

## 多変数系のデジタルシミュレーションと同定法

坂口博己\* 何 同徳\*\* 松山 潔\*\*\*

(昭和57年10月30日 受理)

### Methods of Digital Simulation and Parameter Estimation for Multivariable Systems

Hiromi SAKAGUCHI, He TONG-DE, and Kiyoshi MATSUYAMA

For multivariable systems are proposed new practical methods of digital simulation and of parameter estimation, and an experimental test for error was made on the latter method; the former method is based on an application of the  $I(z)$  transformation already reported and the latter uses the least-squares method applied on each scalar equation in the vector differential equations by which a system is modeled. The parameter estimation is available when systems can roughly be grasped in their physical structures and can be driven by some input test signals. The experimental test was carried out on digitally-simulated systems whose implementation was conveniently realized by use of the digital simulation method. The parameter estimation accuracy is dependent entirely on the overall spectral characteristic of test signals. In order to yield good accuracy, it is desired for signals to be flat in the related frequency region so that all characteristic responses may appear in outputs. The inputs can be definite signals consisting of simple wave forms, such as step functions and short time sinusoidal waves, which are weighted by the time length for transient response analysis. The present experiment has concluded the parameter estimation error to be within one percent.

#### 1 ま え が き

現代制御論を実際問題に適用するとき、制御対象のモデル化とそのパラメータの決定がまず問題となる。近年、多変数系の同定に関する研究も盛んになり、成書でも解説されているが<sup>1)</sup>、多くは1入力系の取扱いが主で、多入力系も基本的には1入力系の同定技法が適用できるような構造変換によって成されているようである。多変数系の同定の実際に関

\* 精密工学教室 助教授

\*\* 中華人民共和国留学生(国営西南曙光機械廠)

\*\*\*精密工学教室 教授

してはまだ多くの課題が残されている。

本論文は多変数系のパラメータ推定に対して新たな実用的方法を提案するものである。これは、系を状態ベクトル微分方程式でモデル化し、その中の各々のスカラー方程式に対して、そこに含まれるパラメータ(行マトリクス要素)を最小2乗法を適用して推定する方法である。このようにして行われる同定法は、系の物理的構造がある程度知られ、試験信号により系の固有応答をすべて出力に現わされる場合に実行可能である。パラメータの推定精度は、いくつかの試験信号の総合周波数特性に依存する。すなわち、所望周波数領域でフラットとなる必要がある。このような入力、ステップ関数と短時間正弦波のような単純な波形から或る確定信号でよい。それら各々のスペクトルは、系の過渡応答の分析時間長を平均時間として算定される。

本論文の最初では、多変数系のデジタルシミュレーションに対する有用な技法を導入する。これは既報の  $I(z)$  変換の1つの応用であり本論文での同定法の実験的検討に活用される。

## 2 多変数系のデジタル処理

多変数系のデジタルシミュレーションに対して新たな技法を適用する。まず、その手法の概要について論ずる。この方法は  $I(z)$  変換法に基づくもので、本方法の発想の原理、応用範囲、変換の理論精度および実現精度などについてはすでに報告してきた<sup>2)3)4)</sup>。これは、各種デジタルフィルタ(1次元、2次元)の設計その他一般に、線形、非定常、非線形の常微分、偏微分方程式およびベクトル微分方程式等々の数値的求解手段として適用可能である。ただ、本法の具体的手順の詳述とか適用事例については、精度的検討の供試モデル以外報告例は少ない。本章では、多変数制御系の同定問題の検討に供する一つの応用事例として、 $I(z)$  変換法による離散値状態方程式の導出とそれに基づく演算結果について報告する。

### 2.1 離散値状態方程式

次の  $n$  次元状態方程式を取扱う。

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad (1)$$

ここで、 $A$ 、 $B$  は各々  $n \times n$ 、 $n \times m$  の係数マトリクスである。なお、時間領域を適当に分割して考えるとき、系の線形、非線形、時変、時不変を問わず式(1)の形でその系の状態を表現することができる。このとき、 $A$ 、 $B$  は時間  $t$ 、あるいは状態  $x$  により変化するマトリクスとなる<sup>4)</sup>。

式(1)の離散値状態方程式は通常次のように与えられている。

$$x(n+1T) = \Phi(T)x(nT) + \Psi(T)u(nT). \quad (2)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \Phi(T) &= \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] \\ \Psi(T) &= \int_0^T \Phi(T-r)B dr. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式(2)は式(1)の解析解をもとに、これを差分表示することにより得られるもので、式(3)の係数マトリクスの算定は高次多入力系となると容易でない場合が多い。ここでは、離散値状態方程式を $z$ 変換法の観点から簡潔に導く手順を示す。まず、準備として、式(1)をラプラス変換する。すなわち、

$$sX(s) = AX(s) + BU(s). \quad (4)$$

これより次式のマトリクス伝達関数が得られる。

$$G(s) = (sI - A)^{-1}B. \quad (5)$$

### 2.1.1 標準 $z$ 変換法の拡張による方法

式(5)はマトリクス伝達関数であるが、標準の $z$ 変換の過程を適用する時点で、式(5)を形式的にスカラー伝達関数として扱い $z$ 変換することが可能である<sup>4)5)</sup>。すなわち $I$ 、 $A$ 、 $B$ を、数 $1$ 、 $A$ 、 $B$ と対応させ、 $z$ 変換後再びそれらをマトリクスとして扱う方法が提案される。このようにして得られたマトリクスパルス伝達関数は次式のようになる。

$$G(z) = [I - z^{-1}e^{AT}]^{-1}B. \quad (6)$$

ちなみに、式(2)を $z$ 変換して得られるマトリクスパルス伝達関数の固有値と式(6)のそれを比較すると全く等しい。又式(6)から得られる離散値状態方程式と式(2)に基づく数値計算結果は1サンプリング時間程度の位相誤差を無視すれば両者は全く一致する。しかしながら、式(6)は形式的に簡単に導けるという長所を有するが、係数マトリクスの算定段階では式(2)の適用の場合と大差ない。

### 2.1.2 $I(z)$ 変換法による方法

本方法は次に示すように写像に基づく $z$ 変換法で、 $G(z)$ の誘導は単純代入操作によって成される。すなわち、

$$G(z) = G(s) \Big|_{s=1/I(z)} = (sI - A)^{-1}B \Big|_{s=1/I(z)}, \quad (7)$$

ここで $I(z)$ は次のいずれかを用いる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{T}{1 - z^{-1}}, \quad \frac{Tz^{-1}}{1 - z^{-1}}, \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{T}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}, \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{T}{3} \frac{1 + 4z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-2}}. \end{array} \right. \quad (10)$$

ただし、式(10)の適用に対しては安定化の前処理を必要とする<sup>4)</sup>。

### 2.1.3 離散値状態方程式の導出

式(6)、(7)のようにパルス伝達関数 $G(z)$ が与えられると以下の手順に従って離散値状態方程式が得られる。

入出力のベクトル時系列を  $u(n)$ ,  $x(n)$ , それらの  $z$  変換を各々  $U(z)$ ,  $X(z)$  と表記すると,

$$X(z) = G(z)U(z). \quad (11)$$

さて, ここで  $z$  を, 複素変数としての取扱いから離れ, 次式で示す作用をもつタイムシフトオペレータとして定義する. すなわち,

$$z^{\pm m}x(n) = x(n \pm m), \quad \text{ただし } x(n) = x(t) \Big|_{t=nT}. \quad (12)$$

このとき,  $G(z)$  はオペレータ関数として扱われ,  $U(z)$ ,  $X(z)$  をベクトル時系列に対応させることにより, 式(11)より直接時間領域の表現に変換することができる. すなわち,

$$x(n) = G(z)u(n) \quad (13)$$

$G(z)$  は一般に  $z$  の有理多項式となるので式(13)に式(12)で示すオペレータの作用を適用することにより離散値状態方程式が容易に導かれる. ここで,  $I(z)$  として特に実用性に富む式(9)に基づく場合を例として上記の演算の手順を詳述する.

式(9)による式(7)の  $G(z)$  を式(13)に適用することにより次式が得られる.

$$x(n) = \left[ \frac{1-z^{-1}}{(T/2)(1+z^{-1})} I - A \right]^{-1} B u(n). \quad (14)$$

両辺に行列  $\left[ \frac{1-z^{-1}}{(T/2)(1+z^{-1})} I - A \right]$  をかけて整理すると,

$$\left[ (1-z^{-1})I - \frac{T}{2}(1+z^{-1})A \right] x(n) = \frac{T}{2}(1+z^{-1})B u(n) \quad (15)$$

が得られる.  $z$  は時間に作用させるオペレータとして扱っているから式(15)は更に

$$\left( I - \frac{T}{2}A \right) x(n) - \left( I + \frac{T}{2}A \right) x(n-1) = \frac{T}{2}B \{ u(n) + u(n-1) \} \quad (16)$$

となる. これより次式が得られる.

$$\begin{aligned} x(n) &= \left( I - \frac{T}{2}A \right)^{-1} \left( I + \frac{T}{2}A \right) x(n-1) \\ &\quad + \frac{T}{2} \left( I - \frac{T}{2}A \right)^{-1} B \{ u(n) + u(n-1) \}. \end{aligned} \quad (17)$$

## 2.2 供試モデル

多変数系のデジタル処理および次章での同定法の検証に供する具体モデルとして, 分巻式直流モータの回転制御系を考える. ただし実際のモータでは, 計測困難な未知要素が多いことと動作現象の再現性に乏しいことから検証には適さない. そこで, 制御対象の物理的構造を考慮して解析による数学モデルをつくる. このモデルのパラメータを試行錯誤

で変化させ汎用アナログコンピュータでシミュレートする。この結果と実際のモータの運動とを比較検討することにより、いくつかのパラメータの概略値を把握する。種々の動作現象とそれに対するパラメータの概略値を考慮して、検証のための数学的供試モデルを構成する。以下にそのモデルを示す。

モータの運動方程式は次のように与えられる。

$$L_f \dot{I}_f + r_f I_f + M_{fa} I_a = u_f, \quad (18)$$

$$L_a \dot{I}_a + r_a I_a + M_{af} I_f + k_f I_f \omega = u_a, \quad (19)$$

$$J \dot{\omega} = k_1 I_f I_a - \gamma \omega - T_L. \quad (20)$$

ここで、 $L_f$ : 界磁回路の自己インダクタンス、 $I_f$ : 励磁電流、 $r_f$ : 励磁回路の抵抗、 $M_{fa}$ 、 $M_{af}$ : 励磁コイルと電機子コイルの相互インダクタンス、 $L_a$ : 電機子回路のインダクタンス、 $I_a$ : 電機子電流、 $r_a$ : 電機子回路の抵抗、 $u_f$ : 励磁電圧、 $u_a$ : 電機子端電圧、 $J$ : 電機子および負荷の慣性モーメント、 $k_f$ 、 $k_1$ : モータの構造により決まる定数、 $\gamma$ : 摩擦定数、 $\omega$ : モータの回転角速度、 $T_L$ : 負荷トルク。

上の運動方程式は非線形であるので、ある回転数近傍で線形化するために以下の変数変換をする。すなわち

$$\begin{aligned} I_f &= I_{f0} + x_1, & I_a &= I_{a0} + x_2, & \omega &= \omega_0 + x_3, & u_f &= u_{f0} + u_1, & u_a &= u_{a0} + u_2, \\ T_L &= T_{L0} + u_3. \end{aligned}$$

これらを原方程式に代入することにより、変化分に対して次の状態方程式が得られる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= -r_f/L_f, & a_{12} &= -M_{fa}/L_f, & a_{13} &= 0, \\ a_{21} &= -(M_{af} + k_f \omega_0)/L_a, & a_{22} &= -r_a/L_a, & a_{23} &= -k_f I_{f0}/L_a, \\ a_{31} &= k_1 I_{a0}/J, & a_{32} &= k_1 I_{f0}/J, & a_{33} &= -\gamma/J, \\ b_{11} &= 1/L_f, & b_{22} &= 1/L_a, & b_{33} &= -1/J, \\ b_{12} &= b_{13} = b_{21} = b_{23} = b_{31} = b_{32} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

### 2.2.1 デジタルシミュレーション

上記のようにモデルが定まり、適宜パラメータの値および入力を与えられると、式(17)により供試系のシミュレーションを実行することができる。種々のパラメータに対して、アナログコンピュータ(日立、ALS 505)型による演算解と式(17)による演算解とは良好な一致を示した。後述の同定法の検討の準備として、系の固有応答の概略を把握するため、入力をすべてステップ入力としたときのデジタルおよびアナログシミュレーションの1

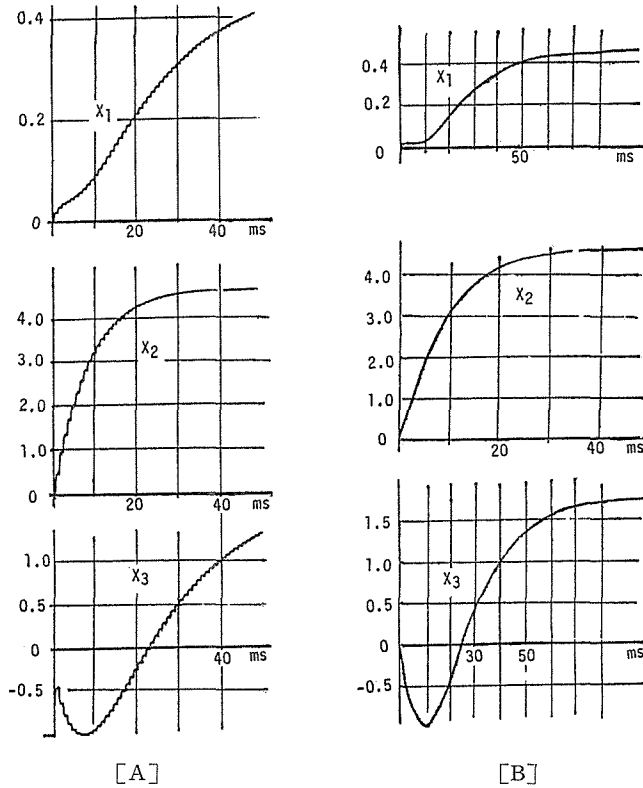


Fig. 1 An example of comparison between analog and digital simulations for the model shown in Eq. (21). [A]: digital simulation; [B]: analog simulation.

例を図1に示す。なお、後の同定の検証において、本デジタルシミュレーションの定量的な精度も明らかになる。

### 3 多変数系の同定法について

多入力多変数系の同定に関して、一つの実用的方法を提示する。同定のための数学モデルはシステムの状態方程式(1)を直接適用する。原理は、確定入力  $u$  により系を駆動し、観測される状態変数の値から  $A$ ,  $B$  の要素を行毎に最小2乗推定するというものである。入力  $u$  は各々要素が有するスペクトルの総合特性が必要周波数領域でフラットとみなせるような単純確定信号を選ばよ。具体的には、短時間でのステップ入力、正弦波入力の組合せで十分である。各々の入力のスペクトルは最小2乗法を適用するときの分析時間長を積分時間として算定されたものである。

さて、式(1)を次のように具体表記する。

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1j} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{ij} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{nj} & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{1k} & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{ik} & b_{im} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{nk} & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}. \quad (23)$$

このとき,

$$\begin{aligned} x_i &= a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_i + \cdots + a_{in}x_n \\ &+ b_{i1}u_1 + \cdots + b_{ik}u_k + \cdots + b_{im}u_m. \end{aligned} \quad (24)$$

確定入力  $u_1(t) \sim u_m(t)$  に対して系の応答  $\hat{x}_i(t)$ ,  $x_1(t) \sim x_n(t)$  が誤差なく観測されるとすれば,  $m+n$  個の時点での観測値に対して式(24)を連立させて解けば原理的に  $m+n$  個の未知パラメータ  $a_{i1} \sim a_{in}$ ,  $b_{i1} \sim b_{im}$  が求められるはずであるが, 実際には誤差, 外乱を伴うのでこれは実現不可能である. 従って,  $m+n$  個以上の観測データからの平均値として未知パラメータを推定する. このための方法として, 最小2乗法を適用する. 式(24)において,  $l$  個の時点における各観測データを次のようにベクトル表示する. ただし,  $l > m+n$  とする.

$$\hat{\mathbf{x}}_{di} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{i1} \\ \hat{x}_{i2} \\ \vdots \\ \hat{x}_{il} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{il} \end{bmatrix} \quad i=1 \sim n, \quad \mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} u_{k1} \\ u_{k2} \\ \vdots \\ u_{kl} \end{bmatrix} \quad k=1 \sim m. \quad (25)$$

このとき,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{x}$  の各要素の  $l$  個のデータに関して式(23)は次のように表わせる.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{di} &= a_{i1}\mathbf{x}_1 + a_{i2}\mathbf{x}_2 + \cdots + a_{in}\mathbf{x}_n + b_{i1}\mathbf{u}_1 + b_{i2}\mathbf{u}_2 + \cdots + b_{im}\mathbf{u}_m, \\ &i=1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (26)$$

$\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$  の線形結合で表わせる  $\hat{\mathbf{x}}_{di}$  と実際の応答から測定される  $\mathbf{x}_{di} = [\hat{x}_{i1} \hat{x}_{i2} \cdots \hat{x}_{il}]^T$  とは一般には等しくならない. そこで, 次の評価関数  $J$  を最小とするように未知パラメータを推定する方法が考えられる.

$$J = (\mathbf{x}_{di} - \hat{\mathbf{x}}_{di})^2, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (27)$$

式(27)の最小化問題は以下のようにして解かれる. すなわち, ベクトル  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$  の張る空間  $\mathbf{R}$  上のベクトル  $\hat{\mathbf{x}}_{di}$  と  $\mathbf{x}_{di} \in \mathbf{R}$  の距離を最小化すればよい. そのためには, ベクトル  $\mathbf{h} = \mathbf{x}_{di} - \hat{\mathbf{x}}_{di}$  ( $\mathbf{x}_{di}$  は固定) が  $\hat{\mathbf{x}}_{di}$  と直交するように未知係数  $a_{i1}, \dots, a_{in}, \dots, b_{i1}, \dots, b_{im}$  を決定すればよい. その計算法は, ベクトル  $\mathbf{h}$  が  $\mathbf{R}$  の基礎ベクトル  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$  の各々と直交する条件式を解くことである.

すなわち,

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{h}, \mathbf{x}_i) &= 0 \quad i=1, \dots, n \\ (\mathbf{h}, \mathbf{u}_k) &= 0 \quad k=1, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

ここで,  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  は  $\mathbf{p}$  と  $\mathbf{q}$  の内積を表わす.  $\mathbf{h}$  に式(26)を代入し内積の算法に従って式(27)を展開すると次式が得られる.

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{x}_{di}, \mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ (\mathbf{x}_{di}, \mathbf{x}_n) \\ (\mathbf{x}_{di}, \mathbf{u}_1) \\ \vdots \\ (\mathbf{x}_{di}, \mathbf{u}_m) \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \\ b_{i1} \\ \vdots \\ b_{im} \end{pmatrix} \quad i = 1, \dots, n. \quad (28)$$

ここで,

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \cdots (\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1)(\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_1) \cdots (\mathbf{u}_m, \mathbf{x}_1) \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) \cdots (\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_2)(\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_2) \cdots (\mathbf{u}_m, \mathbf{x}_2) \\ \vdots \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n)(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_n) \cdots (\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n)(\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_n) \cdots (\mathbf{u}_m, \mathbf{x}_n) \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1)(\mathbf{x}_2, \mathbf{u}_1) \cdots (\mathbf{x}_n, \mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) \cdots (\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_1) \\ \vdots \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_m)(\mathbf{x}_2, \mathbf{u}_m) \cdots (\mathbf{x}_n, \mathbf{u}_m)(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_m) \cdots (\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m) \end{pmatrix}. \quad (29)$$

式(28)の正規方程式を解くことにより未知係数が求まる.

### 3.1 同定の理論精度の考察

同定の精度は①入力  $\mathbf{u}$  の選定と分析 (観測) 時間長および②混入雑音の大きさに左右される. ①については4章の実験的考察で述べる. ②については, 雑音の形態や大きさが元来不明確であるため検証が困難であるので, ここでは各状態変数の平均パワーに比べて雑音のそれは十分小さいものとする. 式(29)のグラムの行列は, 式(26)で  $i = 1 \sim n$  まで各各独立に係数推定をするときに共通に用いられる. そして, その要素は  $\mathbf{u}, \mathbf{x}$  各々の平均パワーとクロス平均パワーから成り立っている.  $\mathbf{x}$  の要素は各々系の固有応答のいくつかを持っておりお互に相関をもつ. 又式(26)のモデルで付加雑音を考慮してもそれと  $\mathbf{x}$  との相関は小さいと考えられる. 従って,  $\mathbf{x}, \mathbf{u}$  の要素の平均パワーは雑音のそれより強調されることが予測される. なお, 本方法と形式的に類似な方法として, 一入力系ではあるが, パルス伝達関数を次のように推定した Kalman の研究<sup>6)</sup>がある. すなわち,  $v_k$  を内部雑音として, まず

$$x_k = G(z^{-1})u_k + v_k \quad (30)$$

なるモデルを考えている. 次に

$$G(z^{-1}) = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \cdots + q_m z^{-m}}{1 + p_1 z^{-1} + \cdots + p_n z^{-n}} \quad (31)$$

とおくと, 式(30)より次式が得られる.

$$x_k = -p_1 x_{k-1} - \cdots - p_n x_{k-n} + q_1 u_{k-1} + \cdots + q_m u_{k+m} + P(z^{-1})v_k. \quad (32)$$

この式をモデルとして未知パラメータを最小2乗推定している. この方法は雑音項  $P(z^{-1})v_k$  [  $z^{-1}$  はすべてタイムシフトオペレータとして扱っている ] が  $x_{k-1}, \dots, x_{k-n}$  と相関をもつため推定値に偏りをもつ難点があるといわれている. 又, この難点を解消するモデルとして, 系のインパルス応答を基礎とするたたみ込み積分とノイズ形成過程を組み合わせたモデルも考えられている<sup>7)</sup>. これも, 形式的に式(32)の Kalman のモデルと同様であるが, 混



入雑音が白色化されている。すなわち、系の内部雑音は白色雑音源が未知の系  $N(z^{-1})$  を通過して形成されたものとみなし  $N(z^{-1})$  の内容を同定すべき本来の系に組み入れている。このモデルで総合未知係数を最小 2 乗推定し、その後、系のインパルス応答とノイズ形成過程  $N(z^{-1})$  との関係を利用して前者を分離する方法である。この方法も当然一入力系を対象としているもので、2 次系の供試モデルに対しシミュレーションにより推定精度を検討し良い結果を得ているが高次系の場合、観測出力に与える未知系数の感度の観点から、推定および分離精度がかなり厳しくなると考えられる。又、この方法の多入力系への適用は更にむずかしくなると思われる。

さて、本論文での同定モデルである式(26)は Kalman のモデルで指摘されるような難点はないが、雑音に対する影響が十分軽減されるわけではない。持続雑音の影響を軽減させるためには、観測時間長を長くすることが一つの方法であるが、この場合、確定入力  $u$  がステップ、あるいは正弦波ではそれらの有するスペクトル帯域が限定されるので、短周期の  $M$  系列信号の適用が考えられる。

## 4 実験的考察

本論文での同定法を以下の方法で実験的に検討する。まず、同定精度に関係する基本要素となる正規方程式(28)の係数について、スペクトル情報的観点から考察を加える。これは試験信号入力と分析時間長とが同定精度を左右する究極的要素となることを示すものである。次に、入力と分析時間長の種々の組合せに対して、デジタルシミュレーションによる供試系で、パラメータの推定精度を定量的に考察する。すなわち、式(21)のモデルに対して、数組のパラメータを設定し、式(17)を適用してデジタルシミュレーションを行う。次に、その演算結果を系の観測データとして、逆に供試系のパラメータを、3章の同定法に従って推定する。これらの推定値を当初の設定値と比較し検討する。

実験のねらいは、本同定法の理論的発想の是非を考察する目的と、混入雑音に対する抑制効果を確認する目的とがある。後者については、理論的に種々の擬似雑音を付加して実験することが可能であるが、その雑音の特性と現実の雑音とは、有限時間長では、かなり差がある。従って雑音の抑制効果の定量的評価に対しては、まだ多くの課題が残されているので、今回この問題には触れないこととする。本同定法は、式(28), (29)からも分るように、状態変数相互および入力との相関性に着目した方法であるので、それらの相関性がパラメータの推定結果へ如何に反映されるかをまず考察する必要がある。そこで、本論文では付加雑音は考慮せず、外乱としては、供試系のデジタル演算誤差の存在のみとして検証する。なお、この演算誤差はサンプリングタイムを適正にとると、理論上かなり小さくおさえることができる<sup>2)</sup>。従って、実験の結果は同定法自体の良否の判定となる。又適正入力により、パラメータの良好な推定値が得られた場合は、それがデジタルシミュレーションの定量的演算精度を与えることにもなる。

### 4.1 試験信号入力と分析時間

理想的試験信号は、その入力により系の固有応答がすべて現われるような広い周波数帯域を有し、応答の平均パワーが雑音のそれよりも十分大きくし得るようなエネルギーを有している必要がある。本論文での同定法に対しては、用いるいくつかの入力各々の周波数

特性の総合特性が上記の条件を満足すればよいと考える。この場合、比較的単純な確定入力で実現可能である。本実験では、式(21)のモデルを適用するので3つの入力を考える。実用的にはステップ関数と正弦波の組合せが有効である。ただし、3つ共ステップ入力を適用することは、式(29)の行列式が0となるので、好ましくない。それら入力の総合周波数特性は正弦波の周波数と分析時間長により左右される。正規方程式(28)の係数は、状態変数およびその導関数並びに入力の組合せから成る実時間関数の内積である。以下に、それらすべてを代表して内積  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$  の中身を周波数分析的に検討する。まず、必要な記号、定義、関係式を記す。

$$X_i(j\omega) = \sum_k G_{ik}(j\omega) U_k(j\omega), \quad (33)$$

$G_{ik}(j\omega)$ : マトリクス伝達関数の要素,

$g_{ik}(t)$ :  $G_{ik}(j\omega)$  のフーリエ逆変換,

$U_k(j\omega)$ : 入力  $u_k$  のフーリエ変換,

$L$ : 分析時間長,  $L=NT$ ,

$T$ : サンプリング周期,

$w_L(t)$ ,  $W_L(j\omega)$ : 長さ  $L$  の時間窓とそのフーリエ変換,

$Re\{ \ } : \{ \}$  内の実数部,

\*: たたみ込み積分.

さて

$$(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \sum_{n=0}^{N-1} x_i(nT)x_j(nT) \quad (34)$$

$$= \int_0^L x_i(t)x_j(t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} w_L(t)x_i(t)x_j(t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} w_L(t)x_i(t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} W_L(j\omega)*X_j(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \right\} dt$$

$$= Re \int_{-\infty}^{\infty} \{W_L(j\omega)*X_i(j\omega)\} \{W_L(-j\omega)*X_j(-j\omega)\} d\omega. \quad (35)$$

式(35)が  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$  の値を決定する要素を明示した形の表現である。この式の被積分関数(クロススペクトル)は類似の概念をもつ項の積であることから、次式で示す1つの項について考察しても、同定精度を左右する要素の振舞を推察することができる。すなわち、

$$\begin{aligned} W_L(j\omega)*X_i(j\omega) &= W_L(j\omega)*\sum_k G_{ik}(j\omega)U_k(j\omega) \\ &= \sum_k G_{ik}(j\omega)U_k(j\omega)*W_L(j\omega). \end{aligned} \quad (36)$$

時間領域での表現にすると次式になる.

$$w_L(t)x_i(t) = \sum_k \{g_{ik}(t)*u_k(t)\} w_L(t). \quad (37)$$

更に,  $w_L(t)$  は  $g_{ik}(t)$  の持続時間より長い分析時間長 ( $L$ ) をもつ窓関数でなければならぬから, 式(36)は実質的に,

$$W_L(j\omega)*X_i(j\omega) = \sum_k G_{ik}(j\omega)[U_k(j\omega)*W_L(j\omega)] \quad (38)$$

となる.  $G_{ik}(j\omega)[k=1, 2, \dots, n]$  は同定すべきシステムの特性を有する要素である. これらはシステムの固有値のすべてあるいはいくつかを共有する伝達関係で互に関連性を有している. 同定精度を高めるということは,  $(x_i, x_j)$  の値に  $G_{ik}(j\omega)$  の特性を強く反映させることである. そのためには, 基本として, 式(38)の値に,  $G_{ik}(j\omega)$  の特性が強く現われなければならない. これを左右する要素が,

$$U_k(j\omega)*W_L(j\omega)(k=1, 2, \dots, n) \quad (39)$$

であり, 時間領域では次式となる.

$$u_k(t)w_L(t) (k=1, 2, \dots, n). \quad (40)$$

すなわち, 入力と分析時間長である.

#### 4.1.1 結 論

理想的には式(39)のスペクトル特性が必要周波数領域でフラットであればよい. そのためには  $L$  を周期とする  $M$  系列信号を入力とすることも 1 つの方法である. 本論文での同定法は, 系の物理的構造がある程度分り, ステップ入力の組合せで系の応答特性の概要が実験的に把握されるシステムに有効と考えられる. この場合は, 次の総合スペクトル特性が, 必要と定められる領域で, ほぼフラットになればよいと考える. すなわち,

$$\sum_k |U_k(j\omega)*W_L(j\omega)|. \quad (41)$$

なお, 時間窓  $w_L(t)$  は長さ  $L$  の矩形窓である. 入力  $u_k(t)$  はステップ関数か正弦波信号のような確定信号でよい.

## 4.2 実 験

式(21)のデジタルシミュレーションをステップ入力の組合せで実行して, 各パラメータの組に対する過渡応答を観察する. これにより, まず分析時間長の概略範囲, 振動系であれば, その周波数の概略値等を視察により定める. それらの値を目安として種々の組合せの入力と時間長に対して同定実験を行なった. 系のパラメータは必ずしも式(22)の特性をすべて考慮したものとしていない. 供試モデルで, 設定したパラメータを各々の組の系の固有値で示すと次のような特性をもつ種別となる. すなわち

- ①  $-65.39 \quad -198.68 \quad -450.93$
- ②  $-262.42 \quad -99.79 \quad \pm j24.26$
- ③  $-82.78 \quad -144.29 \quad -302.97$

### 4.2.1 入力について

試験信号はステップ関数と正弦波であるが, 後者は, 周波数伝達関数の計測 (定常応答

の測定)に通常適用されるような取扱いとは異なる。ここでは、4.2からも分るように、ステップ状入力の高域周波成分の減少を補償するために短時間正弦波を用いるので、系の応答は過渡応答に着目している。入力信号のスペクトルは次式で示される。

$$F\{u_k(t)\} = F\{w_L(t)u(t)\}, \quad (41)$$

$$F\{u_k(t)\} = F\{w_L(t) \sin(\omega t + \theta)\}. \quad (42)$$

ここで、 $u(t)$  はユニットステップ関数、 $F\{\}$  は $\{\}$ 内のフーリエ変換を表わす。 $w_L(t)$  は矩形窓で分析時間長  $L$  を表わす。正弦波の周期  $(2\pi/\omega)$  は  $L$  と同程度のオーダーである。本実験では3個の入力があり、次のような組合せとパラメータ変化に対する同定精度の比較を行った。

(E-A): ステップ入力と2つの正弦波状信号。

(E-B): 正弦波状信号と2つのステップ入力。

各々に対して、 $L$ 、 $\omega$ 、 $\theta$  を変化させる。尚、入力  $u_1$ 、 $u_2$ 、 $u_3$  に具体的に何を当てるかにより更に多くの組合せがあり、それぞれに過渡応答も異なるが、同定精度の上では顕著な差があるとは認められなかったことから主に1組をとりあげた。(E-A)に対応する各々の入力のスペクトルとそれらの総合特性の1例を図2に示す。

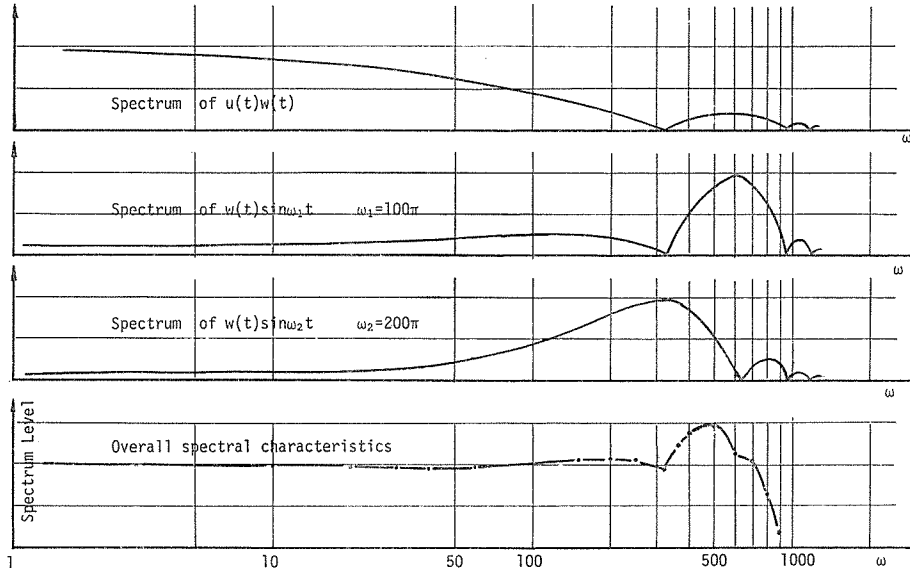


Fig. 2 Some spectral characteristics of Eq. (41) in which three input test signals are considered.  $w(t)$  is a rectangular time weighting whose time length is 20 millisecond.

#### 4.2.2 精度評価について

パラメータの推定値を  $\hat{a}$ 、当初の設定値を  $a$  とするとき、次式によって、パラメータ  $a$

に対する誤差を表わすこととする。

$$\text{誤差(\%)} = \frac{a - \hat{a}}{a} \times 100. \tag{43}$$

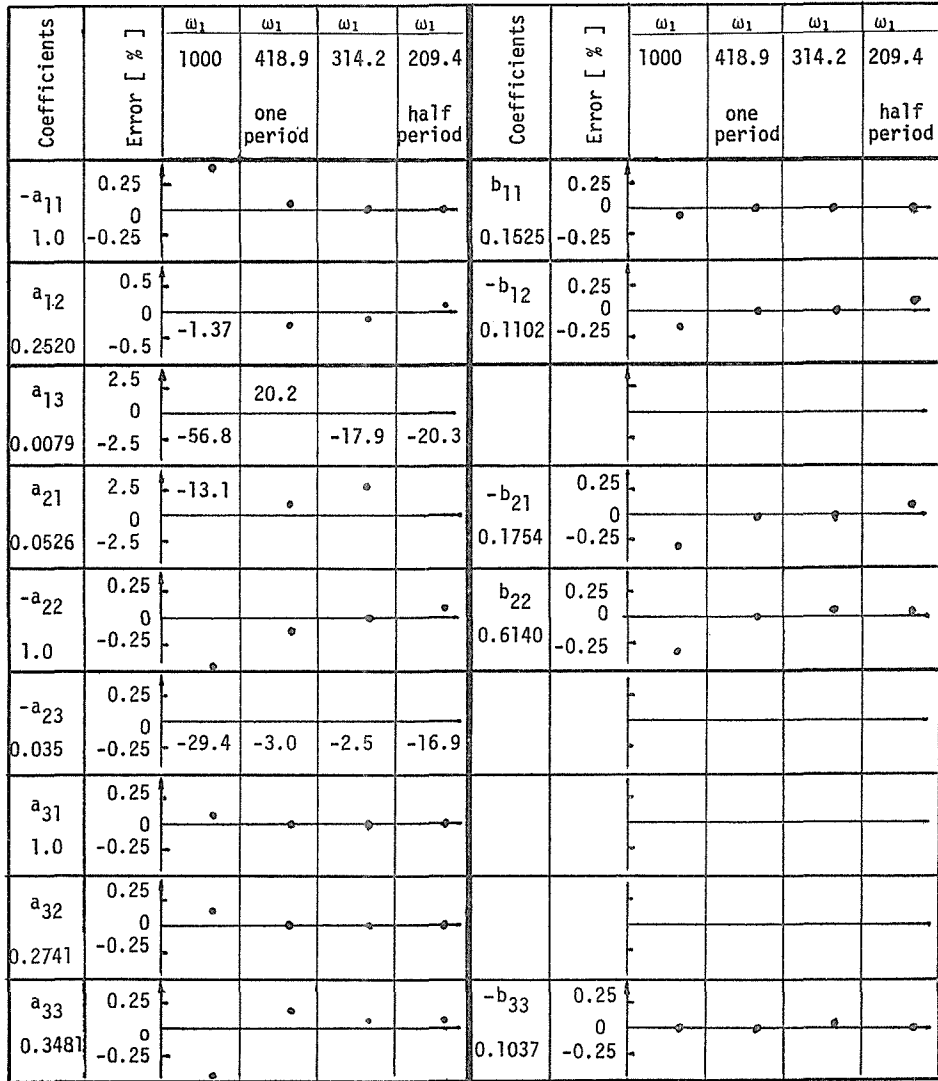
全実験を通じ、試験信号入力の組合せ ( $E - A$ ), ( $E - B$ ) に対して顕著な精度差がみられ、分析時間長 ( $L$ ) と使用正弦波の周期の変化に対する推定誤差は、両組合せに対して相

Fig. 3 [A], [B]: Typical examples of estimation accuracies for a system identification of three input and variable models. Eigenvalues:  $-262.42$ ,  $-99.79 \pm j24.26$

[A].  $u_1 = \sin(\omega_1 t + \theta)$ ,  $u_2 = \sin \omega_2 t$ ,  $u_3 = u(t)$ .  $L = 20\text{ms}$ .  $T = 0.1\text{ms}$ .

Coefficients	Error [ % ]	$\omega_1$	$\omega_1$	$\omega_1$	$\omega_1$	Coefficients	Error [ % ]	$\omega_1$	$\omega_1$	$\omega_1$	$\omega_1$
		500	$200\pi$	$200\pi$	$200\pi$			500	$200\pi$	$200\pi$	$200\pi$
		$\omega_2$	$\omega_2$	$\omega_2$	$\omega_2$			$\omega_2$	$\omega_2$	$\omega_2$	$\omega_2$
		300	$100\pi$	$100\pi$	$100\pi$			300	$100\pi$	$100\pi$	$100\pi$
		$\theta$	$\theta$	$\theta$	$\theta$			$\theta$	$\theta$	$\theta$	$\theta$
		$\pi/2$	$\pi/2$	0	$\pi$			$\pi/2$	$\pi/2$	0	$\pi$
$-a_{11}$	0.25 0 -0.25					$b_{11}$	0.25 0 -0.25				
$a_{12}$	0.5 0 -0.5					$-b_{12}$	0.25 0 -0.25				
0.2520						0.1102					
$a_{13}$	2.5 0 -2.5										
0.0079											
$a_{21}$	2.5 0 -2.5					$-b_{21}$	0.25 0 -0.25				
0.0526						0.1754					
$-a_{22}$	0.25 0 -0.25					$b_{22}$	0.25 0 -0.25				
1.0						0.6140					
$-a_{23}$	0.25 0 -0.25										
0.035											
$a_{31}$	0.25 0 -0.25										
1.0											
$a_{32}$	0.25 0 -0.25										
0.2741											
$a_{33}$	0.25 0 -0.25					$-b_{33}$	0.25 0 -0.25				
0.3481						0.1037					

[B],  $u_1 = u(t)$ ,  $u_2 = \sin \omega_1 t$ ,  $u_3 = u(t)$ .  $L = 15\text{ms}$ .  $T = 0.1\text{ms}$ .



対的に同様な傾向があった。又系の固有値のちがいでに対する誤差の現れ方には特別な傾向はみられなかった。そこで、1組の固有値に対して、上記の誤差傾向を定量的に示す代表的実験例を図3[A], [B]に示す。図から明らかのように、正弦波入力2つとステップ入力の組合せの場合における推定誤差(図[A])はステップ入力2つと正弦波の場合([B])に比べかなり小さい。又、使用正弦波の波数がL内で多くなると、すなわち、周波数が高くなると精度が悪くなる。これは当然予想されるように、スペクトル幅の低下により、高域におけるステップ入力のスペクトルレベル低下の補償が十分でなくなることに起因することの現われである。逆に半周期以下となる場合も、スペクトルレベルの低下により、やは

り十分な補償が成されず精度が落ちる。従って、使用正弦波の周期は分析時間長 $L$ 前後の値を目安として考慮すればよいと考えられる。次に、一周期前後の正弦波入力で系を駆動する場合、初期位相により、系の過渡応答波形は変わるが、パラメータの推定誤差に与える影響はあまりないことが図3[A]から窺われる。このことは、短時間正弦波のスペクトルは絶対値レベルで考慮すればよいことを示している。図2のスペクトルパターンは絶対値レベルで考慮したものである。

## 5 む す び

多変数系は、その物理的構造が分る場合、ベクトル微分方程式での記述は容易である。又、このとき各状態変数の振舞を系の観測により把握することも可能である。この数式モデルを直接用いてそのパラメータを最小2乗推定する方法について論じた。考え方の基本は、①各状態変数および試験信号入力相互の関連性を想定したこと、②多入力系であることに着目して、各々の入力に、ステップ関数か短時間正弦波といった単純確定信号を割当て、系の固有応答を観測可能レベルでひき出せると考えたことである。これらの考え方の妥当性およびこれに基づく同定法の是非について考察と実験的検討を行なった。本同定法を適用した実験的検討は、分巻式直流電動機を制御対象と考え、そのデジタルシミュレーションを供試モデルとして行った。試験信号の波形、スペクトル構造等の特性変化に対するパラメータ推定誤差の振舞を検討した結果、適正な試験信号入力に対して、推定誤差は0.1~1%であった。デジタルシミュレーションの実現に対しては、マトリクス伝達関数に $s=1/I(z)$  ( $I(z)$ : デジタル積分要素) の関係を単純代入することから簡単に実行できる技法を提案した。この技法は、本論文で述べた応用例のみならず、2次元デジタルフィルタ、時変および非線形の偏微分方程式等のデータ処理に効果的に応用される可能性を有するものであり研究を続けている。最後に、本研究に御協力いただいた研究室の小山安正技官および大学院生、卒研究生に感謝します。又日頃御指導御鞭撻賜ります東京工業大学の今井聖教授に感謝致します。

## 文 献

- 1) 秋月, 片山他: システム同定, 計測自動制御学会, 昭和56年
- 2) 坂口博己: "デジタル積分要素を媒介とする巡回形デジタルフィルタの構成法", 信学論(A), Vol. 60-A No. 1, pp. 17-24 昭(52-01)
- 3) 坂口博己: " $I_s(z)$  変換とそれにより設計されるデジタル系の実現問題", 信学論(A) Vol. 63-A, No. 8 pp. 514-521 昭(55-08)
- 4) 坂口博己: " $I(z)$  変換による時変系, 非線形系, 多変量系のデジタル処理" 信学論(A), Vol. 65-A, No. 11, 昭(57-11)
- 5) 坂口, 富高: " $I(z)$  変換による非定常, 非線形系の取扱について" 信学技報, CAS 81-53, pp. 45-52 (昭56-08)
- 6) R. E. Kalman: "Design of a self-Optimizing Control System, Trans. ASME, 80-2, pp. 468-478 (1958).
- 7) 鈴木, 藤井: "プロセス同定問題への最小2乗推定法の応用" 計測と制御, Vol. 10, Mo. 8 pp. 1-16 (昭46-08)