

獲得情報量最大仮説にもとづく長期流出モデル

—構成および厳密解の実流域への適用

寒川典昭* 荒木正夫** 甲田和彦***

(昭和56年10月30日受理)

A Model for Long-Term Runoff Based on the Assumption of Maximum Acquired Information Content

—Modeling and an Application of the Exact
Solution to a River Basin

Noriaki SŌGAWA, Masao ARAKI and Kazuhiko KŌDA

The assumption was adopted for the modeling, since those overall phenomena which the long-term runoff system exhibits are composed of so many complicated and uncertain phenomena that their mechanistic analysis requires not the deterministic but the stochastic standpoint. The adoption of the assumption leads to specifying the internal structure for the runoff mechanism, which in turn enables us to express the transition structure among runoff states in terms of a set of probabilities. For checking the validity of the model the set of probabilities was applied to the basin of the Yura river, with good reproduction of its natural stream records.

1 序 論

従来、長期流出機構の解明には洪水流出を主対象とした決定論的流出解析法概念を拡張して用いたものが多かった。しかしながら、長期流出現象は、その対象期間が長く、その間の降水は不規則な変化特性をもち、流域場は空間的、時間的に可変性であり、降水に対応する流量は多くの出水サイクルから構成されている。そのためそこに内在する複雑かつ不確定な現象を考えると決定論的立場だけでは、その解析は不十分であり、確率・統計論的アプローチが不可欠となる。

このような考えから、高棹、池淵は初めて長期流出系に Shannon の情報理論概念を導入し、「エントロピー最大仮説」から、昭和43年には「各降水規模ごとの状態遷移確率」¹⁾を、昭和50年には「降雨情報をも組み入れた状態遷移確率」²⁾を評価した。その後、彼ら

* 土木工学教室 助手

** 土木工学教室 教授

*** 大学院修士課程

は、エントロピー最大仮説を思想的に発展させ、「獲得情報量最大仮説」を考察してきた³⁾が、本研究は、この仮説のもとに導出された厳密解を実流域に適用し検討するものである。

2 水文事象のエントロピー的解釈

流出系を特徴づけるのは「入力である降水」、「出力である流量・蒸発散量」及び「流出系それ自体の内部構造」であるが、これがすべて stokastic に扱わなければならないところに、流出解析、特に長期流出解析の困難さがあると言えよう。

すなわち、降水はその総量、継続時間、強度などの他に、時空間的な分布が異なり、それを受ける流域場は地形、地質、植生など非常に複雑な地域的分布をしている。したがって、降水から流量への変換過程には多くの因子が時間的にも、空間的にも複雑に作用し、その結果、系はきわめて複雑になり、大変あいまいな不確定現象を示す。

そこで、高棹⁴⁾はこのような不確定な現象を説明するために、あいまいさの尺度であるエントロピーの概念を導入し、幾つかの水文事象を巧みに説明してきた。その結果、長期流出現象がエントロピー的に解釈できることが明らかになった。

また、昭和50年の「エントロピー最大仮説」では、貯留量系列 $H(y)$ がマルコフ的拘束を受けているとした情報源のエントロピー最大化から状態遷移確率を求めているのに対して、本研究で仮定された「獲得情報量最大仮説」は、入力(降雨)、変換(流域場)及び出力(貯留量)から構成されるトータルシステムのエントロピー、すなわち“獲得情報量”を最大にすることから状態遷移確率を算出しているのであり、昭和50年の研究を包含した形のものであるといえよう。

3 長期流出系のエントロピー・モデル—状態遷移確率法

本章は、獲得情報量の概念⁵⁾を用い、流出系において、これを最大にする確率構造を定めることの自然さと妥当性を議論し、獲得情報量最大仮説にもとづいて、状態遷移を確率論的に評価しようとするものである。

3.1 獲得情報量の数量的表現とその解釈

獲得情報量は、サブシステムを x, y とすると、

$$\left. \begin{aligned} I &= H(x) + H(y) - H(x, y) \\ &= H(x) - H_y(x) \\ &= H(y) - H_x(y) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

と表記される。ここに、 $H(x)$ と $H(y)$ はエントロピー、 $H(x, y)$ は相互エントロピー及び $H_x(y)$ と $H_y(x)$ は条件つきエントロピーである。上式の第1式において、 $H(x, y)$ を最小にするということは、 x と y の対応に関するエントロピーを最小にすること、すなわち、 x と y の対応に関する不確定さを最小にすることであり、一方、第2及び第3式において、 $H_y(x)$ と $H_x(y)$ を最小にするということは、 y を知った後に x を言いあてる、あるいは x を知った後に y を言いあてる、すなわち、変換系の不確定さを最小にすることである。この意味で I を最大にすることは、変換系が最も確定される、あるいは逆に最も実現しやすい、

生起しやすい変換システムを構成しようとしていることと等価であり、自然であろうと思われる。

通常は、 x 、 y 自身及び x と y の間に物理的、社会的、経済的制約条件がつき、それらの条件の下で I を最大にする確率構造を求めることになる。

さて、サブシステム x と y の対応関係として、 x と y が互いに独立な場合、 x と y の間の変換システムに雑音がない場合、及びそれに雑音がある場合の3つが考えられる。

x と y が互いに独立な場合は $H_y(x) = H(x)$ あるいは $H_x(y) = H(y)$ であるから、(3.1)式より $I = 0$ となり、まったく情報獲得が得られないことになる。変換システムの雑音の有無については次のように考えられる。いま、 x_t 、 y_t 及び β_t をそれぞれ時間 t での入力、出力及びシステムの状態であるとする、次の関係式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} y_t &= f(x_t, \beta_t) \\ \beta_{t+1} &= g(x_t, \beta_t) \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

ここに、 $f(\cdot)$ と $g(\cdot)$ は変換システム及び状態遷移を表現する任意関数である。

雑音の無いシステムとは(3.2)式で示される y_t と β_{t+1} が決定論的に評価できる場合であり、このとき $H_y(x) = H_x(y) = 0$ となり

$$I = H(x) = H(y) \quad (3.3)$$

となる。雑音のあるシステムとは(3.2)式が確率論的に定まる場合をいい、このとき獲得情報量は(3.1)式で表現され、通常サブシステム x と y の対応は、このような場合であると考えられる。なお、雑音が大きくて、 x と y の対応がまったく定まらなくなると、 $H_y(x) = H(x)$ 又は $H_x(y) = H(y)$ となって、(3.1)式から $I = 0$ となることがわかる。

3.2 単位特性値あたりの獲得情報量⁶⁾

降雨・流出変換過程を対象とすると(3.2)式で示された関係は、次式のように表現される。

$$\left. \begin{aligned} Q_t &= f(R_t, S_t) \\ S_{t+1} &= g(R_t, S_t) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

ここに R_t 、 Q_t 及び S_t は、それぞれ時間 t における有効降雨(降水量から蒸発散量を差し引いた量)、流量及び系の内部状態、具体的には流域の貯留状態を意味する。ところで、 R_t 、 Q_t 及び S_t の間で連続式が成立すると考えると、流量 Q_t は、

$$Q_t = S_t + R_t - S_{t+1} \quad (3.5)$$

で与えられることになるから、問題は(3.4)式の下式の状態遷移である。この状態遷移の確率的構造解明に、前述の獲得情報量の概念を適用する。

さて、内部状態いわゆる貯留状態の遷移に関して獲得情報量は、次式で表現される。

$$I(S_t, R_t, S_{t+1}) = H(S_{t+1}) - H_{S_t, R_t}(S_{t+1}). \quad (3.6)$$

いま、系の定常化がはかられているとすると、その期間内では、上式は

$$I = - \sum_j P_j \ln P_j + \sum_{ijs} P_i \cdot Q_s \cdot p_{is(j)} \ln p_{is(j)} \quad (3.7)$$

で与えられる。前節の議論から流域に獲得情報量最大仮説を置くことは妥当であるから、(3.7)式を最大にする遷移確率を求めると、

$$p_{is(j)} = P_j \quad (3.8)$$

となり、遷移後の状態 E_j が遷移前の状態 E_i 及び入力として与えられる降水規模 R_s に依存しないという不合理な現象説明になるため、次に特性値の導入を考える。

具体的には特定時間内にもたされる水分子の量に比例したパラメーターと考えられるが、それをいま l_{ijs} と表記すると平均単位特性値は、

$$m = \sum_{ijs} P_i \cdot Q_s \cdot p_{is(j)} \cdot l_{ijs} \quad (3.9)$$

となるから、単位特性値あたりの獲得情報量は、

$$I' = \frac{-\sum_j P_j \ln P_j + \sum_{ijs} P_i \cdot Q_s \cdot p_{is(j)} \ln p_{is(j)}}{\sum_{ijs} P_i \cdot Q_s \cdot p_{is(j)} \cdot l_{ijs}} \quad (3.10)$$

で与えられる。

3.3 獲得情報量最大仮説にもとづく状態遷移確率の算定

前節で、獲得情報量を最大にする状態遷移確率を求めることが、すなわち(3.10)式で表現された I' を最大にする状態遷移確率 $p_{is(j)}$ を導出することが、 l_{ijs} をよりどころとして、最も実現しやすい変換システムを構成しようとしていることであることを述べた。この問題に関して、次に示すいくつかの制約条件あるいは規格化条件を考えなければならない。

$$\sum_{is} P_i \cdot Q_s \cdot p_{is(j)} = P_j \quad (3.11)$$

$$\sum_i P_i = 1 \quad \text{あるいは} \quad \sum_j P_j = 1 \quad (3.12)$$

$$\sum_s Q_s = 1 \quad (3.13)$$

$$\sum_j p_{is(j)} = 1. \quad (3.14)$$

ここで、状態確率 P_i 及び状態遷移確率 $p_{is(j)}$ は未知変量であり、降雨確率 Q_s も流域内の面積降雨と考えれば、決定すべき未知変量となる。したがって、(3.11)～(3.14)式を制約条件として、単位特性値あたりの獲得情報量、すなわち(3.10)式を最大にする状態遷移を求める。これは、一種の最適化問題であり、Lagrange の未定乗数法によって解かれる。この問題の Lagrange 関数は、

$$M_1 = I' + \nu \left(\sum_i P_i - 1 \right) + \xi \left(\sum_s Q_s - 1 \right) + \sum_j \theta_j \left(\sum_{is} P_i \cdot Q_s \cdot p_{is(j)} - P_j \right) + \sum_{is} \pi_{is} \left(\sum_j p_{is(j)} - 1 \right) \quad (3.15)$$

と書かれる。ここに、 ν , ξ , θ_j および π_{is} は未定乗数である。

さて、(3.15)式を $p_{is(j)}$, P_i および Q_s で微分して、0とおくと

$$\frac{\partial M_1}{\partial p_{is(j)}} = \frac{P_i \cdot Q_s (1 + \ln p_{is(j)})}{m} - \frac{C \cdot P_i \cdot Q_s \cdot l_{ijs}}{m} + \theta_j \cdot P_i \cdot Q_s + \pi_{is} = 0. \quad (3.16)$$

($\partial M_1 / \partial P_i$ と $\partial M_1 / \partial Q_s$ は略す)

ここに、 I' の極大値を C と書き、(3.10)式の分母を m と表わしている。これらにより、 $p_{is(j)}$ は、

$$p_{is(j)} = \frac{\exp(-m \cdot \theta_j + C \cdot l_{ijs})}{\sum_j \exp(-m \cdot \theta_j + C \cdot l_{ijs})} \quad (3.17)$$

と求まり、ここで、 $V_j = \exp(-m \cdot \theta_j)$ とおくと、上式は

$$p_{is(j)} = \frac{V_j \exp(C \cdot l_{ijs})}{\sum_j V_j \exp(C \cdot l_{ijs})} \quad (3.18)$$

と書き換えられる。さらに、上式を(3.16)式に代入して、次式を得る。

$$V_j \sum_{is} \left\{ \frac{P_i Q_s \exp(C \cdot l_{ijs})}{\sum_j V_j \exp(C \cdot l_{ijs})} \right\} = P_j. \quad (3.19)$$

上式が、 V_j が満足しなければならない方程式である。

一方、(3.16)式に Q_s を乗じ、 s について加えると、

$$\sum_i P_i (\log P_i / m + \theta_j + \xi) = 0 \quad (3.20)$$

なる式が得られ、 $p_{is(j)}$ に関する特殊解、

$$p_{is(j)} = \frac{P_j \exp(C \cdot l_{ijs})}{\sum_j P_j \exp(C \cdot l_{ijs})} \quad (3.21)$$

が求まる。これを(3.11)式に代入すると

$$\sum_{is} \left\{ \frac{P_i \cdot Q_s \cdot \exp(C \cdot l_{ijs})}{\sum_j P_j \exp(C \cdot l_{ijs})} \right\} = 1 \quad (3.22)$$

となり、未知数 C を決定する1つの方程式を与える。

次に、エルゴード性の制約条件(3.11)式を取り除き、(3.12)～(3.14)式を制約条件として、(3.10)式を最大にする状態遷移確率 $p_{is(j)}$ を求めてみる。このとき Lagrange 関数は、

$$M_2 = I' + \rho \left(\sum_i P_i - 1 \right) + \sigma \left(\sum_s Q_s - 1 \right) + \sum_{is} \tau_{is} \left(\sum_j p_{is(j)} - 1 \right) \quad (3.23)$$

で与えられ、 $p_{is(j)}$ は、

$$p_{is(j)} = \frac{\exp(C \cdot l_{ijs})}{\sum_j \exp(C \cdot l_{ijs})} \quad (3.24)$$

と求まる。ここで、上式に含まれる C は、取り除いた制約条件(3.11)式を満足すること、つまり、

$$\sum_{is} \left\{ \frac{P_i \cdot Q_s \cdot \exp(C l_{ijs})}{\sum_j \exp(C \cdot l_{ijs})} \right\} \quad (3.25)$$

より決定される。

4 実流域への適用と考察

本章では、前章までの長期流出モデルに関する理論展開を実証し、降雨・流出変換システムを状態遷移確率をもって解釈、予測するために、各理論解を由良川流域に適用し、実測値と共に、その結果について検討する。

4.1 由良川流域の概況と水文資料

由良川は三国岳(標高959m)にその源流を成し、東西に走る大小支川を合流しながら西流して丹波高原を東西に貫流し、福知山付近で北東に流路を変え、由良において宮津湾に注ぐ、流域面積 1,882km²、流路延長 140km の中河川である。その流域は、山地が89%、平地が11%の典型的な山地河川となっている。本研究の対象とするのは荒倉流域のみであるが、図1には、荒倉流域を含む福知山地点までの流域概況図を示した。

次に、水文資料としては、以下のものを採用した。まず系への入力である上記流域の日平

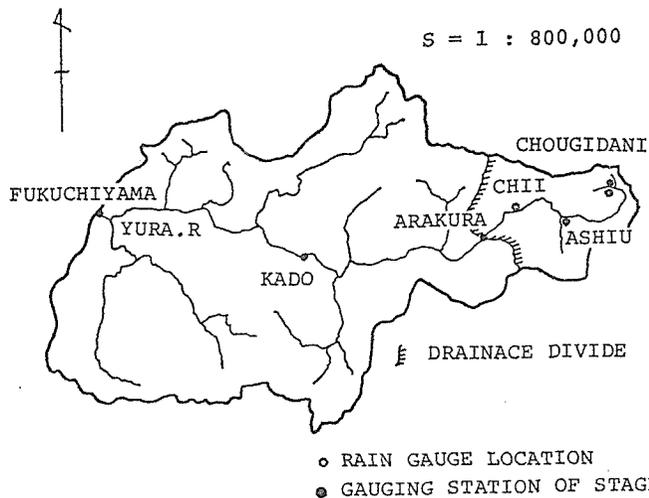


Fig. 1. Physiological map of the upper basin of the River Yura.

均面積降水量は昭和28年～35年の各月と36年～48年の6月～10月は芦生(支配率:0.616), 知井(0.353), 平尾(0.031)の地点雨量から Thiessen 法により導出されたものを用いた。また, 昭和36年～48年の1月～5月, 及び11月～12月については, 支配率の大きい芦生で代表させることにした。系の出力である日平均流量は, 関西電力が観測した資料を昭和28年～48年にわたり用いた。最後に, 蒸発散関係の資料は, 京都大学農学部附属芦生演習林で観測されている Pan による蒸発散量を上記期間にわたって使用した。

4.2 降雨・流出系の状態遷移にかかわるパラメータの同定

(1) 降雨の層別化

降雨規模の層別化は, 有効降雨の概念を導入して, 有効降雨とそれに対応する度数との積の累積値を適切な値で仕切るという手法を採用した。有効降雨とは全降雨から蒸発散量を差し引いた量であり,

$$R_e = R_a - w \cdot P \quad (4.1)$$

と定義する。上式で, R_e は有効降雨, R_a は全降雨, w は1954年11月8日から1967年10月13日の間(以下この期間を解析の対象とする。)で水収支が成立するように決定した係数, P はPanによる蒸発散量である。実流域の適用にあたっては図2に示したように6層の層別化を採用する。

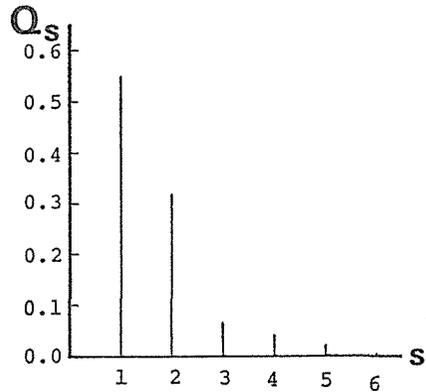


Fig. 2. Effective rainfall probability Q_s .

(2) 貯留量の層別化

図3は, (3.4)式に示した降雨, 流量, 貯留量の連続式から無降雨期間を取り出し流量の自

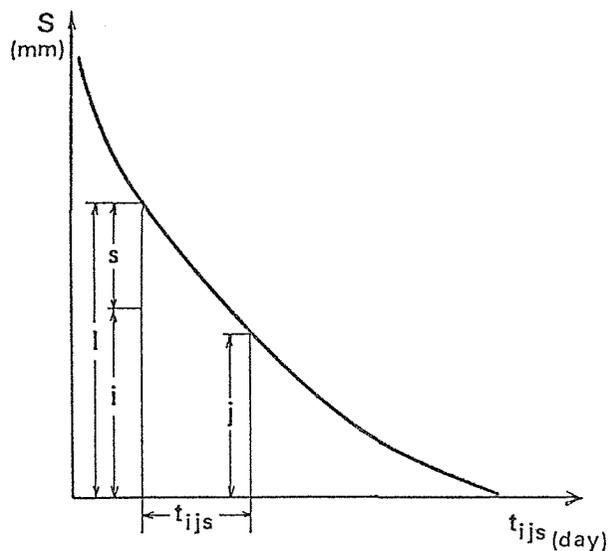


Fig. 3. Schematic view of natural recession curve.

であると考えられる。したがって、任意の一つの l という状態から、これより 1 ランク小さい状態へ遷移するのに要する特性値として単位 "1" を採用すると、他の状態へもたらされる水分子の量は前述の遷移のしにくさを表現するパラメーター t_{ijs} に反比例すると考えられるから、 l_{ijs} は

$$l_{ijs} = 10/t_{ijs} \tag{4.2}$$

なる関係式で定義される。表 2 は、このようにして得られた l_{ijs} の値を記載したものである。

4.3 算定過程

- 1° P_i, Q_s, l_{ijs} を §4.2 のようにして算出する。
- 2° 1° で求めた P_i, Q_s, l_{ijs} を使用して (3.22) 式を満足する 12 個の C の値を求め、その平均値を C_m とする。
- 3° C_m を初期値として、目的関数を (3.10) 式、制約条件を (3.19) 式、 $V_j \geq 0$ として、(3.10) 式を最大にするような V_j の組とその最大値 $C = \max I'$ をサブルーチン COM-PLX (京都大学大型計算機センターで開発された不等号制約条件下における多変数非線形関数の最大値を直接探索するためのプログラム) を使って求める。
- 4° 求めた C, V_j より $p_{is(j)}$ を算出する。

4.4 算定結果及び考察

以上のようにして算定された結果が図 5 であり、CASE I は、2° で評価された値 $C =$

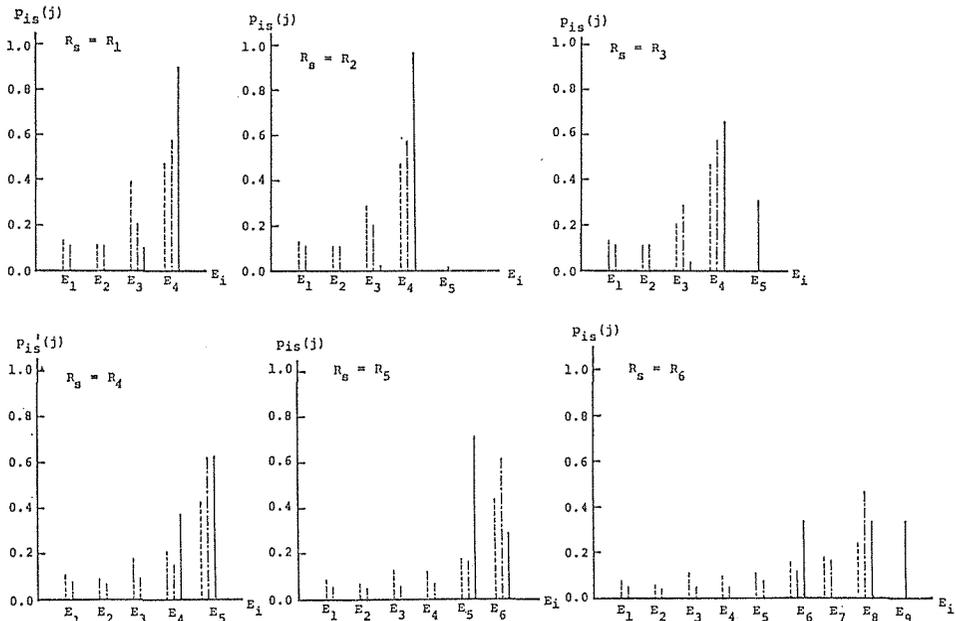


Fig. 5. Transition probability of runoff states, $p_{is}(j)$, in the case of E_4 , where the chain lines with one dot, the broken lines, and the full lines of each block represent CASE I, CASE II, and the observed values, respectively.

2.94 を初期値として $I(=C)$ を計算し、その C とエルゴード性の制約条件を満足する V_j とから得られた $p_{is(j)}$ である。ここで、 C の初期値として、厳密解を導出するときに得られた特殊解を用いていること、及び使用された C が最大値であることより、この解の妥当性が認められる。また、 I' と C は一致すべきであるという安定性の立場から 3° の計算を繰り返して安定した C を用いた解が CASE II である。この両者の $p_{is(j)}$ は、本来等しいはずであるが、エルゴード性の制約条件を、ある範囲内で満足するように書き換えているためにひずみが生じている。

実測値と厳密解を比較すると、厳密解の $p_{is(j)}$ は分散傾向が強まっていて、グラフは実測値より全体に偏平化されてきているが、全般的に実測値の傾向をよく説明している。また、資料が増大するにつれて低確率群の実現により、厳密解にさらに近い実測遷移確率が得られてくると思われる。

このように、厳密解は、理論的な完備性を持ち、獲得情報量最大仮説に基づく長期流出モデルの最終解を与えるという観点から優れたモデルである。しかし、計算には多くの時間とコストがかかることも考えておかなければならない。

この研究の問題点として、特性値が与えられていないところでは、理論値は遷移しないと判断されるが、実測値ではある程度の大きさの遷移がみられることがあるので、これを評価できるように特性値の改善が必要である。

5 結 論

本研究により、流出系に「獲得情報量最大仮説」を置くことによって導出された厳密解を実流域に適用することができ、理論的に完備した長期流出モデルを組み立てることができた。その結果、以下のことがわかった。

- (1) 厳密解は全般的に実測値の傾向をよく説明している。
- (2) 厳密解は実測値より低位の状態への遷移確率を大きくする傾向がある。しかし、資料が整備されてくると従って低確率群の実現により両者の一致度は高まることが予想される。
- (3) 実測値は存在するが理論値が与えられていないところの遷移確率を評価するために、特性値の改善が要求される。
- (4) 厳密解の計算には多くの時間とコストがかかる。

今後、不確定な流出現象を stokastic ととらえたこのモデルを他流域へ適用するとともに、気象状態も取り入れたモデル構成をはかりたいと考えている。

最後に、本研究を遂行するにあたって、有益な御意見御討議をいただいた京都大学工学部高棹琢馬教授、京都大学防災研究所附属水資センター池淵周一教授に深謝致します。

参 考 文 献

- 1) 高棹琢馬，池淵周一：長期流出機構の情報理論的研究；京都大学防災年報第12号B，pp.193～209，昭和43年3月。
- 2) 高棹琢馬，池淵周一：シャノン流情報理論からみた水文現象の不確定構造；水理講演会論文集，pp.65～69，昭和50年2月。
- 3) 高棹琢馬，池淵周一，寒川典昭：エントロピーモデルに関する 2，3 の考察；京都大学防災年報

(第24号B-2に投稿中).

- 4) 高棹琢馬, 池淵周一: エントロピー的にみた降雨・流出変換特性とそのモデル化; 京都大学防災年報第23号B-2, pp.193~209, 昭和55年4月.
- 5) 笠原芳郎: 情報理論と通信方式; pp.77~92, 共立出版, 昭和40年.
- 6) 大泉充郎, 野口正一, 本多波雄: 情報理論; pp.24~27, オーム社, 昭和37年.