

拡散問題への有限要素法の応用

荒木正夫* 富所五郎** 小林三男***

(昭和53年5月31日受理)

Finite Element Approach to Diffusion Problems

Masao ARAKI, Goro TOMIDOKORO and Mitsuo KOBAYASHI

This study has applied the finite element method, originated in the structural analysis, to the unsteady diffusion problems. By using this method, the boundary conditions can easily be treated and nodes can also taken up arbitrarily. To discretize the differential equation, we have used the Galerkin finite element method in space direction and the finite difference method or Galerkin finite element method in time direction. Adopting six recurrence formulas we have analyzed one-dimensional problems, whose solutions are obtained analytically, and investigated the accuracy and stability of those numerical solutions for the various time-step intervals.

As for the accuracy and stability of solutions and the computer storage, the recurrence formula obtained from the Galerkin method using linear time shape function is the best. And the time-step interval should be compatible with the time of the flow across a typical element. Using these results, we can find the finite element method to be a powerful analytical procedure to diffusion problems.

1 序 論

近年工業生産の大規模化, 生活様式の多様化によって環境水域の水質汚染が深刻化している。火力発電所などによる温排水が沿岸漁業や海の生態に与える影響, 家庭廃水などによる湖沼の富栄養化の問題がそれであり, このような問題に対して現状の水質汚染の把握, 水質の将来予測などを行なう必要が生じている。従来これらの問題は現地観測, 模型実験などで予測されてきたが, 最近では計算機による現象を支配する微分方程式の数値解として予測が行なわれるようになってきた。

水理学の分野でのこの種の数値解析¹⁾は差分法によって行なわれることが主であった。しかし差分法では規則的な格子点を原則としているため複雑な境界の扱いがむずかしく, またより厳密な解を得るためにはより多くの格子点を必要とする。これに対し本論文は構造解析の分野で発達してきた有限要素法を乱流拡散の基礎方程式に適用しようというもので, この方法によれば複雑な境界を忠実に表現でき, また境界条件の取り入れも容易であ

* 土木工学教室 教授

** 土木工学教室 助手

*** 株式会社ユニック

り、さらに現象が急激に変化する領域では分割を細かくすることにより解の精度の向上がはかれる。

有限要素法は周知のように変分原理に基礎をおく微分方程式の近似解法であるが、水理学の分野の問題では必ずしも変分原理は存在しない。そこで本論文では重みつき残差法の一つである Galerkin 法によって有限要素定式化を行なう。この場合時間変数の取り扱いが問題となるが²⁾、本論文では空間変数には有限要素法を、時間変数には差分法などを適用して漸化式をつくり、ある初期状態よりある時間刻みごとに一步一步解を求める前進的方法を用いる。本論文では6種類の漸化式を取り上げ一次元、二次元の非定常拡散問題をしたとき、解の安定性、精度より有限要素法のこの問題への適用性について論じたものである。

2 基礎方程式

乱流拡散場を支配する微分方程式は一般に次のように表わされる。

$$\rho \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + U_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} (D_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}) \right\} + K_1 \phi - \phi_s = 0 \quad (2 \cdot 1)$$

ここに ρ ; 流体の密度, U_i ; 流速の i 方向成分, D_{ij} ; 乱流拡散係数, K_1 ; 物質の減衰定数, ϕ_s ; 物質の湧き出または吸い込み, ϕ ; 拡散物質濃度である。

解析するにあたっては現象を簡単にするため次の仮定を設ける。

- 1) 場は二次元状態であるとし、濃度の深さ方向の変化を無視する。
- 2) 流体の密度は物質濃度に関係なく一定とする。
- 3) 流速場は時間に関係なく一定とする。
- 4) 乱流拡散係数は座標軸方向の値のみとする。

以上の仮定により、座標軸を x , y とすると (2.1) 式は演算子 $L(\phi)$ により次のように表わされる。

$$\begin{aligned} L(\phi) = & \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} (D_x \frac{\partial \phi}{\partial x}) \\ & - \frac{\partial}{\partial y} (D_y \frac{\partial \phi}{\partial y}) + K_1 \phi - \phi_s = 0 \end{aligned} \quad (2 \cdot 2)$$

ここで $K_1 \rho$, ϕ_s / ρ を改めて K_1 , ϕ_s としている。

3 有限要素法による定式化

非定常問題に有限要素法を適用する方法は一通りでなく、大別すると以下のように分けられる²⁾。

(1) 時間と空間を合せた空間を考え、この空間を有限要素に分割する時空間有限要素法と呼ばれる方法。(2) 時間変数を解析的に処理する方法。例えば時間変数をラプラス変換³⁾を用い処理する方法やモード解析法など。(3) 空間変数には有限要素法を適用し、また時間変数には差分法や有限要素法を適用し漸化式を作り、初期状態よりある時間きざみ

ごとに一步一步解を求める前進の方法。このうち(1)の方法は時空間を完全に一度に離散化するため未知数が多くなること、近似方程式を与えるための支配原理(変分法や重みつき残差法)として十分に一般的なものが存在しないためそれほど使用されていない。また(2)の方法は問題によっては利用すべきであるが一般の問題、特に非線形問題には適用し難い面を持っている。そこで本論文は(3)の方法、つまり(2.2)式を次の二つの段階に分けて離散化する。

- (1) 時間変数は連続関数として残し空間変数に対して Galerkin 有限要素法を用いて離散化する。
- (2) 次に時間変数に対して差分法、または有限要素法などにより漸化式型に離散化する。ここでは(1)についてのべ、(2)は4でとり上げる。

3.1 Galerkin 法による定式化⁴⁾

いま解析しようとする領域を有限個の要素に分割して、その要素において未知数 ϕ を次のように内挿近似する。

$$\phi^a = \phi_i \cdot N_i \tag{3.1}$$

ここに ϕ_i は i 節点における ϕ の値、 N_i は形状関数、 a は近似を意味する。また右辺は総和規約に従う。

(3.1)式を(2.2)式に代入しても ϕ^a は近似値であるため $L(\phi^a)$ は0とならず、

$$L(\phi^a) = R \neq 0 \tag{3.2}$$

となる。ここに R は残差である。重みつき残差法によると最良の解は、残差 R を重み関数 W_i に関して直交させることによって得られる。重みつき残差法の一方法である Galerkin 法は重み関数として形状関数を用いるもので、この時重みつき残差式は、

$$\int_V W_i \cdot R dv = \int_V N_i \cdot L(\phi_j \cdot N_j) dV = 0 \tag{3.3}$$

である。これに(2.2)式を代入し、拡散係数を要素内で一定とすると、

$$\int_V \left\{ \frac{\partial \phi_j}{\partial t} N_i N_j + \phi_j \left(u \frac{\partial N_j}{\partial x} N_i + V \frac{\partial N_j}{\partial y} N_i - D_x \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} N_i - D_y \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} N_i + K_1 N_i N_j \right) - \phi_s \cdot N_i \right\} dV = 0 \tag{3.4}$$

となる。ここで流速成分が各節点で与えられている時は、 ϕ と同じ形状関数を用いて $u = u_k \cdot N_k$ などと内挿近似する。つぎに微分の階数を下げるために、

$$N_i \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) - \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} \tag{3.5}$$

などと Gauss の定理を用い、境界条件を考慮して、

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \phi_j}{\partial t} \int_V N_i N_j dV + \phi_j \int_V (u_k N_k \frac{\partial N_j}{\partial x} N_i + v_k N_k \frac{\partial N_j}{\partial y} N_i + D_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} \\
 & \quad + D_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + K_1 N_i N_j) dV \\
 & = \phi_j \int_{s_{ele}} (D_x \frac{\partial N_j}{\partial x} N_i \cdot n_x + D_y \frac{\partial N_j}{\partial y} N_i \cdot n_y) ds + \int_{s_2} \left(\frac{\partial L}{\partial n} \right) N_i ds \\
 & \quad + \int_V \phi_s N_i dV \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

となる。ここに n_x, n_y は(3.2)で説明する。上式において右辺第1項は、解析領域内の積分で、相隣り合う要素での積分で打ち消し合い零となる。第2項は解析境界でのその積分である。

(3.6)式の右辺第1項は要素全体で寄せ集める時零となるのでこの項を除き1つの要素についてこの式をマトリックス型に書くと、

$$[\mathbf{C}] \frac{\partial}{\partial t} \{\phi\}_e + [\mathbf{K}] \{\phi\}_e = \{\mathbf{f}\}_e \tag{3.7}$$

となる。ここに、

$$C_{ij} = \int_V N_i N_j dV \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
 k_{ij} = \int_V (u_k N_k \frac{\partial N_j}{\partial x} N_i + v_k N_k \frac{\partial N_j}{\partial y} N_i + D_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \\
 + D_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + K_1 N_i N_j) dV \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

$$f_i = \int_S \left(\frac{\partial L}{\partial N} \right) \cdot N_i ds + \int_V \phi_s N_i dV \tag{3.10}$$

である。 e は要素を意味する。

(3.7)式を解析領域全体で全ての要素の寄与を重ね集めると、次のようなマトリックス方程式が成立する。

$$[\mathbf{C}] \frac{\partial}{\partial t} \{\phi\} + [\mathbf{K}] \{\phi\} = \{\mathbf{F}\} \tag{3.11}$$

この連立方程式を与えられた境界条件、初期条件のもとに解けば拡散問題を予測することができる。

3.2 境界条件

(2.2) 式で示された拡散問題を解くに必要な境界条件は図-1 に示すようにつぎの二つに分けられる。

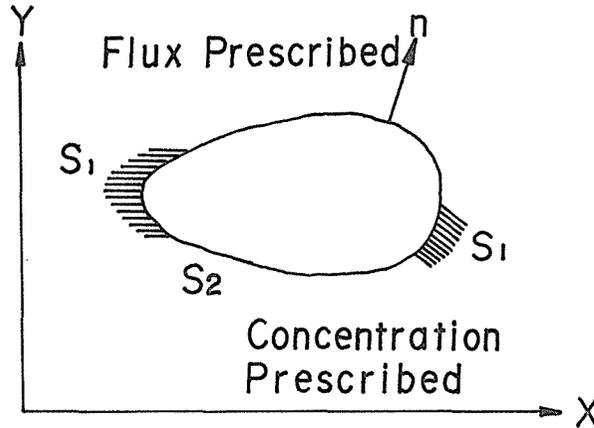


Fig. 1 Boundary conditions

- (1) 境界 S_1 において未知数が $\phi = \phi^0$ と規定される。
- (2) 境界 S_2 において未知量の勾配 $(\partial L / \partial n)^p = \partial L / \partial x \cdot n_x + \partial L / \partial y \cdot n_y$ が与えられる。
ここに n_x, n_y は境界より立てた法線単位ベクトル n の x, y 成分である

4 時間積分

(3.11) 式のマトリックス方程式は時間についての常微分方程式で、出発点での関数の値、必要であればその時間微分値によって全ての時間における関数値が一義的に定まる。これは「初期値問題」とか「前進問題」といわれ、適当な漸化式を書き下すことにより解析が可能となる。漸化式はいろいろな方法で作ることができる。たとえば差分法を直接用いてもよい、Galerkin 法を各時間区間で用いてもよい。本章ではいろいろな方法で求めた漸化式についてのべる。

4.1 差分法による漸化式

θ をパラメーターとして(3.11)式は、つぎのように一般化された形で離散化される。

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{C}] \frac{\{\phi\}_{t+\Delta t} - \{\phi\}_t}{\Delta t} + [\mathbf{K}] \{ (1-\theta)\{\phi\}_t + \theta\{\phi\}_{t+\Delta t} \} \\
 = (1-\theta)\{\mathbf{F}\}_t + \theta\{\mathbf{F}\}_{t+\Delta t}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

この式を変形して

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{\Delta t} [\mathbf{C}] + \theta [\mathbf{K}] \right) \{\phi\}_{t+\Delta t} = \left(\frac{1}{\Delta t} [\mathbf{C}] - (1-\theta) [\mathbf{K}] \right) \{\phi\}_t \\
 + (1-\theta)\{\mathbf{F}\}_t + \theta\{\mathbf{F}\}_{t+\Delta t}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

となる。ここに θ は $0 \leq \theta \leq 1$ の定数で

$\theta = 0$ 前進差分法

$\theta = 1/2$ 中央差分法, または Crank-Nicolson 法

$\theta = 1$ 後退差分法

である。また 4・3 に示すように 1 次の時間形状関数を用いる Galerkin 法を (3・11) 式に適用した場合には \mathbf{F} の項を除き $\theta = 2/3$ となる。

4・2 Wilson-Clough の方法による漸化式⁵⁾

一次の差分スキームでは、十分に小さい時間きざみを用いないと解が不安定となることがある。これに対して安定で精度のよい方法が Wilson と Clough により動的応答問題に関連して提案された。

いま Δt の時間きざみの間に $\{\partial\phi/\partial t\}$ の値が時間とともに直線的に (すなわち時間に比例して) 変化するものと仮定する。すると、時間 $t + \Delta t$ における ϕ の値 $\{\phi\}_{t+\Delta t}$ は

$$\{\phi\}_{t+\Delta t} = \{\phi\}_t + \left(\left\{ \frac{\partial\phi}{\partial t} \right\}_{t+\Delta t} + \left\{ \frac{\partial\phi}{\partial t} \right\}_t \right) \cdot \frac{1}{2} \Delta t \quad (4.3)$$

である。上式より $\{\partial\phi/\partial t\}_{t+\Delta t}$ を求め、時刻 $t + \Delta t$ における (3・11) 式に代入して

$$([\mathbf{K}] + \frac{2}{\Delta t} [\mathbf{C}]) \{\phi\}_{t+\Delta t} = [\mathbf{C}] \left(\frac{2}{\Delta t} \{\phi\}_t + \left\{ \frac{\partial\phi}{\partial t} \right\}_t \right) + \{\mathbf{F}\}_{t+\Delta t} \quad (4.4)$$

が得られる。上式において時刻 t における $\{\phi\}$ と $\{\partial\phi/\partial t\}$ の値がわかれば $\{\phi\}_{t+\Delta t}$ は求められる。普通、出発時には $\{\phi\}_{t=0}$ の値しかわからない場合が多い。この時には (3・11) 式より $\{\partial\phi/\partial t\}_{t=0}$ の値を求めることができる。つまり

$$-[\mathbf{C}] \left\{ \frac{\partial\phi}{\partial t} \right\}_{t=0} = [\mathbf{K}] \{\phi\}_{t=0} + \{\mathbf{F}\}_{t=0} \quad (4.5)$$

より出発時のこう配を求めることができる。

4・3 Galerkin法による漸化式

ここでは 1 次と 2 次の時間形状関数を用いる Galerkin 法による漸化式についてのべる。時刻を $t=0$ として $t=0$ と $t=\Delta t$ の時間区間での時間に関する線形内挿関数

$$\{\phi\} = [N_0, N_1] \{\phi_0, \phi_1\} = \left[\frac{\Delta t - t}{\Delta t}, \frac{t}{\Delta t} \right] \{\phi_0, \phi_1\} \quad (4.6)$$

を考える。ここに N_0, N_1 は形状関数で 図一 2 に示す。 ϕ_0 は初期値として既知としてよく、唯一つの重み関数を (3・11) 式に乘じ、 ϕ に (4.6) 式を代入して $0 \sim \Delta t$ の区間で積分すると

$$\left(\frac{1}{\Delta t}[\mathbf{C}] + \frac{2}{3}[\mathbf{K}]\right)\{\phi\}_{t+\Delta t} = \left(\frac{1}{\Delta t}[\mathbf{C}] - \frac{1}{3}[\mathbf{K}]\right)\{\phi\}_t + \frac{2}{(\Delta t)^2} \int_t^{t+\Delta t} \{\mathbf{F}\} t dt \quad (4.7)$$

となる。ここで $t=0$ は任意の時刻 $t=t$ としてよいので $\{\phi\}$ の添字は t と $t+\Delta t$ としている。

つぎに 2 次の内挿関数

$$\{\phi\} = [N_0, N_1, N_2] \{\phi_0, \phi_1, \phi_2\} \quad (4.8)$$

を考える。ここに N_0, N_1, N_2 は図-3 に示すような形状関数

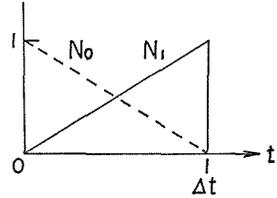


Fig. 2 Linear time shape functions

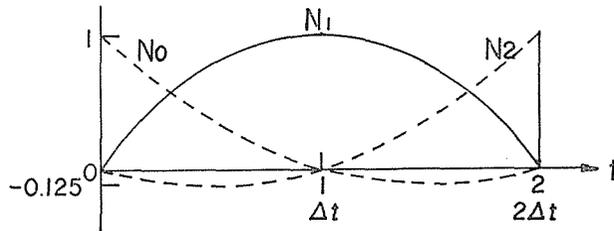


Fig. 3 Quadratic time shape functions

$$N_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{t}{\Delta t} - 1\right) \left(\frac{t}{\Delta t} - 2\right) \quad (4.9)$$

$$N_1 = \frac{t}{\Delta t} \left(2 - \frac{t}{\Delta t}\right) \quad (4.10)$$

$$N_2 = \frac{1}{2} \frac{t}{\Delta t} \left(\frac{t}{\Delta t} - 1\right) \quad (4.11)$$

である。前に同様に ϕ_0 は既知としてよいので重み関数 N_1, N_2 を (3.11) 式に乗じて $\{\phi\}$ に (4.8) 式を代入し $0 \sim 2\Delta t$ の区間で積分すると $\{\phi\}_{t+\Delta t}$, $\{\phi\}_{t+2\Delta t}$ を未知量とする連立方程式,

$$\left. \begin{aligned} &\frac{16}{15}[\mathbf{K}]\{\phi\}_{t+\Delta t} + \left(\frac{2}{15}[\mathbf{K}] + \frac{2}{3} \frac{1}{\Delta t}[\mathbf{C}]\right)\{\phi\}_{t+2\Delta t} \\ &= \left(\frac{2}{3} \frac{1}{\Delta t}[\mathbf{C}] - \frac{2}{15}[\mathbf{K}]\right)\{\phi\}_t + \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+2\Delta t} N_1\{\mathbf{F}\} \cdot dt \\ &\left(\frac{2}{15}[\mathbf{K}] - \frac{2}{3} \frac{1}{\Delta t}[\mathbf{C}]\right)\{\phi\}_{t+\Delta t} + \left(\frac{4}{15}[\mathbf{K}] + \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t}[\mathbf{C}]\right)\{\phi\}_{t+2\Delta t} \\ &= \left(-\frac{1}{6} \frac{1}{\Delta t}[\mathbf{C}] + \frac{1}{15}[\mathbf{K}]\right)\{\phi\}_t + \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+2\Delta t} N_2\{\mathbf{F}\} \cdot dt \end{aligned} \right\} (4.12)$$

が得られる。

次章では、以上の(4.2)式の $\theta=0, 1/2, 1$, (4.4)式, (4.7)式, (4.12)式の6種類の漸化式を一次元問題に適用し解の安定性, 精度よりみたこれらの漸化式の特性的について論じることとする。

5 数 値 解 析

前章までに Galerkin 有限要素法を非定常拡散問題に適用する方法について述べ、時間積分に関する各種の漸化式を導びいた。この章では解析解の得られる一次元問題にこれらの式を適用し、得られる解の安定性, 精度などより計算ステップの時間きざみ幅, および各種の漸化式解に対する特性を検討する。さらに得られた結果を応用して二次元問題に有限要素法を適用してみる。

5.1 一次元問題⁶⁾

一次元の拡散方程式は流れの方向を x 軸方向にとると(2.2)式より $\phi_s=0$ として、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} - D_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + K_1 \phi = 0 \quad (5.1)$$

である。この式の解析解が得られるのは、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2\alpha \beta \frac{\partial \phi}{\partial x} - \alpha \beta^2 \phi = 0 \quad (5.2)$$

の形に(5.1)式を置換えた場合であり、ここに $\alpha=D_x$, $2\alpha\beta=u$, $\alpha\beta^2=-K_1$ である。この時には D_x , u , K_1 は任意にとることはできなく α , β の値により決定される。ここで $\alpha=D_x$ は正であるので K_1 は負となる。このようなことは実際の問題にはないが数値解と解析解と比較するためにあえて(5.2)式のように置いた。境界条件

$$\phi(0, t) = 0, \quad \phi(L, t) = \phi_0 \quad (5.3)$$

と初期条件

$$\phi(x, 0) = \phi_0 \cdot \delta(x - L) \quad (5.4)$$

に対する(5.2)式の解は

$$\phi(x, t) = \phi_0 \cdot \exp\{\beta(x - L)\} \left\{ \frac{x}{L} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \alpha t\right) \cdot \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \right\} \quad (5.5)$$

である。ここに δ は Dirac のデルタ関数である。

(5.2)式の有限要素法による数値解は幅6m, 長さ201.0mの矩形領域に図-4にその一部を示すような三角形のメッシュを組み、二次元問題に対する(3.11)式で $v=0$, $D_y=10m^2/sec$ と仮定して解いた。なお要素は三節点要素である。また後に示す計算例では、(4.2)式の $\theta=0$ の場合は解が全て不安定となったため結果は示していない。

5.2 時間きざみ幅

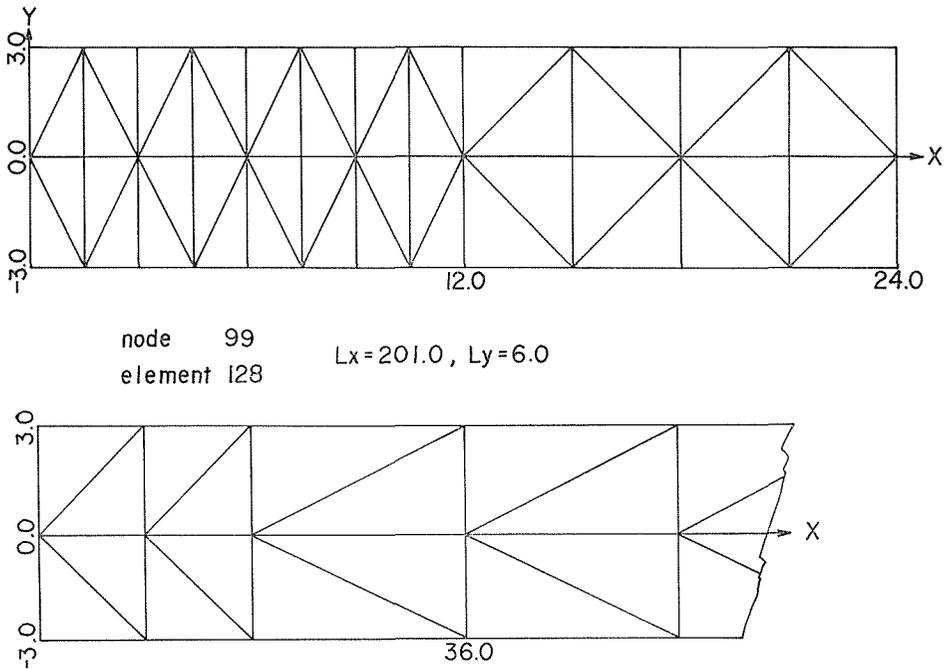


Fig. 4 Finite element mesh of one-dimensional models (length unit ; m)

時間きざみ幅 Δt は解の安定性や精度に非常に大きな影響を持っており、これらの面から許される最大の時間きざみ幅をとることが計算時間のうえから望ましい。熱伝導問題、つまり (5.1) 式で左辺第 2 項、第 4 項のない場合に対する安定条件式⁸⁾は理論的に導びかれている。しかし (5.1) 式に対する安定条件式の理論的誘導は現在のところ不可能である。この問題に対する時間きざみ幅は経験的に、流れが代表的要素 (現象の変化の激いところの要素、つまり最小の要素) を横切る時間以下にすることが必要である。つまり、

$$\Delta t = K \cdot \Delta x / u \quad (1 \geq K > 0) \quad (5.6)$$

である。ここに Δx は代表的要素幅である。

図-4 では $\Delta x = 3m$ であるので $K=1$ として $\Delta x = 1.5sec$ である。そこで $\Delta t = 1.5sec, 0.75sec, 0.3sec, 0.15sec$ として解の安定性や精度をみることにする。解析条件は

$$\left. \begin{aligned} \text{境界条件 : } \phi(0, t) = 10.0, \phi(201m, t) = 0.0 \\ \text{初期条件 : } \phi(x, 0) = 10.0 \cdot \delta(x) \\ D_x = 10.0m^2/sec, u = 2.0m/sec, K_1 = -0.1 \cdot 1/m^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

である。解析解の厳密解は原点を $-201m$ に移し x 軸の正方向を逆にすると $\alpha = 10.0m^2/sec, \beta = -0.1 \cdot 1/m^2, L = 201m$ として (5.5) 式を用い求めた。図-5 に (4.7) 式を用いた時の各時間きざみ幅に対する $x = 1.5m$ の地点の ϕ の値を示す。 Δt が大きいと解は振動するが、計算ステップ数が大きくなると減衰し厳密解に近づく。図-6 には $\Delta t = 1.5sec$ の

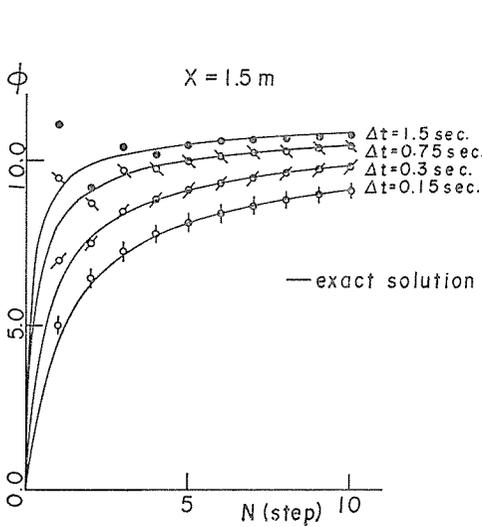


Fig. 5 Stability of solutions for various time-step intervals

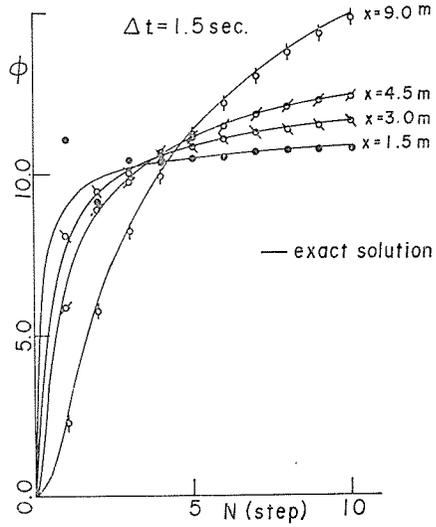


Fig. 6 Stability of solutions for various positions

時の $x=1.5\text{m}$, 3.0m , 4.5m , 9.0m の地点の各計算ステップにおける ϕ の値を示す。これより原点、つまり濃度放出点より離れると解は急速に安定に向うことがわかる。つぎに図-7は(5.7)式の解析条件において D_x, K_1 の値を変化させたもので解析解との比較はできないが D_x, K_1 とも零に近づくと解の安定性が増すと言える。

以上より総合すると時間きざみ幅は、計算の初期のステップでの濃度の放出点近くの解の振動が無視できるならば $\Delta t = \Delta x / u$ としてよいと言える。

5.3 各種の漸化式の特性

ここでは各種の漸化式を用いた時の解の安定性と精度について調べてみる。図-8は $\Delta t = 1.5\text{sec}$ として $x = 1.5\text{m}$ の地点の各計算ステップに対する ϕ の値を示したものである。図より $\theta = 1$ が最も安定であり、 $\theta = 1/2$ は激しい振動を示し、 $\theta = 2/3$,

Wilson 法, Eq(4.12)はこれらの中に位置すると言える。しかし図には示さないが、原点より遠ざかるにしたがいの漸化式による解も、図-6のように急速に安定性を増す。安定性の点からが $\theta = 1$ が最も優れていると言えるが精度はどうであろうか。図-9, 10

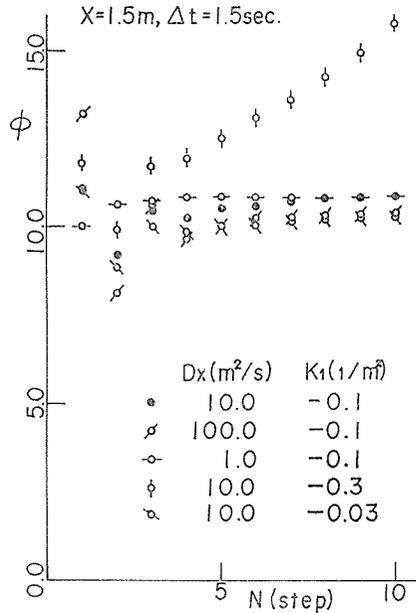


Fig. 7 Stability of solutions for various constants

は $\Delta t=1.5\text{sec}$ とした時の第1, 第5計算ステップの ϕ の値を示したものである。これらの図より Eq (4.12) が最も精度がよく、つぎに $\theta=2/3$, $\theta=1/2$ と続く。解の安定性, 精度両面からみると Eq (4.12) が最も優れていると思える。しかしこの方法は(4.12)式よりわかるように他の方法に比し連立方程式の未知数が2倍であり, 実際問題においては計算機の容量による制約を受けることがある。

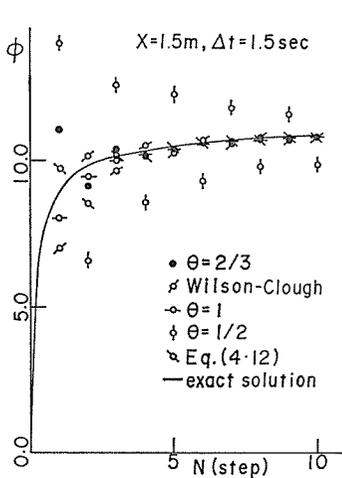


Fig. 8 Stability of solutions for various time-stepping schemes

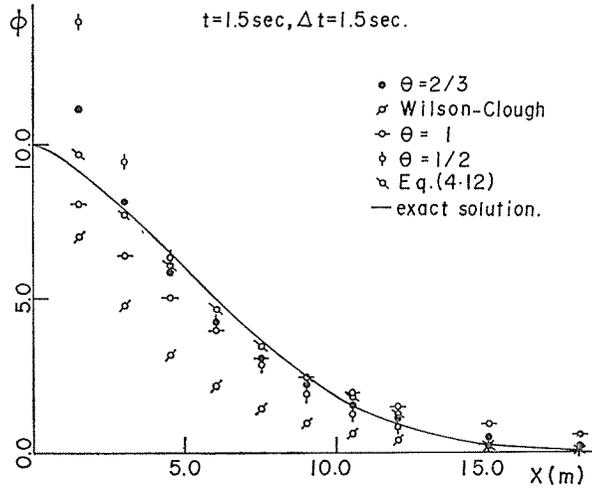


Fig. 9 Accuracy of solutions for various time-stepping schemes

そこでつぎの二次元問題には $\theta=2/3$, つまり1次の時間形状関数を用いた Galerkin 法による漸化式を用いる。

5.4 二次元問題

二次元問題は境界条件, 初期条件とも複雑で一般に解析解をうることは不可能である。このためこれらの問題の数値解析の検証には実測や実験が必要となる。しかしここでは利用できる資料がないので, 得られた解が拡散現象の物理的観点からみて妥当なものかどうかみるにとどめる。

ここでは発電所などからの温排水を流れのほとんどない水域

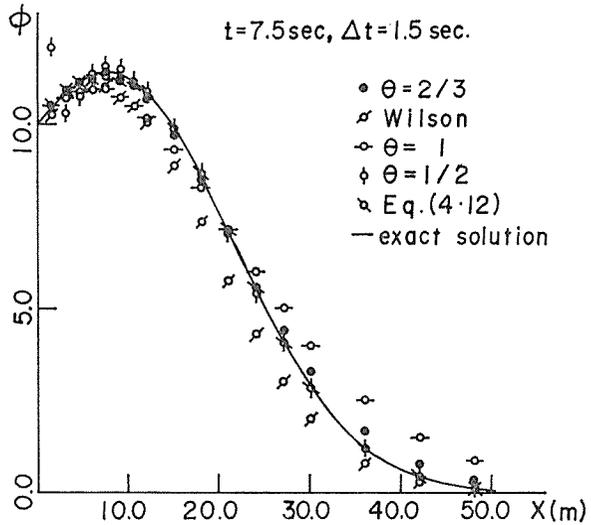


Fig. 10 Accuracy of solutions for various time-stepping schemes

へ放出する問題として幅 330m, 流速 0.1m/sec の流れに直角に幅 20m, 流速 1.5m/sec の温排水を放出する場合を考えた. 解析領域は図-11に有限要素メッシュを示すように x 方向 $L_x=520m$, y 方向 $L_y=330m$ である. 流速場は平均流速 $u=0.1m/sec$ に放出流速 $v=-1.5m/sec$ のスロットジェットによる流速を重ね合わせたものとした. ジェットの流速計算には Anderson らの公式⁹⁾を用いた. 拡散係数と減衰係数としては和田の論文¹⁰⁾を参考にして,

放出口附近で $D_x = D_y = 100m^2/sec$,
 $K_1 = 0.001 \cdot 1/sec^2$

他の領域で $D_x = D_y = 10m^2/sec$, $K_1 = 0.00001 \cdot 1/sec^2$

とした. また初期条件は放出口で $\phi = 10.0$, 他は全て $\phi = 0.0$ とし, 境界条件は放出口で $\phi = 10.0$ とした. これらの条件は流れの水温を 0.0 とし放出水の水温とこれとの差を 10.0 としたことを意味する. 時間きざみ幅は, 放出口附近の y 方向の要素寸法が 5m 流速が 1.5m/sec であるので $\Delta x/u = 3.3sec$ となり, これより小さい $\Delta t = 2.5sec$ とした.

以上の条件のもとに (4.7) 式を用いて解いた結果を図-12~図-14に示す. 図-12は図-13に示す位置での各計算ステップにおける ϕ を示したもので, 一次元の場合と同じように放出口より離れるに従い解は急速に安定に向う. 図-13, 14は計算ステップ 8 と 27, つまり放出後 20 秒, 67.5 秒後の ϕ の分布を示したもので物理的にみてほぼ妥当なものと思える.

6 結 論

本研究は Galerkin 有限要素法の非定常拡散問題への適用性についてのべた. この場合の時間積分法は前進的方法で前進差分法, 中央差分法, 後退差分法, Wilson-Clough 法. 1次および2次の時間形状関数を用いる Galerkin 法による6種の漸化式により1次元拡散問題をとぎ, 解の安定性, 精度より時間きざみ

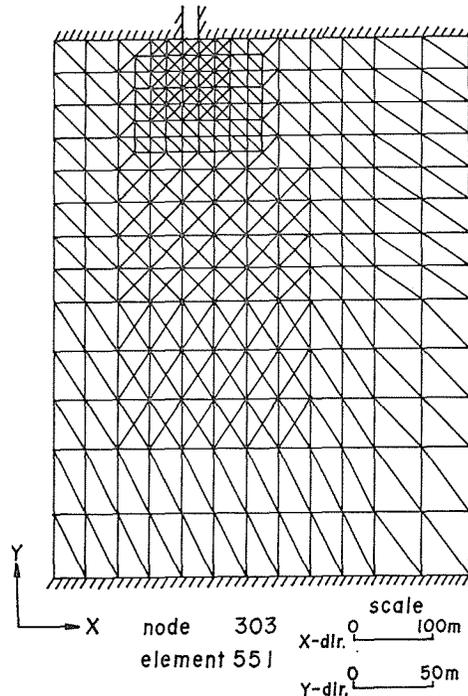


Fig. 11 Finite element mesh of two-dimensional models

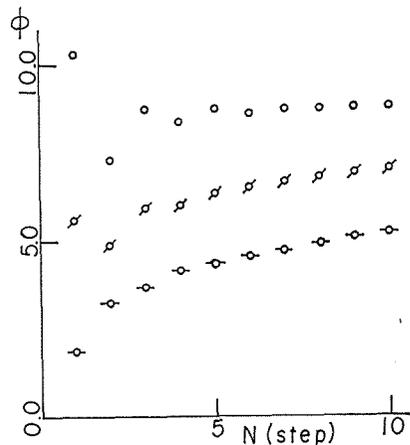


Fig. 12 Stability of solutions for various positions (Symbols indicate positions in Fig. 13)

幅の大きさおよび各漸化式の特
性について検討した。

時間きざみ幅は、現象が急激
に変化する状態での解の多少の
振動を許すならば流れが代表的
な要素を横切る時間としてよい。
また6種の漸化式のうち解の安
定性、精度および計算機容量の
全ての立場からみて1次の時間
形状関数を用いた Galerkin 法
による漸化式が最も良いと思
える。これらの一次元問題に対
して得られた結果は二次元問題
にも応用できる。つまり Galerkin
有限要素法は非定常拡散問題の
数値予測の有力な手段である
と思える。

つぎに本研究の問題点を挙げ
ると、一般に流速や密度は深さ
方向に一定でなく濃度の変化も
無視できないことが多い。これ
は特に温排水問題について言
えるが、この時には三次元解析
が必要となる。しかし三次元解
析は未知数が増え計算時間や計
算機容量の制約を受け不可能と
なることが多い。上の制約を除く
方法として、深さ方向には連
続な試験関数を用い未知数を少
なくする¹¹⁾とか、時間積分に陽
的差分法を用いた漸化式を作り
、質量マトリックスの集中化を
行ない連立方程式をとくこと
なく解を求める方法¹²⁾など
があるが、これは今後の研究課
題である。

なお、本研究の数値計算は信
州大学データステーションを通
じ東京大学大型計算機 HI
TAC 8800/8700 で行なった。

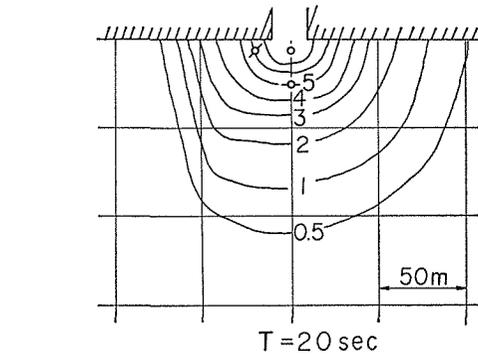


Fig. 13 Diffusion pattern

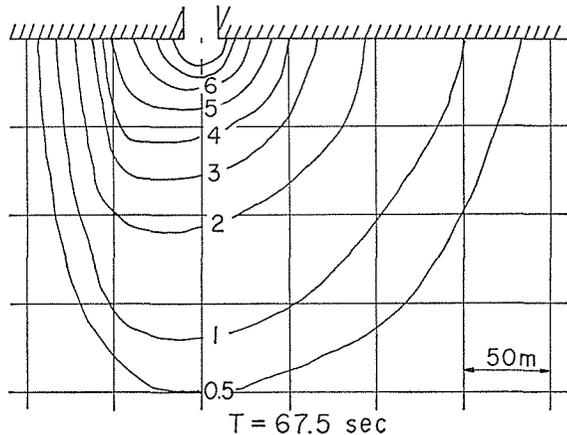


Fig. 14 Diffusion pattern

参 考 文 献

- 1) 土木学会編；土木工学における数値解析／流体解析編，サイエンス社，(1974)
- 2) 菊地文雄；時間積分法の概説，有限要素法における講習会テキスト，日本鋼構造協会，(1977)
- 3) Liggett, J.A., et al ; Transient Finite Element Shallow Lake Circulation, ASCE, vol. 103, HY2, (1977)
- 4) Zienkiewicz, O.C., ; The Finite Element Method, McGraw-Hill, (1977)
- 5) 吉識雅夫訳；マトリックス有限要素法 (第1版)，培風館，(1965)

- 6) Loziuk, L. A., et al, ; Transient Hydrothermal Analysis of Small Lakes, ASCE, PO2, (1973)
- 7) Conner, J.J., et al, ; Finite Element Techniques for Fluid Flow, McGraw-Hill, (1976)
- 8) Fujii, H., ; Some Remarkes on Finite Element Avalysis of Time-Dependent Field Problems, Theory and Practis in Finite Element Structual Analysis, University of Tokyo Press, (1973)
- 9) Albertson, M.L., et al, ; Diffusion of Submerged Jets, Transaction of ASCE, (1948)
- 10) Wada, A., ; Effect of Current on Process of Thermal Diffusion of Warmed Cooling Water in the Sea, Report of Technical Laboratory, Reseach Institute of Electric Power Industry, No. 71008, (1972)
- 11) 荒木・富所, ; FEMによる潮流解析への一提案, 土木学会中部支部講演概要集, (1978)
- 12) 川原・大森, ; 平均型2段階ラックスウエンドロック有限要素法について, 土木学会年次学術講演会概要集, (1977)