量。

#### 4 適用結果と考察

前章で述べた実測データを用い、平均、分散を情報として取り入れた2モーメント適合( $l$ 次モーメントまでを用いて求めたMEP分布を $l$ モーメント適合という)と、さらにひずみ度、とがり度を情報として加えた4モーメント適合を得た。以下、その結果について考察する。

##### 4.1 ラグランジュ乗数

$\mu_r$  を確率変数  $x$  の原点の周りの  $r$  次のモーメントとするととき

$$m_r = \mu_r / (\mu_1)^r, \quad r=1,2,\dots,N \quad (10)$$

を原点の周りの  $r$  次の基準化されたモーメントという。 $m_r$  を用いると、 $N=2$  の場合  $m_2$  のみに依存してMEP分布が定まる。そのとき、 $m_2$  の増加に従って  $\lambda_0$  と  $\lambda_2$  は同様な指数関数的減少を示し、 $\lambda_1$  はそれらの曲線と直線  $m_2=0$  について対称となり、3者とも  $m_2 < 1.5$  の区間では  $m_2$  の微小変化に対して大きく変動することが知られている。 $N=4$  の場合、従属変数は  $m_2$ ,  $m_3$  及び  $m_4$  の3個となるため、このような傾向を論じることは難かしいが、経験的には基準化された3次モーメントまでを固定したとき、 $m_4$  の変動に伴うMEP分布の形状の感度は比較的鈍いことが明らかにされている<sup>11)</sup>。

表1は基準化されたモーメントから計算されたラグランジュ乗数である(表中の空白部分はラグランジュ乗数が同定できなかったことを示す)。これより以下のことが読み取れる。

1) 2モーメント適合は、理論的には  $1 \leq m_2 \leq 2$  となる場合に存在するが、ここで用いた計算法では存在区間内でも長久保新町(時間単位：年)の  $m_2 = 1.0210$ 、及び立ヶ花(年)の  $m_2 = 1.0208$  の場合に得ることができなかった。

2) 2モーメント適合のラグランジュ乗数の値は正負交互に現われることが多く、当然  $\lambda_2 > 0$  の収束条件を満足している。 $m_2 > 1.6$  の区間では、すべてのラグランジュ乗数は正值となり、この場合2モーメント適合のピークは  $x=0$  上に存在して指数分布に近い形となる。

3) 4モーメント適合は  $m_2$ ,  $m_3$  及び  $m_4$  を従属変数とするため、その存在区間を明示

Table. 1 Lagrangian multipliers of MEP distributions with two and four moments.  
(a) Koya (Precipitation)

Unit time	$\mu_1$ (mm)	$\lambda_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
One hour (t=3)	2.7353	0.7090 1.3814	-0.6072 -4.2364	0.5497 5.3438	-2.1986	0.3208
One hour (t=6)	2.6304	0.3449 0.7371	0.2467 -2.0822	0.2308 3.3247	-1.3692	0.1887
Six hours	16.309	0.9366 1.4011	-1.1513 -4.4682	0.7716 6.4486	-3.3572	0.6305
Twelve hours	28.063	0.2103 1.9417	0.5512 -6.5578	0.1296 7.0487	-2.2069	0.2186
One day (Jun.)	14.429	0.3497 1.5672	0.2358 -4.7424	0.2346 5.0132	-1.5051	0.1455
One day (Sep.)	20.426	-0.1377	0.8741	0.3263	-0.0667	0.0031
Ten days (Jun.,Jul.)	48.749	0.2670 0.7274	0.4240 -1.2374	0.1708 1.4347	-0.2890	0.0181
Ten days (Sep.,Oct.)	44.974	0.0086 0.1721	0.9827 0.3319	0.0044 0.5125	-0.1215	0.0086
One month (May,Jun.,Jul.)	129.14	1.7607 3.9587	-3.1272 -12.4192	1.6496 12.8344	-4.8617	0.6649
One month (Aug.,Sep.,Oct.)	134.80	0.7236 2.2082	-0.6420 -6.2655	0.5635 5.8417	-1.6236	0.1471
Season (Spring)	236.06	8.5578	-18.1781	9.0892		
Season (Summer)	436.56	4.8627	-10.2219	5.1148		
Season (Fall)	304.57	2.7269 11.5134	-5.3999 -36.5661	2.7327 37.7375	-14.9212	2.0548
Season (Winter)	88.662	1.8593 6.0600	-3.3618 -22.2848	1.7588 27.3558	-13.0776	2.2166
Year	1069.9	10.0279	-21.2756	10.6378		
Annual minimum one month	10.225	0.5475 1.3177	-0.2247 -4.5836	0.4015 6.3235	-2.7648	0.4094

Table 1 Continued. (b) Kitamaki (Precipitation)

Unit time	$\mu_1$ (mm)	$\lambda_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
One hour (t=3)	2.8125	0.6350 0.8432	-0.4313 -1.9410	0.4806 2.9156	-1.3122	0.2201
One hour (t=6)	2.3333	0.3325 1.7043	0.2751 -6.3795	0.2210 7.9886	-3.0680	0.3821
Six hours	16.233	2.0073 5.6980	-3.7130 -24.2921	1.9237 36.2399	-21.7729	4.6316
Twelve hours	28.481	2.2843 5.7157	-4.3666 -20.5618	2.2342 25.5007	-12.7880	2.3531
One day (Jun.)	13.957	0.0009 1.0433	0.9982 -2.7642	0.0005 2.8700	-0.6621	0.0459
One day (Sep.)	17.453	0.3119	-0.4679	1.1955	-0.2598	0.0159
Ten days (Jun.,Jul.)	47.087	0.1859 0.5137	0.6053 -0.6005	0.1125 1.0228	-0.2071	0.0131
Ten days (Sep.,Oct.)	44.825	0.2103 0.2455	0.5512 0.0942	0.1296 0.9469	-0.4140	0.0603
One month (May,Jun.,Jul.)	127.77	1.4853 2.5397	-2.4689 -7.8562	1.3477 8.8465	-3.7914	0.6222
One month (Aug.,Sep.,Oct.)	118.49	1.2376 2.4757	-1.8743 -8.8317	1.0822 11.5453	-5.6935	1.0094
Season (Spring)	242.17	5.5435	-11.7148	5.8593		
Season (Summer)	383.29	6.2769 8.4008	-13.3064 -20.6966	6.6541 14.7221	-3.0049	0.1914
Season (Fall)	300.93	3.9989 5.3050	-8.3009 -14.7329	4.1596 14.2842	-6.3103	1.3478
Season (Winter)	95.404	1.6149 3.7008	-2.7791 -12.5547	1.4890 14.4925	-6.3531	1.0101
Year	1026.3	13.9341	-29.4117	14.7059		
Annual minimum one month	14.114	1.4322	-2.3416	1.2902		

Table 1 Continued.  
(c) Nagakuboshinmachi (Precipitation)

Unit time	$\mu_1$ (mm)	$\lambda_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
One hour (t=3)	3.2317	0.2540 1.4670	0.4534 -4.3254	0.1612 4.4833		
One hour (t=6)	2.2167	0.4629 1.7041	-0.0263 -6.7823	0.3279 9.2975	-1.2599	0.1120
Six hours	17.271	0.4728 2.0510	-0.0495 -6.4762	0.3364 6.7268	-2.1178	0.2167
Twelve hours	29.690	2.0497 5.0432	-3.8135 -18.8138	1.9711 24.4105	-12.7477	2.4202
One day (Jun.)	17.087	0.2515 1.0205	0.4591 -3.1234	0.1593 3.9488	-1.3252	0.1439
One day (Sep.)	17.485	0.0209 0.8717	0.9578 -2.0238	0.0108 2.1752		
Ten days (Jun., Jul.)	54.654	0.3791 0.6424	0.1681 -0.8165	0.2582 1.0354	-0.1813	0.0103
Ten days (Sep., Oct.)	46.179	0.1946 0.3387	0.5861 -0.2159	0.1185 1.0580	-0.3560	0.0411
One month (May, Jun., Jul.)	143.09	2.2097 2.6924	-4.1911 -6.1962	2.1504 4.4014	-0.8254	0.0676
One month (Aug., Sep., Oct.)	125.59	1.3632 3.3018	-2.1761 -12.4793	1.2160 16.4159	-8.2211	1.4586
Season (Spring)	260.21	5.8871	-12.4625	6.2327		
Season (Summer)	445.36	8.4042	-17.8529	8.9266		
Season (Fall)	304.69	5.7446 6.0744	-12.1529 -13.3659	6.0781 7.4167	-0.4609	0.0062
Season (Winter)	106.57	3.3363 7.1313	-4.4887 -25.1234	2.2927 29.7169	-13.9439	2.3593
Year	1116.8					
Annual minimum one month	15.587	0.9175 2.1881	-1.1054 -7.5053	0.7525 9.1138	-3.8667	0.5741

Table 1 Continued.  
(d) Fukushima (Precipitation)

Unit time	$\mu_1$ (mm)	$\lambda_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
One day (Jun.)	26.483	-0.3689	1.7438	0.0019	-0.1118	0.0148
One day (Sep.)	17.376	0.0840 1.0108	0.8265 -3.4215	0.0465 4.3594	-1.4154	0.1434
Ten days (Jun.)	86.812	0.2304 1.0016	0.5065 -2.9998	0.1439 3.7418	-1.2141	0.1269
Ten days (Sep.)	73.424	0.6615 1.1745	-0.4942 -4.0268	0.5051 6.1838	-3.1071	0.5360
One month (Jun.)	266.57	2.6437 6.5292	-5.2068 -20.4223	2.6389 20.8507	-8.1227	1.1472
One month (Sep.)	229.88	1.7268 2.0928	-3.0462 -5.0106	1.6120 4.4618	-1.5029	0.2570
Season (Spring)	472.04	4.7177 21.7962	-9.9017 -66.8704	4.9553 68.3605	-27.7130	3.9628
Season (Summer)	702.23	7.4683	-15.8634	7.9320		
Season (Fall)	465.61	6.1149	-12.9561	6.4792		
Season (Winter)	194.35	2.4462 6.6393	-4.7461 -25.2595	2.4163 33.4780	-18.2014	3.6041
Year	1821.9	16.3901	-34.4828	17.2414		
Annual minimum one month	30.702	0.7820 1.3470	-0.7810 -4.1203	0.6193 5.4442	-2.4281	0.3898

Table 1 Continued.  
(e) Yabuhara (Precipitation)

Unit time	$\mu_1$ (mm)	$\lambda_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
One day (Jun.)	18.979	0.0965	-0.0117	1.0207	-0.2283	0.0136
One day (Sep.)	20.269	0.2451 1.1965	0.4734 -3.8461	0.1546 4.6550		0.1659
Ten days (Jun.)	89.344	0.2657 0.5616	0.4270 -0.9142	0.1698 1.4925	-0.4246	0.0415
Ten days (Sep.)	91.026	0.6324 0.9689	-0.4252 -1.9349	0.4783 2.0511	-0.5403	0.0552
One month (Jun.)	279.56	2.1739 7.4417	-4.1066 -27.5365	2.1102 34.3097	-16.9937	3.0060
One month (Sep.)	237.41	2.1161 3.2393	-3.9702 -8.9645	2.0453 8.3407	-2.8604	0.4030
Season (Spring)	437.96	4.2137	-8.7817	4.3983		
Season (Summer)	731.63	4.3296 8.7572	-9.0403 -23.3635	4.5267 19.1335	-5.3645	0.5133
Season (Fall)	478.82	7.2386	-15.3729	7.6868		
Season (Winter)	226.01	2.4180	-4.6800	2.3845		
Year	1887.0	11.2385	-23.8092	11.9046		
Annual minimum one month	33.338	0.4891 0.5950	-0.0875 -1.0214	0.3504 1.9676	-0.8878	0.1475

Table 1 Continued.  
(f) Ikuta (Discharge)

Unit time	$\mu_1$ (m <sup>3</sup> /s)	$\lambda_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
One hour (t=3)	91.462	1.3816 5.3392	-2.2202 -16.7213	1.2357 16.3439	-5.5587	0.6337
One hour (t=6)	143.32	0.8179 3.2833	-0.8669 -11.8189	0.6541 13.6443	-5.4391	0.7288
Six hours	101.73	1.2703 4.3251	-1.9530 -14.0038	1.1169 14.3828	-5.1727	0.6320
Twelve hours	133.39	1.0220 3.3314	-1.3563 -11.2596	0.8581 12.3214	-4.6869	0.6079

Table 1 Continued. (g) Kuissege (Discharge)

Unit time	$\mu_1$ (m <sup>3</sup> /s)	$\lambda_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
One hour (t=3)	102.79	2.3630 9.4826	-4.5513 -30.2015	2.3227 30.9764		
One hour (t=6)	146.44	1.7694 4.9807	-3.1478 -15.4048	1.6591 15.1418	-11.9780 -5.2956	1.6040 0.6389
Six hours	109.73	2.3496 7.4520	-4.5199 -22.7594	2.3076 22.0614		
Twelve hours	151.36	1.4718 3.5445	-2.4365 -10.3555	1.3330 9.6039	-7.8105 -2.9653	0.9517 0.3113
One day (Jun.15)	88.67	0.1793	-0.6125	1.7093	-0.4232	0.0288
One day (Jun.)	75.35	0.3825	-0.4696	1.0036	-0.1778	0.0087
One day (Sep.15)	63.03	0.3434 2.8904	0.2503 -9.5092	0.2296 9.5451		
One day (Sep.)	83.79	0.1225	0.4112	0.3762	-0.0474	0.0015
Ten days (Jun., Jul.)	77.97	0.6807 2.2217	-0.5398 -6.7717	0.5230 6.8226		
Ten days (Sep., Oct.)	77.85	0.5230 2.1165	-0.1671 -6.2471	0.3799 6.0269	-1.7166	0.1575
One month (May, Jun., Jul.)	70.67	2.1274 5.8644	-3.9970 -22.1816	2.0581 28.9042	-15.1579	2.8710
One month (Aug., Sep., Oct.)	69.61	1.0436 3.4104	-1.4082 -11.7709	0.8802 13.2025	-5.2104	0.7036
Year	57.38	8.8828	-18.8652	9.4327		
Annual maximum one day	617.35	0.7207 4.8552	-0.6350 -20.5948	0.5607 27.2942	-12.8845	2.0212
Annual maximum one month	121.49	5.1808 8.3025	-10.9216 -21.9076	5.4636 17.6368	-4.7966	0.4520
Annual minimum one day	16.44	2.4040	-4.6474	2.3689		
Annual minimum one month	26.65	7.5888	-16.1204	8.0604		

Table 1 Continued. (h) Tategahana (Discharge)

Unit time	$\mu_1$ (m <sup>3</sup> /s)	$\lambda_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
One hour (t=3)	416.47	2.2716 6.0428	-4.3367 -19.2719	2.2199 20.0108		
One hour (t=6)	509.07	1.9165 5.4364	-3.4976 -18.6382	1.8224 21.1599	-7.8442 -9.2111	1.0994 1.4326
Six hours	427.97	2.2843 6.0539	-4.3666 -19.3840	2.2342 20.2523		
Twelve hours	502.12	2.1048 5.3702	-3.9435 -18.4658	2.0327 21.3763	-8.0178 -9.6993	1.1375 1.6014
One day (Jun.15)	292.80	0.2451 4.7554	0.4734 -17.4528	0.1546 18.8907		
One day (Jun.)	281.66	0.2566 1.9326	0.4476 -4.9578	0.1631 4.0967	-6.5960 -0.8429	0.7340 0.0524
One day (Sep.15)	262.08	1.2985 10.3590	-2.0206 -36.6045	1.1467 41.2519		
One day (Sep.)	292.93	0.2527 2.0297	0.4563 -5.3626	0.1602 4.5049	-17.3492 -0.9688	2.4714 0.0634
Ten days (Jun., Jul.)	330.69	1.4066 6.5988	-2.2802 -24.1617	1.2626 28.5303	-12.6185	1.9173
Ten days (Sep., Oct.)	267.72	1.4718 5.3824	-2.4365 -17.4905	1.3330 18.0027	-6.6338	0.8329
One month (May, Jun., Jul.)	299.29	3.5162 12.2590	-7.2112 -41.8790	3.6205 48.6833		
One month (Aug., Sep., Oct.)	248.17	2.6116	-5.1321	2.6028	-23.1788	4.0367
Year	229.47					
Annual maximum one day	1550.6	2.7440 11.1695	-5.4397 -40.8823	2.7520 50.7916	-25.5952	4.6312
Annual maximum one month	432.89	15.8323	-33.3333	16.6667		
Annual minimum one day	101.71	12.4417	-26.3157	13.1578		
Annual minimum one month	124.56	16.3901	-34.4828	17.2414		

Table 1 Continued.  
(i) Koichi (Discharge)

Unit time	$\mu_1$ (m <sup>3</sup> /s)	$\lambda_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
One day (Jun.15)	171.65	0.2553 2.2066	0.4505 -8.2015	0.1621 9.5071		0.3842
One day (Jun.)	163.65	0.1191 1.3061	0.7513 -3.1100	0.0682 2.7464	-0.5401	0.0317
One day (Sep.15)	125.62	1.4718 8.2457	-2.4365 -26.3585	1.3330 26.4132	-9.5282	1.1529
One day (Sep.)	151.05	0.2103 1.4564	0.5512 -3.5185	0.1296 3.0308	-0.6074	0.0367
Ten days (Jun.,Jul.)	191.39	1.0839 4.9210	-1.5050 -18.0441	0.9216 21.0937	-8.9227	1.2805
Ten days (Sep.,Oct.)	135.72	1.9165 7.1662	-3.4976 -23.2182	1.8224 24.0639	-9.2338	1.2220
One month (May,Jun.,Jul.)	175.15	2.8695 10.4144	-5.7302 -36.2843	2.8935 43.1730	-21.0825	3.7781
One month (Aug.,Sep.,Oct.)	128.12	3.2427 12.5171	-6.5881 -46.1385	3.3136 57.9593	-29.6939	5.4647
Year	130.29	8.5478	-18.1781	9.0892		
Annual maximum one day	886.58	3.3621	-6.8606	3.4476		
Annual maximum one month	248.45	7.2386	-15.3728	7.6868		
Annual minimum one day	47.524	10.4792	-22.2216	11.1108		
Annual minimum one month	64.501	18.3749	-38.4615	19.2307		

することが難しいが、 $m_4 < 2$  のとき存在しない場合が多い。

4) 4モーメント適合のラグランジュ乗数も正負交互に現われることが多く、当然 $\lambda_4 > 0$ の収束条件を満足している。正負交互の並びが乱れる場合 $m_4 > 10$ となっているが、この条件下でそれを保持している場合も多数存在する。

#### 4.2 頻度図と MEP 分布

図2に頻度図と MEP 分布を示す。ここでは紙面の都合上、古谷(降水量)のみに留めるが、他の場合も同様な傾向を持つ。この図より次のことが読み取れる。

1) 頻度図と時間単位をみると、時間、日、旬単位ではピークが左寄りになり右に長く尾を引く形状となるが、月、季節、年になるに従い頻度図のピークが右に移り左右対称に近づく。これは従来からの知見に一致する。頻度図の中には、ピークが2つあったり、明確なピークが見られなかったりする場合があり、連続性のとぎれることが多い。

2) 全般的には、2モーメント適合から4モーメント適合になると適合度は大きく改善される。すなわち、ひずみ度、とがり度の情報が有効に作用していることがわかる。

3) 2モーメント適合はなめらかな形状を示し、頻度図より偏平になる場合が多い。

4) 4モーメント適合は、頻度図のピークに分布形のピークが近づき、頻度図のピークが2つ現われる場合(理論的に証明可)、長く尾を引く場合も説明できる。しかし、原点から離れた頻度図に対して得られない場合が多い。

5) 4モーメント適合が得られないとき、2モーメント適合の分布形は頻度図の傾向をよく説明し、ピークが明確で正規分布に近い形をとっている。一方、 $m_2 > 2$ で2モーメント適合が存在しないとき4モーメント適合の分布形は指数分布に近い形となっているが、 $m_2 = 1$ で2モーメント適合が得られないとき4モーメント適合も得られなかった。

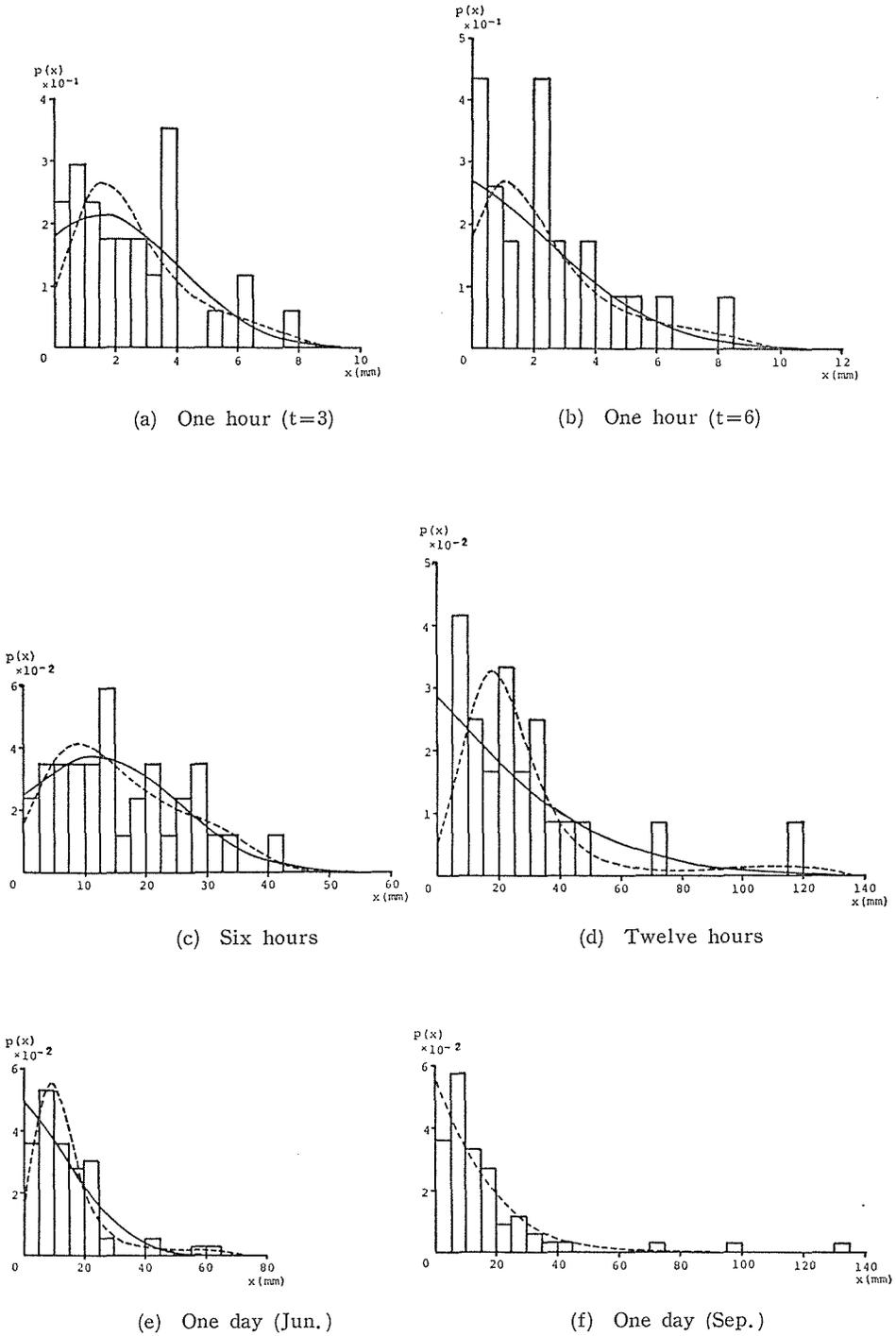
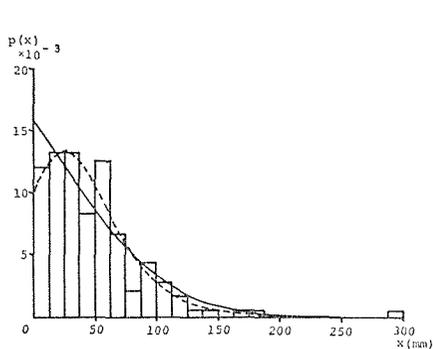
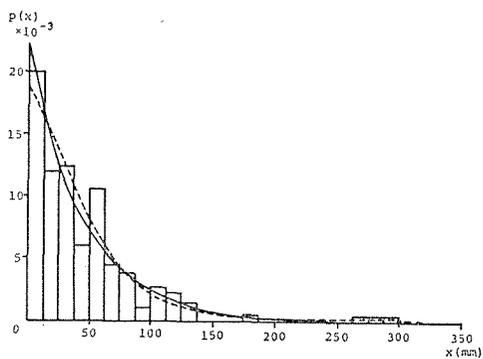


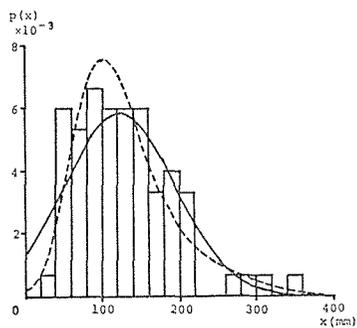
Fig. 2 Histograms and their MEP distributions with two moments (—) and four moments (-----).



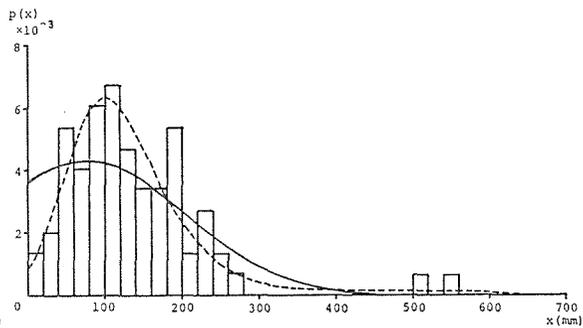
(g) Ten days (Jun., Jul.)



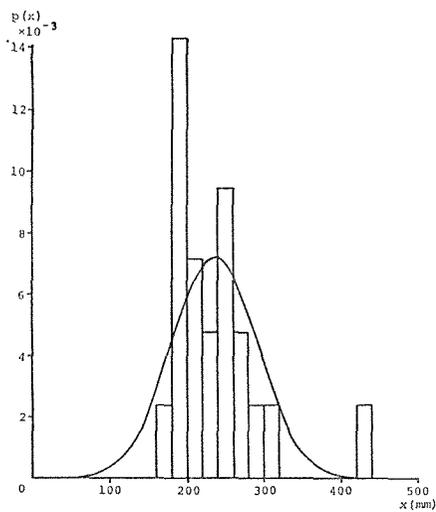
(h) Ten days (Sep., Oct.)



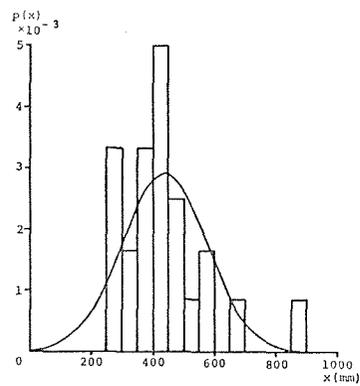
(i) One month (May, Jun., Jul.)



(j) One month (Aug., Sep., Oct.)



(k) Season (Spring)



(l) Season (Summer)

Fig. 2 Continued.

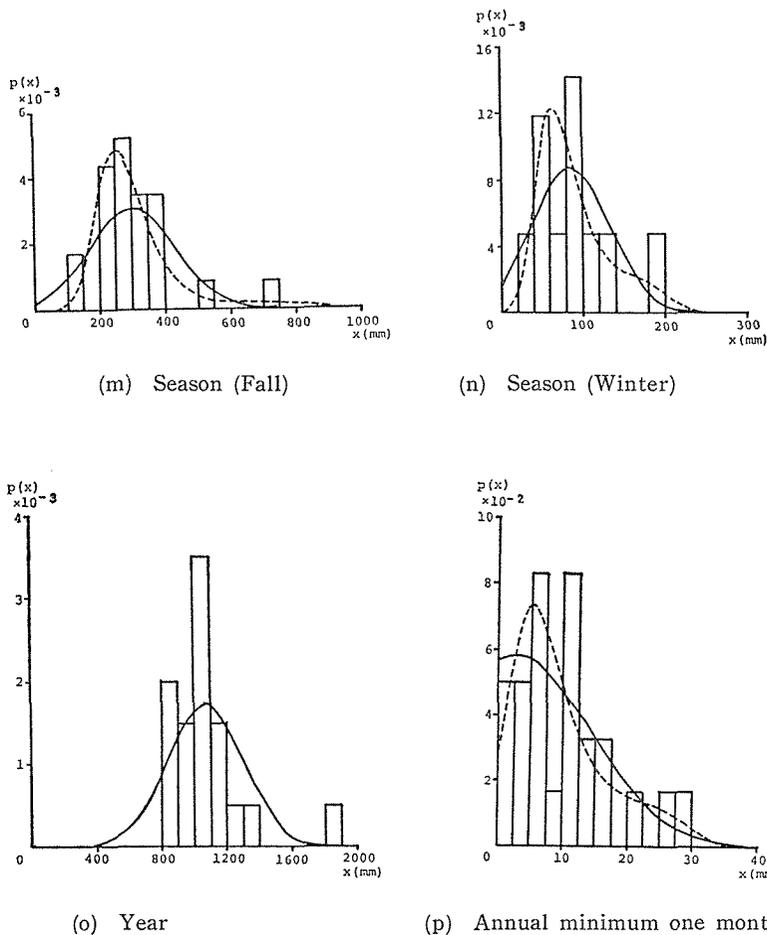


Fig. 2 Continued.

## 5 結 語

ここでは1変数MEP分布の水流量への適用性を採用するモーメントとの関連において明らかにした。その結果を要約すると次のようになる。

1) 1変数MEP分布は、全般的に時間単位の増大に伴い指数型から正規型へと移行する種々の頻度図をよく説明し得る。

2) 2モーメント適合は頻度図より偏平になる場合が多いが、4モーメント適合になると適合度は大きく改善され、特殊な形状をもつ頻度図にもよく合致する。

水流量が示すような分布を考えると、理論分布を母集団とした検討から、さらに高次モーメントを水流量から得られる情報として取り入れても適合度の改善はわずかであることが明らかにされている<sup>12)</sup>。さらに、高次モーメントがもつ誤差の影響を考えると水文頻

度分析には4モーメント適合が妥当と思われる。

本稿より、従来データの種類により採用する分布形を変更していた水文頻度分析が、4モーメント適合より統一して論じられることが可能となり、この分布がもつ思想的妥当性とともにもつ意義は大きい。2変数及び多変数 MEP 分布の水文量への適用性の検討については、今後の課題として残されているが、1変数の場合と同様な結果となることが推察される。

最後に、MEP 分布は水文頻度分析のみならず、例えば原子炉雑音への適用例もあり<sup>13)</sup>、確率密度関数が要求される分野で広く利用され得るものであることを付記する。

なお、計算にあたって、信州大学データステーションを経由して東京大学大型計算機センター HITAC M-200H, M-280H を使用した。

## 参 考 文 献

- 1) Sonuga, J. O.: Principle of maximum entropy in hydrologic frequency analysis; Journal of Hydrology, Vol. 17, 177~191 (1972).
- 2) 寒川典昭, 荒木正夫: 水文学事象の頻度分析への MEP 導入について; 土木学会論文報告集, 第335号, 89~95 (1983).
- 3) 寒川典昭, 荒木正夫, 寺島彰: 2変数 MEP 分布とその特性に関する研究; 水理講演会論文報告集, 第28回, 397~402 (1984).
- 4) 寒川典昭, 荒木正夫: 多変数 MEP 分布の理論式について; 土木学会年次学術講演会講演概要集, 第39回, II-60, 119~120 (1984).
- 5) 荒木正夫, 寒川典昭, 佐藤健次: 多変数 MEP 分布の諸特性; 土木学会中部支部研究発表会講演概要集, II-6, 94~95 (1985).
- 6) 例えば, 高棹琢馬, 池淵周一: エントロピー的にみた降雨・流出変換特性とそのモデル化; 京都大学防災研究所年報, 第23号, B-2, 193~209 (1980).
- 7) 例えば, 甘利俊一: 情報理論, 141~142, ダイヤモンド社 (1970).
- 8) Campenhout, J. M. and Cover, T. M.: Maximum Entropy and Conditional Probability; IEEE Transactions on Information Theory, Vol. IT-27, No. 4, 483~489 (1981).
- 9) Jowitt, P. W.: The extreme-value type-1 distribution and the principle of maximum entropy; Journal of Hydrology, Vol. 42, 23~38 (1979).
- 10) 例えば, 江藤剛治: 降水量時系列の解析; 土木学会誌, 第63巻, 第3号, 78~83 (1978).
- 11) 前出2)
- 12) Eitner, J. M.: On the existence of a class of maximum-entropy probability density function; IEEE Transactions on information theory, Vol. IT-23, No. 6, 772~775 (1977).
- 13) 黒田義輝, 横田勝弘: 最大エントロピー法による確率密度関数の推定法; 計測自動制御学会論文集, 第18巻, 第1号, 15~22 (1982).