

## 湖水の流動予測に関するモデリング法

荒木正夫\* 富所五郎\*\* 松本良一\*\*\*

(昭和56年5月23日受理)

**A Modeling Method for Estimating Currents in Lakes**

Masao ARAKI, Goro TOMIDOKORO and Ryoichi MATUMOTO

This paper presents a modeling method to estimate the wind drift currents in lakes. Galerkin's finite element method is used to get discrete basic equations for flows, shape functions adopted are determined on the basis of the utilization efficiency of computer and the boundary conditions, and coefficients of horizontal eddy viscosity are determined as a function of mesh scale on physical bases. The numerical solutions on the wind drift currents in Lake Nojiri by this modeling method approximately coincide with the observation results on the movements of floats on the lake, so it is considered that the modeling method presented here can be used to forecast the currents in lakes.

## 1 緒 論

湖水の流動予測は、近年注目されている環境問題の1つであり、これを工学的観点から解明する意義は大きいと考える。最近では、3次元流動予測が中心的位置を占めつつあり、現在までに①エクマンタイプモデル②層モデル③3次元モデルが提案されている。しかし、エクマンタイプモデルでは Rossby number の大きい湖には適用できず、層モデルでは成層状態がはっきりしていない時には層厚の決定や、各層間のせん断応力をいくにするかという点で困難が生じ、3次元モデルでは節点数が多くなり演算時間・記憶容量の点で問題がある。以上①②③のモデルの難点を解決する方法として、水平方向には1次の多項式を、鉛直方向には余弦関数を形状関数に選んだ有限要素法を用いる。さらに、従来数値計算の安定性から決定されていた水平渦動粘性係数についても、物理的考察に基づいて算定する。

本論文では、以上のモデリング法を長野県北東部に存在する野尻湖に適用し、さらに湖岸に設置したトランシットにより浮子の流れを観測し、数値実験結果と現地観測結果の適

\* 土木工学教室 教授

\*\* 土木工学教室 講師

\*\*\* 大学院修士課程修了(現在建設技術研究所)

合性より，湖水の流動予測に関するモデリング法の検討を行なう。

## 2 基礎方程式の導出と有限要素法による離散化

### 2・1 基礎方程式の導出

流体の運動を支配する基本法則は，質量保存則・運動量保存則・熱力学第1法則・濃度保存則である。これらの保存則を満たしつつ湖水の流動予測を行うにあたり，次の仮定を設ける。

- 1) 湖水は淡水のため，濃度を一様とする。
- 2) 水温は冬期の一層状態を考え，水面より湖底まで一定とする。
- 3) 水は非圧縮性流体とする。
- 4) 圧力は Lagrange の未定乗数とする。
- 5) 時間スケールを $10^5$ 秒程度以上とし，慣性力として基礎方程式中にコリオリ効果を考える。

以上より基礎方程式は，

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + A \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + fv \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + A \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - fu \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + A \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - g \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

境界条件は，

$$\text{水面 } z = \eta \text{ で} \quad A \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_x \quad A \frac{\partial v}{\partial z} = \tau_y \quad (2.5)$$

$$\text{湖底 } z = -h \text{ で} \quad u = v = w = 0 \quad (2.6)$$

となる。ここに  $u$ ， $v$ ， $w$  は  $x$ ， $y$ ， $z$  軸方向の流速成分で  $x$ ， $y$  軸は静水面内で東，北を正とし， $z$  軸は鉛直方向で静水面を0とし鉛直上方を正とする。 $p$  は圧力， $\rho$  は密度， $A$  は渦動粘性係数， $g$  は重力加速度， $f$  はコリオリ係数， $\tau_x$ ， $\tau_y$  は風による水表面のせん断応力を水の密度で除したものである。

次に基礎方程式を無次元化するため，流速，水平寸法，水深の代表量を  $U$ ， $L$ ， $D$  とすると無次元量は

$$\left. \begin{aligned} x_* &= x/L, \quad y_* = y/L, \quad z_* = z/D \\ \eta_* &= \eta/D, \quad h_* = h/D \\ u_* &= u/U, \quad v_* = v/U, \quad w_* = w/(D/L)U \end{aligned} \right\} (2.7)$$

$$\left. \begin{aligned} p_* &= p/\rho g D, \quad t_* = ft \\ \tau_{x_*} &= (D/AU)\tau_x, \quad \tau_{y_*} = (D/AU)\tau_y \end{aligned} \right\}$$

となる。(2.7)式を用い(2.1)～(2.4)式を無次元化し、各項を代表値を用い計算すると、(2.3)式では右辺第1項 $-1/\rho \cdot \partial p/\partial z$ と第3項 $-g$ に相当する項が大きいので、この2項だけを考える。そして、 $z$ 方向に積分すると $p = -z + \eta$ (但し、大気圧 $p_a = 0.0$ )。これより(2.1)式、(2.2)式の $p$ を消去すると、基礎方程式・境界条件は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + R_o \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ = E \frac{\partial \eta}{\partial x} + E_H \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + E_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + v \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + R_o \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ = E \frac{\partial \eta}{\partial y} + E_H \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + E_V \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - u \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.10)$$

$$\text{水面 } z = \eta \text{ で} \quad \tau_x = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \tau_y = \frac{\partial v}{\partial z} \quad (2.11)$$

$$\text{湖底 } z = -h \text{ で} \quad u = v = w = 0 \quad (2.12)$$

となる。ここに(\*)は簡略化のために省き、 $R_o$ はRossby number $= U/fL$ 、 $Fr$ はFroude number $= U/\sqrt{gD}$ 、 $E$ は $R_o/Fr^2$ 、 $E_H$ はHorizontal Ekman number $= A/fL^2$ 、 $E_V$ はVertical Ekman number $= A/fD^2$ である。

## 2.2 有限要素法による離散化

2.1で述べた基礎方程式を次の近似関数を用いて離散化する。形状関数として、鉛直方向には直交関数系から余弦関数を、水平方向には1次の多項式を用いた。鉛直方向の形状関数として余弦関数を用いたのは、水面で値を持ち湖底で流速0となる境界条件を自動的に満足しているからである。よって近似関数を

$$\left. \begin{aligned} u &= N_i \cdot \cos A_p z \cdot u_{pi} \\ v &= N_i \cdot \cos A_p z \cdot v_{pi} \quad A_p = \frac{2p-1}{2h}\pi \quad (p=1, 2, \dots, m) \\ \eta &= N_i \cdot \eta_i \\ & \quad a_i = (x_j y_k - x_k y_j) / 2s \\ N_i &= a_i + b_i x + c_i y \quad b_i = (y_j - y_k) / 2s \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

$$\left. \begin{aligned} c_i &= (x_p - x_j) / 2s \\ (i &= i, j, k) \end{aligned} \right\}$$

として離散化する。ここに  $N_i$  は水平方向形状関数で  $i, j, k$  は三角形要素の節点を、 $m$  は鉛直方向形状関数の項数を、 $s$  は要素の面積を表わす。

離散化するにあたってメッシュスケールを考慮した渦動粘性係数を用いる必要がある。その理由として有限要素法によって離散化された Reynolds 式は、メッシュによって空間の小領域について平滑化されたものを見ているのである。これによって再現される Reynolds 応力は、メッシュスケールに依存したものとなる。したがって、渦動粘性係数もメッシュスケールによって決定される必要があり、水平方向と鉛直方向とで離散化するスケールが異なるモデリングを行う場合は、各方向の渦動粘性係数を相異なった値にする必要がある。ここでは、乱流振散で Richardson が導いた "拡散係数がスケールの4/3乗に比例する" という考えを参考にし、拡散係数と渦動粘性係数が比例関係にあると判断した。

水平渦動粘性係数  $A_H$  を求める算定式として、

$$A_H = A_V \times \left( \frac{L_1}{L_2} \right)^{\frac{4}{3}} \quad (2.14)$$

ここに、 $A_V$  は鉛直渦動粘性係数、 $L_1$  は水平メッシュスケール、 $L_2$  は鉛直メッシュスケールを示す。これにより算定した  $A_H, A_V$  を前述の式中の  $A$  と置換する。すなわち、 $E_H = A/fL^2, E_V = A/fD^2$  を  $E_H = A_H/fL^2, E_V = A_V/fD^2$  とする。

重み関数として Reynolds 式には  $N_i \cdot \cos A_{pz}$ 、連続の式には  $N_i$  をかけ要素内で積分する。

以上により基礎方程式を離散化した式は、1つの要素について

$$\begin{aligned} M_{pq, ij} \dot{u}_{qj} + R_{pqr, ijk} u_{qj} u_{rk} + Q_{pqr, ijk} v_{qj} u_{rk} \\ = E1_{p, ij} \eta_j + K_{pq, ij} u_{qj} - C_{pq, ij} v_{qj} + f1_{p, j} \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} M_{pq, ij} \dot{v}_{qj} + R_{pqr, ijk} u_{qj} v_{rk} + Q_{pqr, ijk} v_{qj} v_{rk} \\ = E2_{p, ij} \eta_j + K_{pq, ij} v_{qj} + C_{pq, ij} u_{qj} + f2_{p, j} \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$M_{ij} \dot{\eta}_j + K1_{q, ij} u_{qj} + K2_{q, ij} v_{qj} = 0 \quad (2.17)$$

となる。ここに  $u, v, \eta$  の上つきの  $\cdot$  は  $\partial/\partial t$  を意味する。(2.15)~(2.17)式を全要素について重ね合わせた非線形連立方程式をユニット分割法により、線形解を第一近似とする Newton-Raphson 法を用い解く。

### 3 数 値 実 験

#### 3.1 水平渦動粘性係数について

ここでは、水平渦動粘性係数の算定式(2.14)式を検討するため、地形の単純な矩形貯水池を例に取り、メッシュスケールの異なる三種類の有限要素メッシュを組み、各々のスケールに応じた水平渦動粘性係数を用いる数値実験を行なった。貯水池は、横1.5km、縦3.0

km, 水深は一様で4.0mとした。また, 3種類の有限要素メッシュは, ①節点数91, 要素数144, 節点間隔250m, ②節点数231, 要素数400, 節点間隔150m, ③節点数861, 要素数1600, 節点間隔75mで, 全て直角二等辺三角形要素より成り, さらに方向性を除去するため貯水池中央点に対し対称とした<sup>5)</sup>。風は, 風速 2m/sec で, 貯水池水面全体に一様に連続して吹く, つまり流れは定常とし, また湖への流出入は全くないとした。以上より解析に用いた各係数は

$$D = 4\text{m}, L = 3000\text{m}, U = 10\text{cm/sec}$$

$$\tau_o = 0.055 \text{ g/cm}^2/\text{sec}^2, f = 0.000084 \text{ 1/s}$$

$$A_V = 149 \text{ cm}^2/\text{sec} (E_V = 1.07 \times 10^{-1})$$

$$\textcircled{1} A_H = 370 \text{ cm}^2/\text{sec} (E_H = 4.70 \times 10^{-5})$$

$$\textcircled{2} A_H = 187.0 \text{ cm}^2/\text{sec} (E_H = 2.38 \times 10^{-5})$$

$$\textcircled{3} A_H = 74.2 \text{ cm}^2/\text{sec} (E_H = 9.43 \times 10^{-5})$$

$$R_o = 0.38, E = 1.49 \times 10^3$$

である。

3種類の有限要素メッシュに対する解析結果を図-1から図-3に示す。図よりいずれの場合も, 水表面位は風下に向けて徐々に上昇し, 平均流速の分布は明確な水平環流を示し, さらに表面流速は1~3 cm/sec で野尻湖で行なった観測結果と類似の値となり, 物

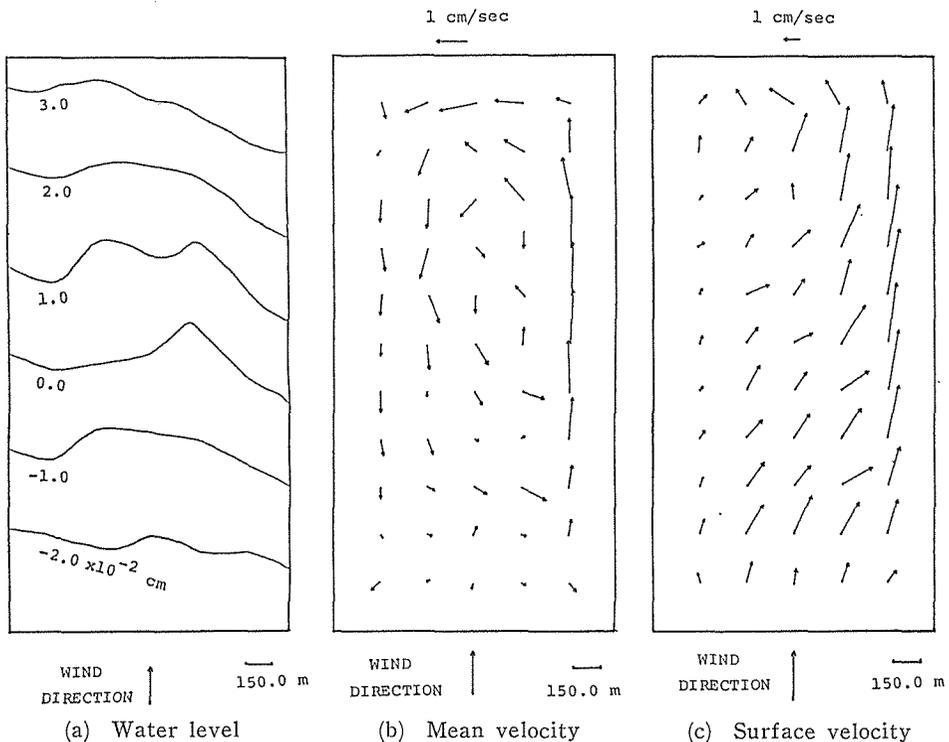


Fig. 1 Analytical results at node intervals of 250 meters

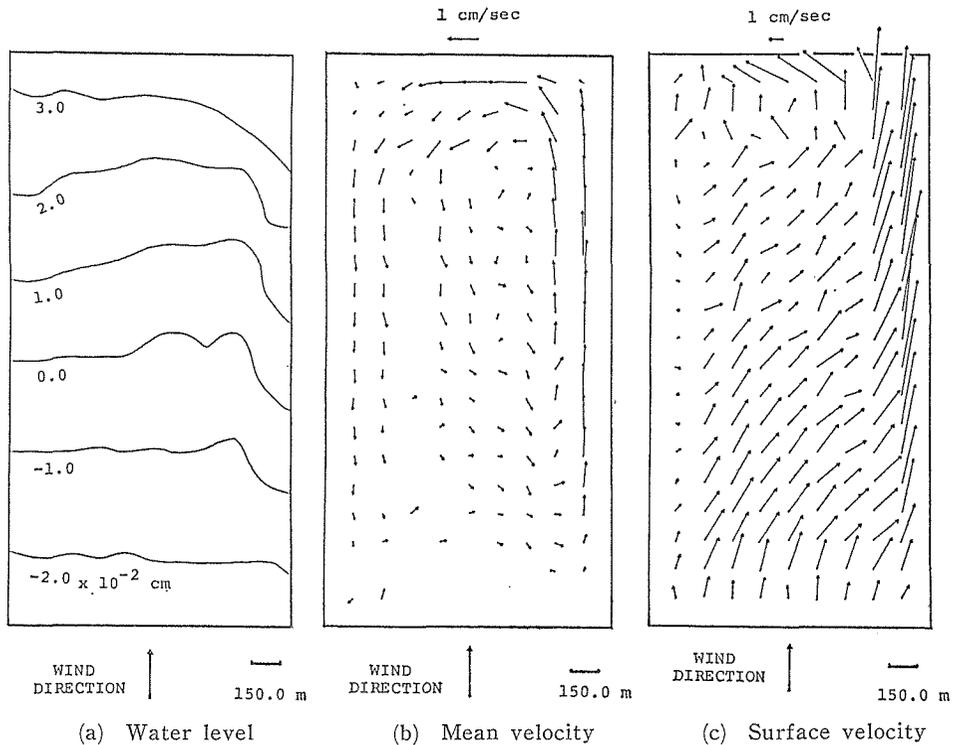


Fig. 2 Analytical results at node intervals of 150 meters

理的にはほぼ妥当な結果である。また、表面流速ベクトルが風向に対し右旋しているが、これはコリオリ力の影響によるものである。つぎに、それぞれの図の同じタイトル名のものを比較すると、節点の位置の違いによる局所的な差はあるが、3図ともほぼ同一の結果を示している。これは、水平渦動粘性係数がメッシュスケールに依存するとした前述の仮定を立証したもので、その算定法として考案した(2・14)式の妥当性をも同時に立証したものと考えられる。すなわち、湖水の流動を予測する上で重要な水平渦動粘性係数を従来行われていた数値計算の安定性からでなく、その持つ物理的根拠から推定したと言える。

### 3・2 余弦関数の選択項数について

湖底勾配の増減により湖の水容量が増減し、水面に働く風のせん断応力が一定の場合、流動の起こり易い湖になったり起こり難い湖になったりする。このため、湖底付近でも大きな流速値を持ったり、小さな流速値を持ったりし、鉛直方向流速分布も変化する。これを再現するのに必要最小限の余弦関数の項数を用いることは、計算機の利用効率を考えた場合重要であると思われる。そこで、3・1で考えた貯水池と同じ水平寸法を持ち、底面勾配が一樣なものについて検討した。底面勾配として、 $2/1000 \cdot 4/1000 \cdot 8/1000 \cdot 12/1000 \cdot 16/1000 \cdot 24/1000$ を選定した。これは最大水深が比較的多く実在しそうなものを対象としたためである。結果の図・表は紙面の都合上省略するが、底面勾配が $2/1000$ では、 $x, y$ 方向の流速について2項ずつ、 $4/1000 \cdot 8/1000 \cdot 12/1000$ では4項ずつ、 $16/1000 \cdot 24/1000$

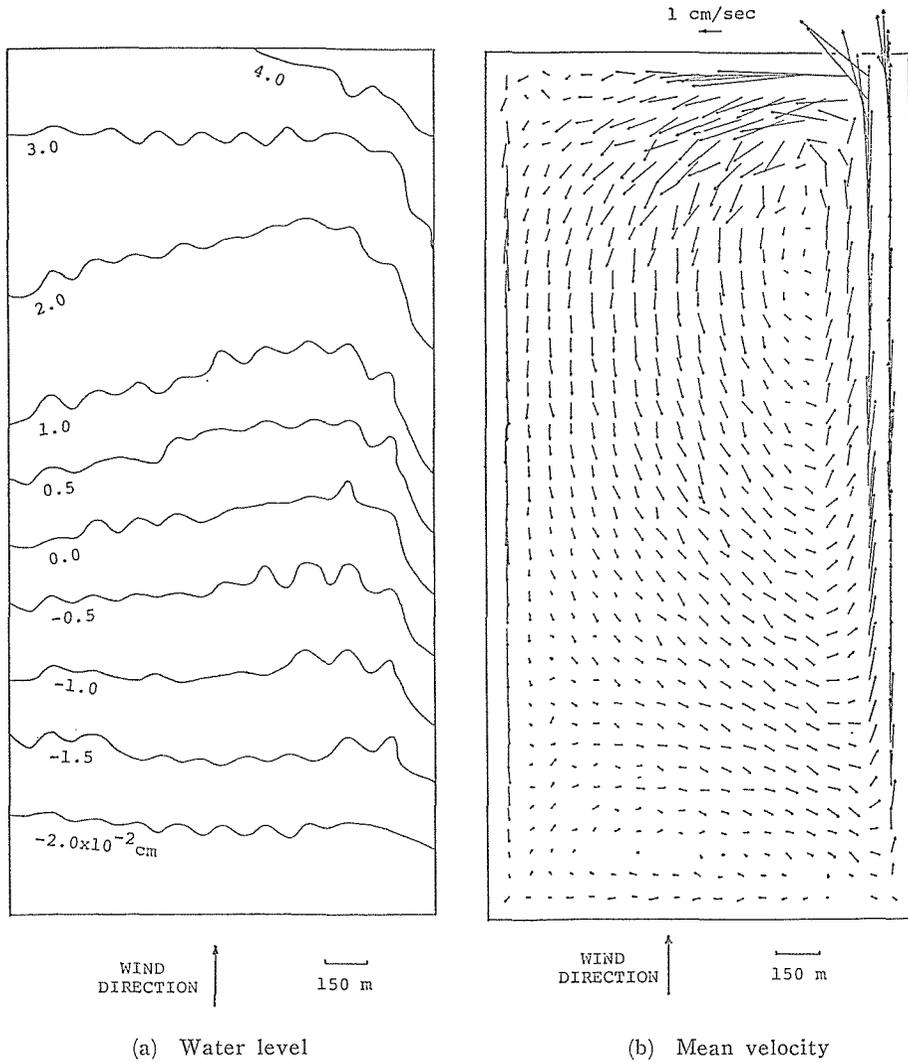
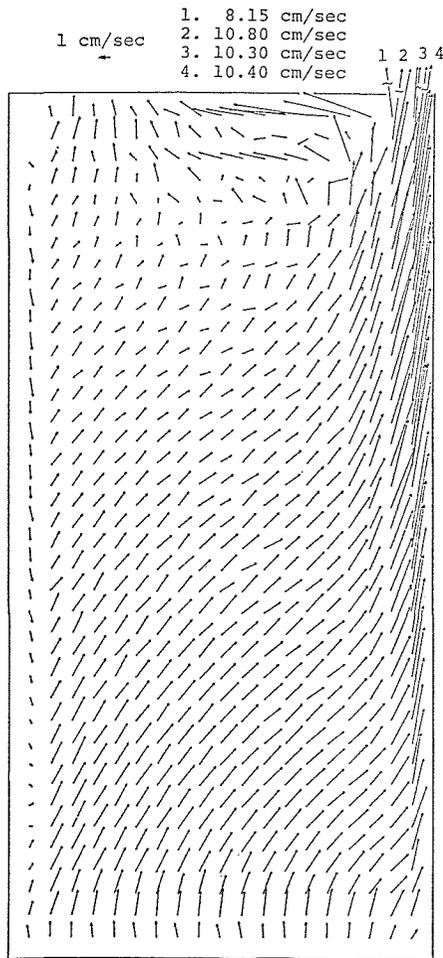


Fig. 3 Analytical results at node intervals of 75 meters

では6項ずつ選択すればよいことが判明した<sup>5)</sup>。

### 3.3 モデリング法の野尻湖への適用

本節では、3.1、3.2 で検討したモデリング法を実際の湖に適用してみる。解析対象として取り上げた野尻湖の地形特性は、代表水深40m、代表水平寸法3 km、湖水面積(満水面)4.5km<sup>2</sup>、総貯水量9.1×10<sup>7</sup>m<sup>3</sup>の湖である。本モデルにおける有限要素の離散化スケールは、水平方向へは150~300mであるのに対し、鉛直方向へは最大40mの長さであるため、 $A_H \approx A_V$ とした。各々の値については、 $A_V$ は余越・富所<sup>2)</sup>が提唱した式を用いて算定した。 $A_H$ は当初潮流解析で用いられている値を参考にして決定したが<sup>1)</sup>、湖流と潮流では流動規模・流速とも大きく違い、物理的な妥当性は保証されないため、(2.14)を使



(c) Surface velocity  
Fig. 3 Analytical results at node intervals of 75 meters

って算定し直した. 余弦関数の選択項数については, 野尻湖の湖岸・湖底地形が複雑で湖底勾配の変化も大きいため6項とした.

解析条件としては, 現地観測を行った時の風向・風速である北北東の方向から4m/secの風が, 湖面全体に一樣に吹き続ける場合を選定した. なお, 外部からの流入・流出はなく, メッシュは節点数187, 要素数292とした(図-4). 解析に用いた各係数は  $D = 40\text{m}$ ,  $L = 3000\text{m}$ ,  $U = 10\text{cm/sec}$ ,  $\tau_0 = 0.219\text{g/cm}^2\text{/sec}^2$ ,  $f = 0.0000874\text{1/sec}$ ,  $A_V = 29.7\text{cm}^2\text{/sec}$ , ( $E_V = 2.12 \times 10^{-1}$ ),  $A_H = 640.0\text{cm}^2\text{/sec}$ , ( $E_H = 8.13 \times 10^{-5}$ ),  $R_0 = 0.38$ ,  $E = 1.50 \times 10^{-4}$  である.

以上の解析条件による解析結果を図-5から図-7に示す. 図より, 水表面位は風上から風下にかけて徐々に上昇しており, 平均流速も物理的に妥当な結果である. 特に, 表面流速については現地観測結果とほぼ一致した. このことは, 水平渦動粘性係数の算定方法と余弦関数の選択項数について考えたモデリング方法により, 湖水の流動予測が行えることを十分立証したものと思われる.

## 4 現地観測

### 4.1 野尻湖の概況

野尻湖は北緯 $36^\circ 40'$ 東経 $138^\circ 40'$ にあり, 周囲が山に囲まれて山腹の傾斜がそのまま湖中へ続く山間部によく見られる湖である. また, 湖岸・湖底地形とも湖の東半分では

非常に複雑な様相を呈している. そして, 湖水は発電・飲料水にも利用されている.

### 4.2 観測結果

観測は1980年10月2日~10月4日の3日間に亘って行なった. 観測に使用した浮子は, 幅40cm, 長さ140cmの板を十字に組み, この十字板が水面下120cmの位置になるようにおもりで調節した. 水面上のポールにつけた旗は, 識別し易いように色別けし, 8個の浮子を流した. 浮子の観測は, 湖岸に設けた6つの観測点よりトランシットで旗を視準し, トランシーバーによる合図で約20分間隔で観測した. 観測は午前10時より午後3時まで行っ

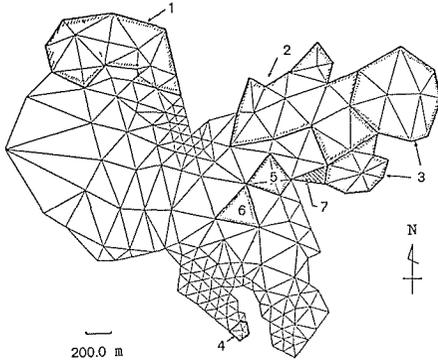


Fig. 4 Finite element meshes and variant regions of eddy viscosity in Lake Nojiri

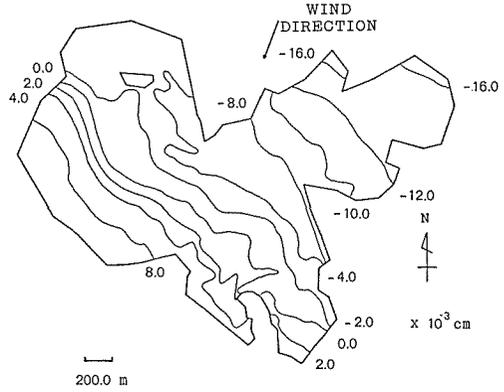


Fig. 5 Water level map

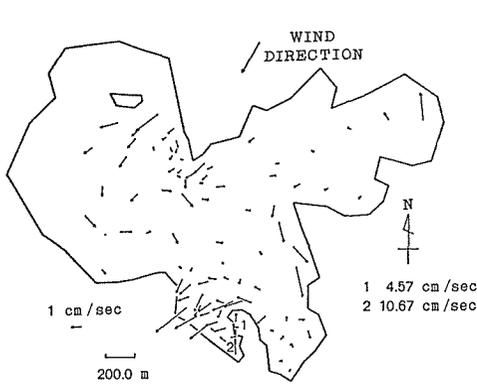


Fig. 6 Mean velocity map

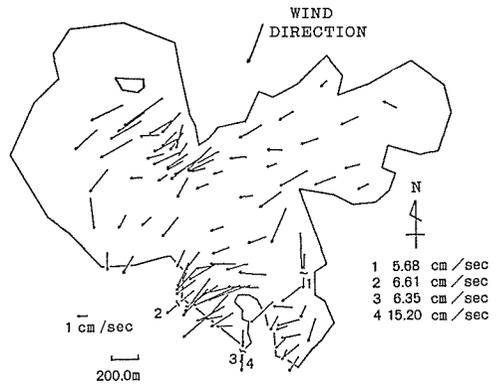


Fig. 7 Surface velocity map

Table 1 The coefficients of eddy viscosity ( $A_V$ ,  $A_H$  :  $\text{cm}^2/\text{sec}$ )

REGION	$A_V$	$(E_V)$	$A_H$	$(E_H)$
1	3.71	0.0027	508	0.000065
2	22.3	0.0159	280	0.000036
3	7.42	0.0053	692	0.000088
4	7.42	0.0053	160	0.000020
5	26.0	0.0186	266	0.000034
6	26.0	0.0186	560	0.000071
7	14.9	0.0107	321	0.000041

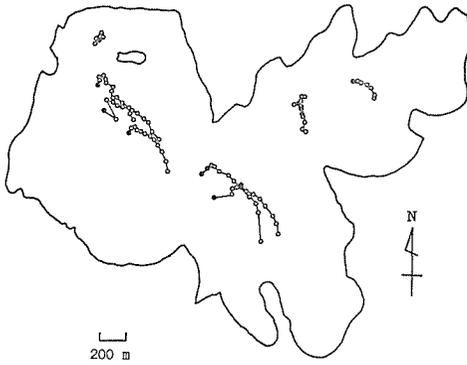


Fig. 8 Drift courses of floats  
(October 2)

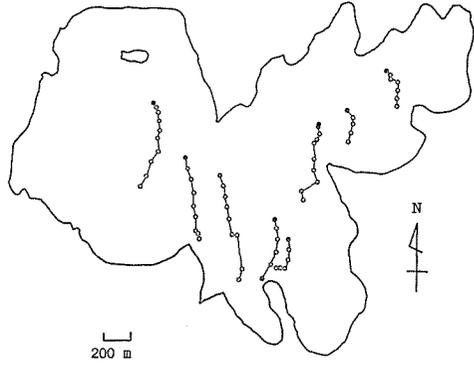


Fig. 9 Drift courses of floats  
(October 3)

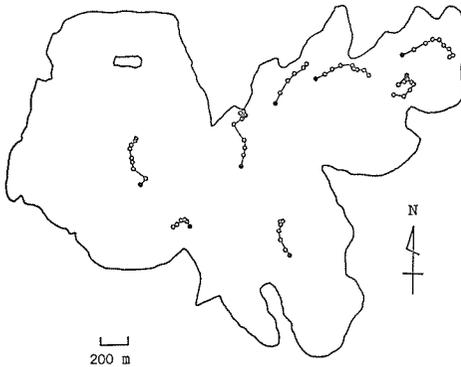


Fig. 10 Drift courses of floats  
(October 4)

た. 観測時の風向・風速は, 表-2の通りである. この季節における野尻湖は, 午前中に南風で午後より北風となることが多い. 3日間の浮子流況図を図-8から図-9に示す.

3日間とも浮子の動きにやや右旋が認められるが, 明確な右旋とはならなかった. これは, 観測時間中に風向が大きく変化したため, コリオリ効果が十分に現われるのに必要な時間が得られなかったためと思われる.

Table 2

観測日	時	風向	風速
10月2日	9:00	SE	2 m/sec
10月3日	9:00	N	1
	13:00	NNE	3.5
	13:30	NNE	4.0
	14:00	NNE	4.5
	14:30	NNE	4.0
	15:00	NNE	4.0
	10月4日	9:00	S
10:30		SE	4.2
11:00		SE	1
11:30		SES	0.2
12:00		NNE	0.2
12:30		NNE	4.0
13:00		N	3.8
13:30	N	3.8	
13:00	N	3.8	
10月5日	9:00	SE	8
10月6日	9:00	SE	4

## 5 結 論

本研究では, Galerkin 有限要素法による流動解析において, 重要なパラメーターである水平渦動粘性係数と, 鉛直方向形状関数である余弦関数の選択項数について, 貯水池に

おける数値実験より

- 1) 水平渦動粘性係数の算定には、離散化するメッシュスケールを考慮する必要がある。すなわち、水平渦動粘性係数  $A_H$  は、

$$A_H = A_V \times \left( \frac{L_1}{L_2} \right)^{\frac{4}{3}}$$

で表わされ、ここに  $A_V$  は鉛直渦動粘性係数、 $L_1$  は水平メッシュスケール、 $L_2$  は鉛直メッシュスケールである。

- 2) 余弦関数の選択項数については、湖底勾配が 2/1000 では、 $x, y$  方向の流速について 2 項ずつ、4/1000・8/1000・12/1000 では、4 項ずつ、16/1000・24/1000 では、6 項ずつ選択すればよい。

の結論を得た。また、ここに提案したモデリング法により、実在する湖として長野県北東部にある野尻湖を例に取り上げて解析した。解析結果と現地観測結果の適合性より、前述の方法を、湖水の流動予測に提案するものである。

次に、本研究における今後の課題として、基礎方程式に Fick の拡散方程式を導入することが残されている。これは、湖中の鉛直方向水温分布に躍層が存在している場合において、躍層以下の流動予測を行うには、水温変化による密度変化も考慮する必要があるためである。また、現地観測を実施する際には、風向・風速計の多点設置も述べておきたい。これは、湖面に吹く風が場所によって変化するので、これを正確に把握するためである。

最後に、現地観測に全面的に協力して下さった東北電力池尻川揚水所に感謝の意を表する次第である。

なお、本研究は文部省科学研究費により行われた。

## 参 考 文 献

- 1) R. H. Gallagher, J. A. Liggett, and Der-Liang Young ; Environmental Flow Analysis for Stratified Conditions, Finite Elements in Fluids vol. 3, John Willey & Sons, 1978
- 2) 余越正一郎・富所五郎；風による諏訪湖の流動特性, 土木学会論文報告集, 第276号, 1978年8月
- 3) T. J. Chung ; Finite Element Analysis in Fluid Dynamics, McGraw-Hill, 1978
- 4) J. J. Connor, and C. A. Brebbia ; Finite Element Techniques for Fluid Flow, Butterworth, 1976
- 5) 松本良一；湖水の流動予測に関するモデリング法, 信州大学修士論文, 1981