

Legendre 多項式を用いた線形粘弾性体の 近似解析

三井 康 司*
(昭和52年10月31日受理)

An Approximate Analysis of Linear Viscoelastic Bodies by Using Legendre Polynomials

Yasushi MITSUI

In this paper an approximate method is presented for the analysis of viscoelastic bodies and its numerical examples are shown. The linear viscoelastic problem is converted into the elastic problem based on the Elastic-Viscoelastic Analogy. This equivalent elastic problem is numerically solved by using the finite element method. And the final solution is obtained by the approximate inverse Laplace transform developed in Legendre polynomials.

The analytical method presented herein is quite simple in comparison with the time-incremental method, and the calculation is produced only by repeating the usual analysis of correspondent elastic continuum several times. The total computer time required is only about ten times as much as that needed for a single elastic solution.

1 緒 言

土木、建築等の建設部門や航空、造船をも含む機械部門での主材料であるコンクリート、土、プラスチック、木材、高温時での金属等は多かれ少なかれ粘性挙動を示すことは周知の事実である。近年富に建造物自体の設計に高度の安全性と経済性とが強く要求されつつあるが、このような材料の経年特性を考慮して構造物を解析することは今後増々必要となってくるであろうし、また大記憶容量を有する大型計算機の発達に伴って可能となってきた¹⁾。

粘弾性問題の研究状況は大きく3つの分野に分けて概観することができよう。第1の分野はコンクリート、土、高分子化合物等の粘弾性材料の構成方程式を種々の条件下で考察し厳密な応力-ひずみ関係を高い精度での実験解析より見いだすことである。たとえば赤井らは時間依存性を有する土質材料の構成方程式を確立する過程で飽和粘土の時間効果を

* 土木工学教室 助手

実験的に解析している²⁾。またモルタル、コンクリートの破壊付近の粘弾性挙動を追跡している研究も多く、桜井は破壊付近の高応力下におけるクリープ変形と破壊を対象として現象論的立場からそのメカニズムを考察している³⁾。西林らはコンクリート供試体の破壊前後の応力一ひずみ挙動の解明に焦点を絞って高ひずみ下の緩和現象を実験的に取り扱っている⁴⁾。この他にもモルタル、コンクリート、アスファルト等のクリープ、緩和現象を実験的に解明しようとする研究は多い^{5)~9)}。

粘弾性体を簡単なレオロジーモデルに置換しようとする考え方は以前よりあるがこのモデル定数の決定も高度な実験技術を要する。赤木らは静定クリープ試験より一般的なレオロジーモデルの定数決定法を示しており¹⁰⁾、また軸圧、側圧の比を異にする二つのクリープ試験の結果より Maxwell 材料と見なした場合のコンクリートの緩和関数を求めている¹¹⁾。また座古らはスライダを挿入した三次元力学モデルを複合材料に適用し、実験と比較検討している¹²⁾。また Biot は異方性の粘弾性体における構成方程式を考察している¹³⁾。

第2は以上の構成方程式を用いて粘弾性挙動を示す材料より成る構造物全体の粘弾性挙動を追跡する研究分野である。たとえば赤木らは有限要素法によりコンクリートPC格納器のクリープとPC鋼材の応力緩和を計算している¹⁴⁾、Zienkiwicz も温度影響を考慮したコンクリートの粘弾性解析を行なっている¹⁵⁾。また Kawamura はコンクリートの収縮問題を4要素レオロジーモデルを用いて解析している¹⁶⁾、Eugene は舗装問題を弾性床土上の粘弾性問題として解析し、舗装計算に新しい提起を行なっている¹⁷⁾。また高橋らは近年富に問題化されているPCPV（プレストレストコンクリート原子炉圧力容器）のクリープ解析と実験値との比較をしており¹⁸⁾、このように粘弾性特性を考慮したコンクリート構造物の解析は多く見られる^{19), 20)}。

土質工学の分野でも土を粘弾性体として取り扱おうとする気運があり、桜井らは地山を線形粘弾性体と仮定し、地中構造物に作用する終局圧力を理論的に求める方法について提案し、円形トンネル覆工を解析している²¹⁾。また斉藤らは土の挙動を一般化された Maxwell モデルを用い、応力一ひずみ関係を緩和関数あるいは遅延関数で表示し、増分法を用いてシールド外周地盤の解析を行なっている^{22), 23)}。また Booker は土のクリープ特性を考慮して杭の沈下計算を行なっている²⁴⁾。この他にも土の粘弾性挙動を考慮して構造系を解析することの重要性を示唆している研究は多い^{25), 26)}。

機械工学の分野でもクリープ解析は重要な問題であり、たとえば村上らはひずみ硬化理論と時間硬化理論を仮定し、内圧を受ける円筒かくくに適用し、その遷移クリープ変形を解析している²⁷⁾。また速水はさく岩用ロッドの動的挙動の解明のために、さく岩用ロッドを粘弾性体として理論的、実験的検討を行なっている²⁸⁾。

また粘弾性体の動的問題を取り扱った研究も多く見られる^{27)~36)}。

第3は大型計算機と多量の計算時間を必要とするこのような粘弾性体解析を効率よく簡便に解析するための手法を研究する分野である。粘弾性解析は他の非線形解析と同様通常は増分理論で計算を行なっている。ただし弾塑性問題や大変形問題では荷重を増分量にとるのに較べて粘弾性解析では時間が増分量となる。川原らは粘弾性体の応力一ひずみ関係がレオロジーモデルで与えられる場合を対象とし、この関係が補助変数を用いて表示すると一階の連立方程式系により表わされ、この時点で時間に関する微分を差分に置き換え増

分法で計算している³⁹⁾。また Zienkiwicz は有限要素法を用い複雑な境界条件を有する推進燃料の数値解析を行なっている⁴⁰⁾。また矢川らは有限要素法を用いる場合の増分形による定式化を検討している⁴¹⁾。以上のように粘弾性体の解析手法としては構成方程式を増分形によって定式化するのが正統的なものと思われる^{42)~44)}。

しかし Lee によって確立された“弾性-粘弾性対応原理”は線形粘弾性問題を比較的取り扱い易いものにしてている⁴⁵⁾。この原理によれば線形粘弾性体の解はこれと同じ形状、境界条件を有する弾性問題における弾性定数を Laplace 変換パラメータを含む粘弾性定数で置換しこれによる解を Laplace 逆変換することにより所要の粘弾性問題の解が得られる。しかしこの対応原理を用いる場合の最大の問題点は Laplace 像空間での粘弾性の解が物理面に容易に逆変換されるかどうかという点と、有限要素法に代表されるように窮極的には連立一次方程式を解くことに帰する解析手法を用いる際は、Laplace 像空間での式表示のまま逆変換できない点である。このために逆変換を近似的に数値で行なうことが試みられている。たとえば田中は対応原理を用いる際の Laplace 逆変換を Dynamic programming の手法で数値解析しているし⁴⁶⁾、Booker は Laplace 逆変換式を固有値の級数和として表わし数値的に逆変換している⁴⁷⁾。また草間らは粘弾性材料の構成方程式が指数関数で表示されることに注目し、物理面での構造体の挙動を近似的に指数関数で仮定し、数値的に Laplace 逆変換を行なっている^{53), 54)}。これらの数値 Laplace 逆変換の手法は過渡応答解析にも用いられ、たとえば小林らは熱伝導問題に、Laplace 変換を施したものを積分方程式によって解き、これを数値 Laplace 逆変換によって解をだしているし⁴⁸⁾、台丸らは動的粘弾性問題の解法に Laplace 変換を適用し、級数展開法によって数値逆変換を行なっている⁴⁹⁾。

一方境界条件が刻々変化する接触問題は対応原理が成立しないので解析はより複雑となり^{50), 51)}、また微小変形理論では不都合な場合もあり、有限変形理論による解析もある^{30), 52)}。

以上のような粘弾性体の研究状況の中で本研究は第3項目の分野に属するものといえる。対象物の粘弾性挙動をなるべく簡便に把握するために対応原理を使用し、Laplace 逆変換は数値的に行なおうとするものである。Laplace 逆変換は先にも述べたように種々の方法があるが、Cost によれば Papoulis は Legendre 多項式の偶関数を用いて物理面での粘弾性挙動を表示する方法を提案した⁵⁷⁾。本研究はこの Legendre 多項式を用いた1次元近似解法を2次元連続体に拡張し、有限要素法による解析手法を提示したものである。本法によれば通常の弾性連続体における有限要素法による解析手続きを数回行なうのみで所要の粘弾性連続体解析を得ることができ、時間増分法に較べてかなりの経済性が期待できるものである。この手順はもちろん、差分法、有限帯板法等に拡張できるものである。

2 Legendre 多項式による数値 Laplace 逆変換

まず Papoulis の提起した Legendre 多項式による数値 Laplace 逆変換の近似解法の概略を述べる。

時間 t に関する原関数 $f(t)$ の Laplace 変換を $\bar{f}(s)$ とすると $\bar{f}(s)$ はつぎのようになる。

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt. \quad (1)$$

$\bar{f}(s)$ の逆変換を行なって $f(t)$ を求めようとするには正統的にはつぎの複素反転公式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} \bar{f}(s) ds$$

によるべきであるが $\bar{f}(s)$ のようすによっては必ずしも容易ではない。まして $\bar{f}(s)$ の表示式自身も簡単に表わされない場合は理論的に解く手続きがわかっているても実用に供し得る $f(t)$ の状況を知ることは困難である。これを解決する手段として数値 Laplace 逆変換の手順が必要となってくる。

まず $x = e^{-t/\gamma} (\gamma > 0)$ と変数変更すると、

$$f(t) = f[-(1/\gamma)\ln x] \equiv \hat{f}(x). \quad (2)$$

また式 (1) は

$$\gamma \bar{f}(s) = \int_0^1 x^{(s/\gamma)-1} \hat{f}(x) dx, \quad (3)$$

となり Laplace の変換パラメータ s を

$$s = (2k+1)\gamma, \quad (4)$$

とおくと式 (3) はつぎのようになる。すなわち、

$$\gamma \bar{f}(2k\gamma + \gamma) = \int_1^0 x^{2k} \hat{f}(x) dx. \quad (5)$$

式(5)の $\hat{f}(x)$ を与え $\bar{f}(2k\gamma + \gamma)$ を求めることは Laplace 変換を数値的に行なうことであり、左辺 $\bar{f}(2k\gamma + \gamma)$ を数値的に与え、 $\hat{f}(x)$ を求めることが数値 Laplace 逆変換である。

式(5)の $\bar{f}(x)$ を、Legendre 多項式の偶関数を用いて式(6)のように表わすと、 $\hat{f}(x)$ は $[-1, 1]$ で直交性を有しかつ $\hat{f}(x) = \hat{f}(-x)$ となる。

$$\hat{f}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j P_{2j}(x). \quad (6)$$

ここに C_j は j 番目の係数であり、 P_{2j} は Legendre 多項式の偶関数を表わし、一般的には式 (7) のようになる。

$$P_n(x) = \sum_{\mu=0}^{\leq n/2} (-1)^\mu \frac{(2n-2\mu)!}{2^n \mu! (n-\mu)! (n-2\mu)!} x^{n-2\mu}. \quad (7)$$

式 (7) において、 $\leq n/2$ の意味は n が偶数の場合は $n/2$ を、 n が奇数の場合には $(n-1)/2$

を表す. たとえば n の小さいものを書くと,

$$\left. \begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2} (3x^2 - 1), \\ P_4(x) &= \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3), \\ P_6(x) &= \frac{1}{16} (231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5), \\ P_8(x) &= \frac{1}{256} (12870x^8 - 24024x^6 + 13860x^4 - 2520x^2 + 70), \\ P_{10}(x) &= \frac{1}{1024} (184756x^{10} - 437580x^8 + 360360x^6 - 120120x^4 \\ &\quad + 13860x^2 - 252), \end{aligned} \right\} (8)$$

などとなる.

式 (6) の x に $e^{-\gamma t}$ を代入して $P_{2j}(e^{-\gamma t})$ を Laplace 変換すると,

$$\bar{P}_n(s) = \frac{(s-\gamma)(s-3\gamma)\cdots\{s-(n-1)\gamma\}}{s(s+2\gamma)(s+4\gamma)\cdots(s+n\gamma)}, \quad (9)$$

となるから $\hat{f}(e^{-\gamma t})$ の Laplace 変換を $\bar{f}(s)$ とすると,

$$\bar{f}(s) = \frac{C_0}{s} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(s-\gamma)(s-3\gamma)\cdots\{s-(2j-1)\gamma\}}{s(s+2\gamma)\cdots(s+2j\gamma)}. \quad (10)$$

いま s の関数である式 (10) に $s = \gamma$ を代入すると,

$$\gamma \bar{f}(\gamma) = C_0, \quad (11)$$

となり $\bar{f}(\gamma)$ が既知であれば C_0 が決定できる. つぎに同じく式 (10) に $s=3\gamma$ を代入すると,

$$\gamma \bar{f}(3\gamma) = \frac{1}{3} C_0 + \frac{2}{15} C_1. \quad (12)$$

式 (11) を式 (12) に代入すると C_1 が決定できる. これを順次繰返し計算する. 一般に $s = (2j+1)\gamma$ を代入したときの j 項目の係数 C_j はつぎの式より決定される. すなわち,

$$\begin{aligned} \gamma \bar{f}(2j\gamma + \gamma) &= \frac{1}{2j+1} C_0 + \frac{2j}{(2j+1)(2j+3)} C_1 + \cdots \\ &\quad + \frac{2j(2j-2)\cdots 2}{(2j+1)(2j+3)\cdots(4j+1)} C_j. \end{aligned} \quad (13)$$

このように Legendre 多項式は $[-1, 1]$ で直交性があるので係数 C_j を決定する際, 連立方程式を解く必要がない. 一般にこの種の問題での係数決定のための連立方程式を解く

作業は逆行列を求める際, ill-condition になる場合が多い. このことから連立方程式を解くことなしは順次係数が決定できるということは直交関数の利点である.

ここで r のとり方について概略する. Legendre 多項式の x の変数変換で $x = e^{-rt}$ としていることより rt の条件はつぎのようになる. すなわち,

$$-2 < \log rt < 1.57$$

ここで考察すべき t が規定されることより r が決定できる.

3 粘弾性板の引張問題

本解法の精度を検証するために厳密解の既知である図1に示す粘弾性板の引張計算を行なう⁵⁵⁾. この粘弾性板はつぎの材料特性を有するものとする. すなわち,

$$\left. \begin{aligned} C_G(t) &= 0.04 - 0.02 \exp\left(-\frac{t}{2}\right), \\ C_K(t) &= 0.008. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

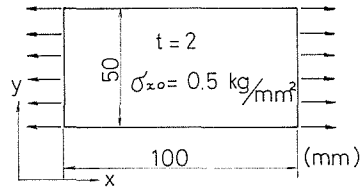


Fig.1 Viscoelastic Plate

ここに $C_G(t)$, $C_K(t)$ はおのおの弾性問題におけるせん断弾性係数 G , 体積弾性係数 K に対応するクリープコンプライアンスである. 式(14)を t に関して Laplace 変換し, おのおの $\bar{C}_G(s)$, $\bar{C}_K(s)$ とすると,

$$\left. \begin{aligned} s\bar{C}_G(s) &= 0.04 - 0.04s/(2s + 1), \\ s\bar{C}_K(s) &= 0.008. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

粘弾性問題における“弾性-粘弾性対応原理”より, 粘弾性解は弾性解における弾性係数 E , ポアソン比 ν を Laplace 像空間でのそれぞれに相当する $\bar{E}_s(s)$, $\bar{\nu}_s(s)$ に置き換えて得られる. $\bar{E}_s(s)$, $\bar{\nu}_s(s)$ を $\bar{C}_G(s)$, $\bar{C}_K(s)$ で表わすと,

$$\left. \begin{aligned} \bar{E}_s(s) &= \frac{9}{3s\bar{C}_G(s) + s\bar{C}_K(s)}, \\ \bar{\nu}_s(s) &= \frac{1/2(3s\bar{C}_G(s) - 2s\bar{C}_K(s))}{3s\bar{C}_G(s) + s\bar{C}_K(s)}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

となる. 式(15)を式(16)に代入することにより本計算例の場合の $\bar{E}_s(s)$, $\bar{\nu}_s(s)$ が求まる.

図1の粘弾性板を平面ひずみとして解析する. まず弾性解を考える. ひずみと応力の間には周知の次式が成立する. すなわち,

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} \{ (1 - \nu^2)\sigma_x - \nu(1 + \nu)\sigma_y \}, \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} \{ (1 - \nu^2)\sigma_y - \nu(1 + \nu)\sigma_x \}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

ここに, $\varepsilon_x, \varepsilon_y$: x, y 方向のひずみ,

σ_x, σ_y : x, y 方向の応力,

E, ν : 弾性係数, ポアソン比.

与える応力状態を $\sigma_x = \sigma_0 = \text{一定}$, $\sigma_y = 0$ とすると式 (17) より,

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(1 - \nu^2)\sigma_0, \\ \varepsilon_y &= -\frac{1}{E}\nu(1 + \nu)\sigma_0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式 (18) の両辺を対応原理を用いて Laplace 変換する. $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ の Laplace 変換を $\bar{\varepsilon}_x(s), \bar{\varepsilon}_y(s)$ とすると,

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varepsilon}_x(s) &= \frac{1}{E_s(s)}\{1 - \bar{\nu}_s(s)^2\}\frac{\sigma_0}{s}, \\ \bar{\varepsilon}_y(s) &= -\frac{1}{E_s(s)}\bar{\nu}_s(s)\{1 + \bar{\nu}_s(s)\}\frac{\sigma_0}{s}, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

となる. 式 (19) に式 (15), (16) を代入すると,

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varepsilon}_x(s) &= \frac{1}{100}\left(\frac{19}{16}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{1/2+s} - \frac{3}{272}\frac{1}{16/17+s}\right)\sigma_0, \\ \bar{\varepsilon}_y(s) &= -\frac{1}{100}\left(\frac{13}{16}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{1/2+s} + \frac{3}{272}\frac{1}{16/17+s}\right)\sigma_0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式 (20) は Laplace 逆変換が容易にでき, 結局任意時間 t におけるひずみ $\varepsilon_x(t), \varepsilon_y(t)$ はつぎのようになる.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x(t) &= \frac{1}{1600}\left[19 - 8 \exp\left(-\frac{t}{2}\right) - \frac{3}{17}\exp\left(-\frac{16}{17}t\right)\right]\sigma_0, \\ \varepsilon_y(t) &= \frac{1}{1600}\left[-13 + 8 \exp\left(-\frac{t}{2}\right) - \frac{13}{17}\exp\left(-\frac{16}{17}t\right)\right]\sigma_0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式 (21) は弾性解の表示式 $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ とそれらの Laplace 変換した表示式 $\bar{\varepsilon}_x(s), \bar{\varepsilon}_y(s)$ が簡単に表わせ, かつそれらの逆変換も比較的容易な場合である. しかし式形で Laplace 変換をするのは一般的に容易でない場合が多い. つぎに式 (19) の $\bar{\varepsilon}_x(s)$ が簡単に Laplace 逆変換できず, これを本法を用いて数値的に近似逆変換することを考える. 式 (10) より $\bar{\varepsilon}_x(s)$ はつぎのように表わせる. すなわち,

$$\bar{\varepsilon}_x(s) = \frac{C_0}{s} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(s - \gamma) \cdots [s - (2j - 1)\gamma]}{s \cdots (s + 2j\gamma)} C_j, \quad (22)$$

となる. 式 (22) に $s = \gamma$ を代入すると,

$$\gamma \bar{\varepsilon}_x(\gamma) = C_0,$$

$S = 3\gamma$ を代入すると,

$$\bar{r}_{\varepsilon_x}(3\gamma) = \frac{1}{3}C_0 + \frac{2}{15}C_1,$$

などとなり, 一般に $s = (2j + 1)\gamma$ を代入すると,

$$\begin{aligned} \bar{r}_{\varepsilon_x}(2j\gamma + \gamma) = & \frac{C_0}{2j + 1} + \frac{2j}{(2j + 1)(2j + 3)}C_1 + \\ & \dots + \frac{2j(2j - 2)\dots 2}{(2j + 1)(2j + 3)\dots(4j + 1)}C_j, \end{aligned}$$

となり C_0, C_1, \dots, C_j と順次係数が決定できる.

式 (7) の右辺が Legendre 多項式の偶関数であり, 項数は 0 から $(m-1)$ 項をとるものとして式 (7) をつぎのように書き直す.

$$\hat{f}(x) = f(t) = \sum_{j=0}^{m-1} A_j e^{-2jrt}. \quad (23)$$

Table 1 Comparison between Approximate and Exact Solutions for Longitudinal Strains

t	Approximate solution	Exact solution	Error
0	0.33819E-02	0.33824E-02	0.2
1	0.43997E-02	0.43997E-02	0.0
2	0.50093E-02	0.50094E-02	0.0
3	0.53764E-02	0.53764E-02	0.0
4	0.55980E-02	0.55979E-02	0.0
5	0.57319E-02	0.57318E-02	0.0
6	0.58128E-02	0.58128E-02	0.0
7	0.58618E-02	0.58619E-02	0.0
8	0.58915E-02	0.58917E-02	0.0
9	0.59096E-02	0.59097E-02	0.0
10	0.59206E-02	0.59207E-02	0.0
11	0.59273E-02	0.59273E-02	0.0
12	0.59314E-02	0.59313E-02	0.0
13	0.59339E-02	0.59337E-02	0.0
14	0.59354E-02	0.59352E-02	0.0
15	0.59363E-02	0.59361E-02	0.0
16	0.59369E-02	0.59367E-02	0.0
17	0.59372E-02	0.59370E-02	0.0
18	0.59373E-02	0.59372E-02	0.0
19	0.59374E-02	0.59373E-02	0.0
20	0.59375E-02	0.59374E-02	0.0
21	0.59375E-02	0.59375E-02	0.0
22	0.59375E-02	0.59375E-02	0.0
23	0.59374E-02	0.59375E-02	0.0
24	0.59374E-02	0.59375E-02	0.0
25	0.59374E-02	0.59375E-02	0.0
26	0.59374E-02	0.59375E-02	0.0
27	0.59374E-02	0.59375E-02	0.0
28	0.59373E-02	0.59375E-02	0.0
29	0.59373E-02	0.59375E-02	0.0

A_j は C_j で表わされる係数であり、たとえば $m=5$ として $A_0 \sim A_5$ を C_j で表わすと、

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= C_0 - \frac{1}{2}C_1 + \frac{3}{8}C_2 - \frac{5}{16}C_3 + \frac{70}{256}C_4 - \frac{63}{256}C_5, \\ A_1 &= \frac{3}{2}\left(C_1 - \frac{5}{2}C_2 + \frac{35}{8}C_3 + \frac{105}{16}C_4 + \frac{1155}{128}C_5\right), \\ A_2 &= \frac{35}{8}\left(C_2 - \frac{9}{2}C_3 + \frac{99}{8}C_4 - \frac{429}{16}C_5\right), \\ A_3 &= \frac{231}{16}\left(C_3 - \frac{13}{2}C_4 + \frac{195}{8}C_5\right), \\ A_4 &= \frac{6435}{128}\left(C_4 - \frac{17}{2}C_5\right), \\ A_5 &= \frac{46189}{256}C_5, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

などとなる。

$m = 6, \gamma = 0.1$ として計算した場合の解析結果を表 1 に示す。表 1 に示す厳密解は式 (21) によって計算したものであり、この場合は両者とも良い一致が見られる。なお表 2 に式 (24) の係数 A_j を示す。

Table 2 Coefficients for Legendre Polynomial Series Expansion

	$\gamma = 0.1$
A_0	0.5937262E-02
A_1	0.2569230E-04
A_2	-0.7687814E-03
A_3	-0.2599176E-02
A_4	0.1150359E-02
A_5	-0.3634450E-03

4 有限要素法による粘弾性連続体の近似解法

複雑な形状、境界条件を有する連続体解析の手法としては有限要素法が有力であるのは周知の事実である。つぎにこの数値 Laplace 逆変換の手順を用いて有限要素法により粘弾性連続体を解析することに拡張する。

まず弾性状態での二次元連続体を考える。図 2 に示す三角形要素 (g) は連続体を任意の三角形要素で分割した一要素であり、この三角形要素の節点変位ベクトル $\{\delta_g\}$ と等価節点力ベクトル $\{f_g\}$ は三角形要素 g の部分剛性マトリックス $[k_g]$ を用いてつぎのように書き表わせる。

$$\{f_g\} = [k_g]\{\delta_g\}. \quad (25)$$

ここに

$$\begin{aligned} \{f_g\} &= [X_i \ Y_i \ X_j \ Y_j \ X_k \ Y_k]^T, \\ \{\delta_g\} &= [u_i \ v_i \ u_j \ v_j \ u_k \ v_k]^T, \end{aligned}$$

であり、 X_i, Y_i などは節点 i の x, y 方向の等価節点力を、 u_i, v_i などは節点 i の x, y 方向の節点変位を示す。 T は転置マトリックスの意味である。また $[k_g]$ は三角形要素 g の材料特性によるものであ

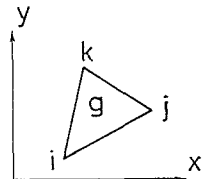


Fig. 2 An Element of a Continuum

り、一般的には、

$$[k_g] = \int_V [\mathbf{B}^*]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}^*] dV, \quad (27)$$

となる。ここは V は要素 g の体積積分を意味する。また、 $[\mathbf{B}^*]$ は三角形要素 g の節点座標で表わされる (3×6) のマトリックスであり、 $[\mathbf{D}]$ は応力—ひずみ関係を表わすものである。すなわち、

$$[\mathbf{B}^*] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_i - y_k & 0 & y_k - y_i & 0 & y_i - y_j & 0 \\ 0 & x_k - x_j & 0 & x_i - x_k & 0 & x_j - x_i \\ x_k - x_j & y_j - y_k & x_i - x_k & y_k - y_i & x_j - x_i & y_i - y_j \end{bmatrix}. \quad (28)$$

ここに A は三角形要素の面積を x, y は節点座標である。また $[\mathbf{D}]$ は平面応力状態、平面ひずみ状態でおのおののつぎのような正方マトリックスである。

$$[\mathbf{D}] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu/2 \end{bmatrix}, \quad (\text{平面応力状態}) \quad (29)$$

$$[\mathbf{D}] = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/1 - \nu & 0 \\ \nu/1 - \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 2\nu/2(1 - \nu) \end{bmatrix}, \quad (\text{平面ひずみ状態})$$

つぎに粘弾性連続体の場合を考える。式(25)を“弾性—粘弾性対応原理”を用いて Laplace 変換すると、

$$\{\bar{f}_g(s)\} = [\bar{k}_g(s)]\{\bar{\delta}_g(s)\}. \quad (30)$$

ここに $\{\bar{f}_g(s)\}, \{\bar{\delta}_g(s)\}$ は $\{f_g\}, \{\delta_g\}$ の対応するベクトルの Laplace 変換を表わす。 $[\bar{k}_g(s)]$ は対応原理より $[k_g]$ 中の弾性状態での E, ν を $\bar{E}_s(s), \bar{\nu}_s(s)$ で置換したものである。

いま式 (30) の両辺に $s = \gamma$ を代入すると、

$$\{\bar{f}_g(\gamma)\} = [\bar{k}_g(\gamma)]\{\bar{\delta}_g(\gamma)\}. \quad (31)$$

式 (31) の部分剛性マトリックス $[\bar{k}_g(\gamma)]$ を通常の有限要素法 (以下 F. E. M. と略記する) 解析手順と同様、各要素毎に構造物全体の剛性マトリックスに重ね合わせていく。以下の解析手順は弾性連続体を F. E. M. で解く場合とほぼ同様である。このように各要素の Laplace 像空間での部分剛性マトリックスを全要素に関して全体剛性マトリックスに重ね合わせると Laplace 像空間での $s = \gamma$ に対応する全節点変位ベクトル $\{\bar{\mathbf{d}}_t(\gamma)\}$ と全節点力ベクトル $\{\bar{\mathbf{P}}_t(\gamma)\}$ とは全体剛性マトリックス $[\bar{\mathbf{K}}_t(\gamma)]$ を用いて式 (32) のようになる。

$$\{\bar{\mathbf{P}}_i(\gamma)\} = [\bar{\mathbf{K}}_i(\gamma)]\{\bar{\mathbf{d}}_i(\gamma)\}. \quad (32)$$

式(32)より $s = \gamma$ に対応する全節点変位 $\{\bar{\mathbf{d}}_i(\gamma)\}$ は

$$\{\bar{\mathbf{d}}_i(\gamma)\} = [\bar{\mathbf{K}}_i(\gamma)]^{-1}\{\bar{\mathbf{P}}_i(\gamma)\}. \quad (33)$$

式(33)の両辺は実際の計算では境界条件を考慮するので少し修正されたマトリックス内容となる。以下同様の手法で $s = 3\gamma, 5\gamma, \dots, (2j+1)\gamma (j=0, \dots, m-1)$ に関してそれに対応する Laplace 像空間での全節点変位 $\{\bar{\mathbf{d}}_i(2j\gamma + \gamma)\}$ を求める。この演算回数は Legendre 多項式の所要の精度を得るための項数回だけ行なうことになる。Laplace 像空間における $s = (2j+1)\gamma$ に対応する全節点変位が求まると 3 節と全く同様にして近似的に数値 Laplace 逆変換して物理面での全節点変位 $\{\mathbf{d}_i(t)\}$ を求めることができる。

式(10)より $\{\bar{\mathbf{d}}_i(s)\}$ は

$$\{\bar{\mathbf{d}}_i(s)\} = \frac{\{\mathbf{C}_0\}}{s} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(s-\gamma)(s-3\gamma)\dots[s-(2j-1)\gamma]}{s(s+2\gamma)\dots(s+2j\gamma)}\{\mathbf{C}_j\}. \quad (34)$$

式(34)に $s = \gamma$ を代入すると,

$$\gamma\{\bar{\mathbf{d}}_i(\gamma)\} = \{\mathbf{C}_0\},$$

$s = 3\gamma$ を代入すると,

$$\gamma\{\bar{\mathbf{d}}_i(3\gamma)\} = \frac{1}{3}\{\mathbf{C}_0\} + \frac{2}{15}\{\mathbf{C}_1\},$$

となり $\{\mathbf{C}_1\}$ は

$$\{\mathbf{C}_1\} = \frac{15}{2}\left[\gamma\{\bar{\mathbf{d}}_i(3\gamma)\} - \frac{\gamma}{3}\{\bar{\mathbf{d}}_i(\gamma)\}\right],$$

となり, Laplace 像空間での変位 $\{\bar{\mathbf{d}}_i(\gamma)\}, \{\bar{\mathbf{d}}_i(3\gamma)\}$ より求めることができる。一般に $s = 2j\gamma$ を代入して既知となる $\{\mathbf{C}_{j-1}\}$ の係数を用いて $\{\mathbf{C}_j\}$ は

$$\begin{aligned} \gamma\{\bar{\mathbf{d}}_i(2j\gamma + \gamma)\} &= \frac{1}{2j+1}\{\mathbf{C}_0\} + \frac{2j}{(2j+1)(2j+3)}\{\mathbf{C}_1\} + \\ &\dots + \frac{2j(2j-2)\dots 2}{(2j+1)(2j+3)\dots(4j+1)}\{\mathbf{C}_j\}, \end{aligned} \quad (35)$$

となり決定できる。この $\{\mathbf{C}_j\} (j=0 \sim m-1)$ を用いて任意時間における各節点の物理面での変位は

$$\{\mathbf{d}(t)\} = \sum_{j=0}^{m-1} \{\mathbf{C}_j\} P_{2j}(e^{-\gamma t}), \quad (36)$$

となる。

ひずみは各要素の任意時間における節点変位が既知となると要素の幾何学的条件より直ちに求まる。すなわち各要素のひずみ $\{\varepsilon_g(t)\}$ は

$$\{\varepsilon_g(t)\} = [\mathbf{B}^*] \{\delta_g(t)\}. \quad (37)$$

ここに $\{\delta_g(t)\} = [\varepsilon_x(t) \ \varepsilon_y(t) \ \tau_{xy}(t)]^T$ である。

つぎに応力について考える。応力を変位 $\{\delta_g(t)\}$ から履歴積分を用いて求めるのは一般に煩雑である。平面ひずみ状態の場合は比較的容易に求まるが平面応力状態では $\varepsilon_z(t) \equiv 0$ であるので数値計算上かなりの困難さを伴う。そこで変位 $\{\mathbf{d}_t(t)\}$ を決めた場合と同様、近似数値 Laplace 逆変換の手法で応力を求める。

式(36)より要素 g の変位 $\{\delta_g(t)\}$ は

$$\{\delta_g(t)\} = [\mathbf{AA}_g] \{h(t)\}, \quad (38)$$

と表わされ、既知である。ここに $[\mathbf{AA}_g]$ は節点変位を与える係数マトリックスであり、式(36)で表記される $\{\mathbf{C}_j\}$ より定まる。また $\{h(t)\}$ は、

$$\{h(t)\} = [1 \ e^{-2\gamma t} \ e^{-4\gamma t} \ \dots \ e^{-2(m-1)\gamma t}]^T, \quad (39)$$

である。式(38)を式(37)に代入すると、

$$\{\varepsilon_g(t)\} = [\mathbf{BAA}_g] \{h(t)\}. \quad (40)$$

ここに

$$[\mathbf{BAA}_g] = [\mathbf{B}_g^*] [\mathbf{AA}_g]. \quad (41)$$

式(41)において $[\mathbf{B}_g^*]$ は要素 g の形状より決まるマトリックスであり、 $[\mathbf{AA}_g]$ は節点変位を与える係数であるので、結局 $[\mathbf{BAA}_g]$ は $(3 \times m)$ 次元を有する時間に無関係な定数マトリックスである。 $[\mathbf{BAA}_g]$ が時間に無関係な定数マトリックスであることを考慮して式(40)の両辺を Laplace 変換すると、

$$\{\bar{\varepsilon}_g(s)\} = [\mathbf{BAA}_g] \{\bar{h}(s)\}. \quad (42)$$

$\{\bar{h}(s)\}$ は式(39)よりつぎのようになる。

$$\{\bar{h}(s)\} = \left[\frac{1}{s} \quad \frac{1}{s+2\gamma} \quad \frac{1}{s+4\gamma} \quad \dots \quad \frac{1}{s+2(m-1)\gamma} \right]^T. \quad (43)$$

要素 g における応力とひずみの関係は、弾性状態では

$$\{\sigma_g\} = [\mathbf{D}_g] \{\varepsilon_g\}, \quad (44)$$

となる。

ここに $\{\sigma_g\} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}]^T$ などである。式(44)を対応原理を用いて Laplace 変換すると、

$$\{\bar{\sigma}_g(s)\} = [\bar{\mathbf{D}}_g(s)]\{\bar{\varepsilon}_g(s)\}. \quad (45)$$

ここに $\{\bar{\sigma}_g(s)\}$, $\{\bar{\varepsilon}_g(s)\}$ は Laplace 像空間での応力, ひずみベクトルである。 $[\bar{\mathbf{D}}_g(s)]$ は粘弾性材料特性がクリープコンプライアンス $C_G(t)$, $C_K(t)$ で与えられた場合, 平面応力状態ではつぎのように表示される。

$$\begin{aligned} [\bar{\mathbf{D}}_g(s)] &= \frac{\bar{E}_s(s)}{1 - \bar{\nu}_s^2(s)} \begin{bmatrix} 1 & \bar{\nu}_s(s) & 0 \\ \bar{\nu}_s(s) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \bar{\nu}_s(s))/2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{4\{3s\bar{C}_G(s) + s\bar{C}_K(s)\}}{s\bar{C}_G(s)\{3s\bar{C}_G(s) + 4s\bar{C}_K(s)\}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1/2\{3s\bar{C}_G(s) - 2s\bar{C}_K(s)\}}{\{3s\bar{C}_G(s) + s\bar{C}_K(s)\}} & 0 \\ \frac{1/2\{3s\bar{C}_G(s) - 2s\bar{C}_K(s)\}}{\{3s\bar{C}_G(s) + s\bar{C}_K(s)\}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \frac{\{3s\bar{C}_G(s) + 4s\bar{C}_K(s)\}}{\{3s\bar{C}_G(s) + s\bar{C}_K(s)\}} \end{bmatrix}. \quad (46) \end{aligned}$$

式(45)に式(42)を代入すると、

$$\{\bar{\sigma}_g(s)\} = [\bar{\mathbf{D}}_g(s)] [\mathbf{BAA}_g] \{\bar{h}(s)\}. \quad (47)$$

物理面での $\{\sigma_g(t)\}$ が Legendre 多項式の偶関数で表わされるものとする $\{\sigma_g(t)\}$ の Laplace 変換 $\{\bar{\sigma}_g(s)\}$ はつぎようになる。

$$\{\bar{\sigma}_g(s)\} = \frac{\{H_0\}}{s} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(s - \gamma)(s - 3\gamma) \cdots \{s - (2j - 1)\gamma\}}{s(s + 2\gamma) \cdots (s + 2j\gamma)} \{H_j\}. \quad (48)$$

ただし $\{H_0\}$, $\{H_j\}$ は Legendre 多項式の応力に関する係数を示す。

Laplace 像空間での変位 $\{\bar{\mathbf{d}}_i(2j\gamma + \gamma)\} (j=0, \dots, m-1)$ を求めた場合と同様に Laplace 像空間での $s = \gamma, 3\gamma, \dots, (2j - 1)\gamma$ に対応する変位 $\{\bar{\sigma}_g(2j\gamma + \gamma)\} (j=0, \dots, m-1)$ が式(47)より求めることができる。この場合は各要素毎に行なうことになる。式(48)の両辺に $s = \gamma$ を代入すると、

$$\gamma \{\bar{\sigma}_g(\gamma)\} = \{H_0\},$$

$s = 3\gamma$ を代入すると、

$$\gamma \{\bar{\sigma}_g(3\gamma)\} = \frac{1}{3} \{\gamma \bar{\sigma}_g(\gamma)\} + \frac{2}{15} \{H_1\},$$

となり, $\{H_1\}$ は

$$\{H_1\} = \frac{15}{2} \left[\gamma \{\bar{\sigma}_g(3\gamma)\} - \frac{\gamma}{3} \{\bar{\sigma}_g(\gamma)\} \right],$$

となるから Laplace 像空間での応力 $\{\bar{\sigma}_g(\gamma)\}$, $\{\bar{\sigma}_g(3\gamma)\}$ より決定できる. 以下同様に係数 $\{H_j\}$ が順次求められる. このようにして求められた $\{H_j\}$ を用いれば, 結局任意時間における三角形要素 g の応力は

$$\{\sigma_g(t)\} = \sum_{j=0}^{m-1} \{H_j\} P_{2j}(e^{-\gamma t}) \quad (49)$$

となり煩雑な履歴積分を行なわないで容易に求めることができる. これを要素毎に行なえば粘弾性連続体の応力が決定できる.

以上の F. E. M. 解析における変位, ひずみ, 応力を求める手順を図 3 に示す.

5 有限要素法による粘弾性シリンダーの解析

本法の妥当性を検討するために E. H. Lee が厳密解を求めた内圧を受ける粘弾性シリンダーを F. E. M. で解析する⁵⁶⁾. 図 4 はこの粘弾性シリンダーの 1/4 を示したものである. シリンダーの外周は弾性体で補強されている. F. E. M. 計算のための要素は三角形一次要素を用い, この分割の場合には節点数 63, 要素数は 96 である. なおこの問題を Zienkiwicz が F. E. M. で増分理論で解析しているのでそれと同分割にしたものである.

一般に粘弾性体の構成方程式は緩和関数あるいは遅延関数を用いて積分表示される場合と, レオロジーモデルなどにより微分表示される場合とがある. ここでは後者を用いるものとする.

等方均一な線形粘弾性体の挙動はつぎのように表わされる.

$$P \sigma_{ij} = 2Q \epsilon_{ij}, \quad (50)$$

$$M \sigma_{ii} = N \epsilon_{ii}. \quad (51)$$

ここに σ_{ij} , ϵ_{ij} は応力テンソルの成分を表わし, s_{ij} , e_{ij} は応力偏差, ひずみ偏差の成分を表わす. すなわち,

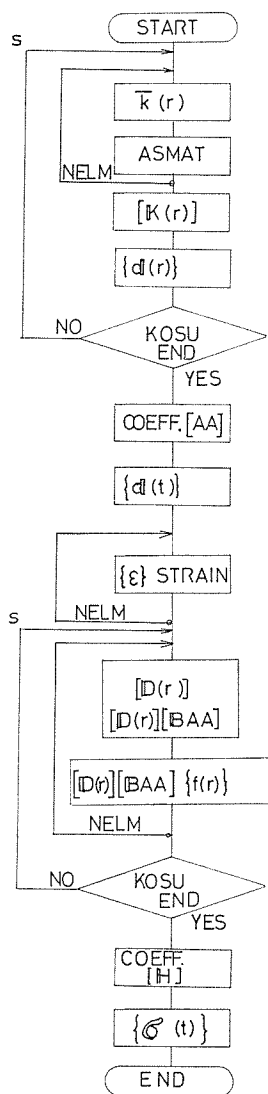


Fig. 3 Flow Diagram of Calculating Procedure

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{KK}, \quad (52)$$

$$e_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \epsilon_{KK}. \quad (53)$$

ここに δ_{ij} は Kronecker の delta である. 式(50), (51) の演算子 P, Q, M, N は粘弾性材料係数 a, b, c, d を用いてつぎのように表わすことができる.

$$\left. \begin{aligned} P &= \sum_{n=0}^p a_n \frac{\partial^n}{\partial t^n}, & Q &= \sum_{n=0}^q b_n \frac{\partial^n}{\partial t^n}, \\ M &= \sum_{n=0}^m c_n \frac{\partial^n}{\partial t^n}, & N &= \sum_{n=0}^n d_n \frac{\partial^n}{\partial t^n}. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

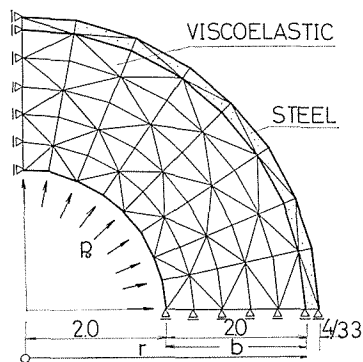


Fig.4 Reinforced Cylinder Triangular Mesh (inch)

工学分野で使用される材料は体積変化に対しては多くの場合弾性的挙動をするといわれている. その場合には式(51)は簡単になり $M = 1, N = 3K$ を代入して,

$$\sigma_{ii} = 3K \epsilon_{ii}, \quad (55)$$

となる. ここに K は体積弾性係数である.

式(50)は形状変化に対する材料挙動を表わすものであるが, たとえば Maxwell 流体と Kelvin 固体で表わされる粘弾性レオロジーモデルについて記せばおのおのつぎのようになる.

Maxwell 流体に対しては

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{G}{\eta} \right) s_{ij} = 2G \frac{\partial}{\partial t} e_{ij}, \quad (56)$$

Kelvin 固体に対しては

$$s_{ij} = 2G e_{ij} + 2\eta \frac{\partial}{\partial t} e_{ij}. \quad (57)$$

ここに η は粘弾性定数である.

E. H. Lee は図4のシリンダーの粘弾性特性を形状変化に対しては Maxwell 流体, 体積変化に対しては弾性体として応力に対する厳密解を求めている. 図5は形状変化の挙動を表わす Maxwell モデルである.

式(55), (56)より $\bar{E}_s(s), \bar{\nu}_s(s)$ を求めれば

$$\left. \bar{E}_s(s) = \frac{9Ks}{(3K/G + 1)s + 3K/\eta}, \right\} \quad (58)$$

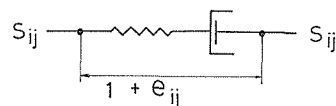


Fig.5 The Maxwell Model for Assumed Viscoelastic Properties in Shear

$$\bar{v}_s(s) = \frac{(3K/2G - 1)s + 3K/2\eta}{(3K/G + 1)s + 3K/\eta}, \quad \int$$

となる。E. H. Lee の計算例⁵⁶⁾では

$$K = 7.03 \times 10^3 \text{kg/cm}^2 (10^5 \text{p. s. i.}), \quad G = 2.64 \times 10^3 \cdot e^{-t} \text{kg/cm}^2 (3/8 \times 10^5 e^{-t} \text{p. s. i.})$$

である。また補強管の材料特性は弾性係数，ポアソン比をそれぞれ E_R ， ν_R とすれば，

$$E_R = 2.11 \times 10^6 \text{kg/cm}^2 (3 \times 10^7 \text{p. s. i.}), \quad \nu_R = 1/\sqrt{11},$$

と与えられる。またシリンダー内部に作用する内圧 $p(t)$ は

$$p(t) = p_0 u(t),$$

とする。ここに p_0 は定数， $u(t)$ はヘビサイドの単位関数である。なお応力の厳密解はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \end{array} \right\} = -p_0 \left[\left\{ 0.3616 + \frac{0.005282}{0.9849} (1 - e^{-0.9349t}) + \frac{0.2233}{0.3528} (1 - e^{-0.3528t}) \right\} \right. \\ \left. \pm \frac{b^2}{r^2} \left\{ 0.1596 - \frac{0.001320}{0.9849} (1 - e^{-0.9349t}) - \frac{0.05583}{0.3528} (1 - e^{-0.3528t}) \right\} \right]. \quad (59) \end{aligned}$$

ここに σ_{rr} ， $\sigma_{\theta\theta}$ はそれぞれ法線応力，接線応力を示す。

つぎに本法による解析結果と厳密解とを比較検討する。図 6, 7, 表 3 は $\gamma = 0.1$ ， $m = 6$ とした場合の計算値である。図 6, 7 において実線は厳密解，○印は本法による解析値である。時間は $t/\tau_0 = 0 \sim 10$ 迄計算してある。表 3 に本法の応力に関する誤差率が示されて

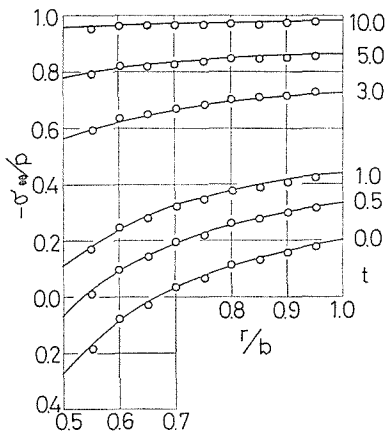


Fig.6 Variation of the Distribution of Circumferential Compressive Stress

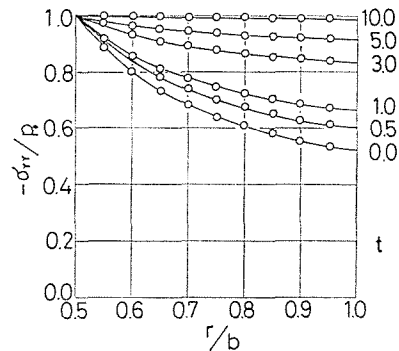


Fig.7 Variation of the Distribution of Radial Compressive Stress

Table 3 Comparison between Approximate and Exact Solutions for Stresses

t	r/b	σ_{rr}			$\sigma_{\theta\theta}$		
		Approximate Solution	Exact solution	Error (%)	Approximate solution	Exact solution	Error (%)
0	0.6	-0.81004	-0.80493	0.6	0.077956	0.081733	4.6
	0.7	-0.68491	-0.68731	0.3	-0.034919	-0.035886	2.7
	0.8	-0.61122	-0.61097	0.0	-0.11211	-0.11222	0.1
	0.9	-0.55294	-0.55864	1.0	-0.16110	-0.16456	2.1
0.5	0.6	-0.84249	-0.83684	0.7	-0.098758	-0.095245	3.6
	0.7	-0.73571	-0.73846	0.4	-0.101360	-0.19362	1.2
	0.8	-0.67541	-0.67462	0.1	-0.257152	-0.25747	0.1
	0.9	-0.62473	-0.63084	1.0	-0.29646	-0.30124	1.6
1.0	0.6	-0.86969	-0.86344	0.7	-0.24673	-0.24280	1.6
	0.7	-0.77836	-0.78111	0.4	-0.32241	-0.32513	0.8
	0.8	-0.72938	-0.72768	0.2	-0.37889	-0.37856	0.1
	0.9	-0.68506	-0.69104	0.9	-0.40999	-0.41520	1.3
5.0	0.6	-0.97466	-0.96679	0.8	-0.82127	-0.81602	0.6
	0.7	-0.94679	-0.94679	0.0	-0.83403	-0.83602	0.2
	0.8	-0.94000	-0.93381	0.7	-0.85355	-0.84381	1.2
	0.9	-0.92340	-0.92491	0.2	-0.85505	-0.85790	0.3
10.0	0.6	-1.00187	-0.99425	0.8	-0.97511	-0.96837	0.7
	0.7	-0.99446	-0.99082	0.4	-0.97441	-0.97181	0.3
	0.8	-0.99620	-0.98859	0.8	-0.98121	-0.97404	0.7
	0.9	-0.99034	-0.98706	0.3	-0.77808	-0.97556	0.3

(\times^{-1}/p_0)

Table 4 Circumferential Compressive Stresses for Various Terms ($r/b = 0.6$)

t \ m	2	4	6	EXACT
0	0.12214 (49.4)	-0.075131 (8.0)	-0.077956 (4.6)	-0.081733
0.5	0.21431 (125.1)	0.098726 (3.7)	0.098758 (3.7)	0.095245
1.0	0.29771 (22.6)	0.24544 (1.1)	0.24676 (1.6)	0.24280
3.0	0.55914 (10.9)	0.63255 (0.8)	0.63193 (0.8)	0.62722
5.0	0.73439 (10.0)	0.82261 (0.8)	0.82127 (0.6)	0.81602
10.0	0.95963 (0.9)	0.97361 (0.5)	0.97511 (0.7)	0.96837

(\times^{-1}/p_0)

Table 5 Radial Compressive Stresses for Various Terms ($r/b=0.95$)

$t \backslash m$	2	4	6	EXACT
0	0.61866 (14.9)	0.53618 (0.4)	0.53492 (0.7)	0.53844
0.5	0.65896 (7.3)	0.61039 (0.6)	0.61042 (0.6)	0.61395
1.0	0.69543 (2.7)	0.67327 (0.5)	0.67389 (0.5)	0.67691
3.0	0.80974 (3.7)	0.84058 (0.0)	0.84023 (0.1)	0.84092
5.0	0.88636 (3.8)	0.92364 (0.2)	0.92305 (0.2)	0.92147
10.0	0.98484 (0.2)	0.99090 (0.4)	0.99155 (0.5)	0.98648

($\times 10^{-1}/p_0$)

いるが大体1%以下である。数%の誤差の生じている個所もあるがこれは応力の絶対値自体が小さい所なので問題はないと思われる。この計算値は Legendre 多項式における項数を6項まで使用しているので通常の連続体弾性問題の F. E. M. 解析手順を6回繰り返していることになる。この程度の計算時間で所要の粘弾性問題が解析できるということは本

Table 6 Horizontal and Vertical Displacement along the Hole

$t \backslash m$	2	4	6
0	0.010188 0.15248	0.07786 0.11654	0.077544 0.11605
0.5	0.11401 0.17063	0.099762 0.14930	0.099760 0.14930
1.0	0.12499 0.18706	0.11840 0.17720	0.11856 0.17743
3.0	0.15940 0.23855	0.16839 0.25201	0.16832 0.25190
5.0	0.18246 0.27307	0.19348 0.28957	0.19332 0.28932
10.0	0.21210 0.31743	0.21396 0.32021	0.21414 0.32048

法の有用性の高いことを示すものと思われる。Zienkiwicz はこれを通常の増分法で F. E. M. 解析しており、それによれば時間増分 Δt を 0.1 にとり、解の最終段階 $t=10.0$ に到達するのに 100 step が必要であるとしている。本法はこれを 4~6 step で終了していることになる。

つぎに計算の精度と経済性から偶関数を何項までとるかということと比較検討してみる。表 4, 5, 6 は項数 m を 2, 4, 6 とした場合の応力と変位に関して収束の様相を見たものである。表 4 は $\sigma_{\theta\theta}$ に関するものであり、応力変化の大きい $r/b=0.6$ の個所で検照したものである。() 内の数値は誤差率を示したものであ

Table 7 Computer Time (sec)

m	c time	c time/m
2	13.3	6.7
4	20.8	5.2
6	27.7	4.6

る。2項では十数%の誤差があるが、 $t = 10$ になると誤差は少なくなる。すなわち初期応答の誤差は大きく妥当性はないが t が大きくなるにつれ、2項でも誤差はほとんどないことを示している。4項の場合は応力の絶対値が小なる時間を除けばほとんど誤差はないものといえる。6項では良好な精度

である。表5は σ_{rr} に関するもので $r/b = 0.95$ で検証したものである。この場合は4項位でもよい精度といえよう。総じて応力に関しては6項位で十分実用に供し得る精度である。表6は最大変位を有する節点に関する x , y 方向の変位 u , v についての項数毎の収束を見たものである。この場合も応力と同様、4項、6項の差はほとんど見られず、6項位で十分な精度といえる。

表7は項数に対する計算時間をみたものである。1項当り5~6秒で計算しているのがわかる。なお本研究における計算は全て倍精度で行なっている。

6 結 言

本研究は線形粘弾性体の挙動を従来の増分法で解析する手法とは別に、更に簡便に求め得ることを示したものである。“線形粘弾性—弾性問題における対応原理”を用いる際の Laplace 逆変換の困難性を Legendre 多項式の偶関数を使用して数値 Laplace 逆変換を行ない、F. E. M. 解析手順により複雑な形状、境界条件を有する粘弾性連続体の一解析法に拡張したものである。本法は F. S. M. 等にも当然適用可能であるので今後の課題とするつもりである。

本文をまとめるに当り信州大学吉田俊弥教授、川上浩教授には暖い御援助を賜った。また同学草間孝志助教授には終始本研究に対する詳細なる討議と御教示を頂いた。ここに深甚なる謝意を表する。

なお計算は信州大学計算機センターを通して東京大学大型計算機センター (HITAC 8800/8700) を利用して行なったものである。

参 考 文 献

- 1) 山田嘉正：大変形を含む材料非線形問題，日本機械学会誌，第79巻，第691号，pp. 27~34，昭和51年6月。
- 2) 赤井，足立，安藤：飽和粘土の応力—ひずみ—時間関係，土木学会論文報告集，第225号，pp. 53~61，1974年5月。
- 3) 桜井春輔：セメントモルタルのクリープ変形と破壊に関する実験的研究，土木学会論文報告集，第217号，pp. 65~75，1973年9月。
- 4) 西林，木山：コンクリートの応力緩和に関する一研究，土木学会論文報告集，第241号，pp. 145~153，1975年9月。
- 5) 山田，河村，築谷：高圧縮応力状態に於けるコンクリートのクリープとレラクゼーションに関する研究，日本建築学会大会学術講演梗概集（東海），pp. 1247~1248，昭和51年10月。

- 6) 六車 照：PC鋼材レラクセーションのプレストレス減退におよぼす影響，日本建築学会大会学術講演梗概集（東海），pp.1249～1250，昭和51年10月。
- 7) 永松，佐藤，竹田：モルタルの曲げクリープ破壊時間の確率分布について，日本建築学会大会学術講演梗概集（東海），pp.419～420，昭和51年10月。
- 8) 佐藤，佐久間，岡田：高温下におけるコンクリートのクリープ，その1，応力および温度への依存性，日本建築学会大会学術講演梗概集（東海），昭和51年10月。
- 9) 大岸，和田：コンクリートの高温三軸クリープ研究への approach（その3 密封供試体の20～180°Cの等圧縮クリープ測定），日本建築学会大会学術講演梗概集（東海），昭和51年10月。
- 10) 赤木知之：レオロジーモデル定数の一決定法，土と基礎，25—3，pp.47～52，Mar. 1977。
- 11) 色部，赤木：Maxwell 材料における粘弾性定数の一決定法，土木学会論文報告集，第213号，pp.1～6，1973年5月。
- 12) 座古，藤井，水川，福田：三次元粘弾塑性モデルによる複合材料の力学的挙動に関する研究，日本機械学会論文集（第I部），39巻，320号，pp.1175～1182，昭和48年4月。
- 13) Biot M.A. : Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena, Journal of Applied physics, Vol. 25, No.11, pp.1386～1391, Nov. 1954.
- 14) 赤木，大野，色部：有限要素法によるPC格納容器の粘弾性解析，土木学会論文報告集，第214号，pp.1～8，1973年6月。
- 15) Zienkiewicz O.C. : Analysis of visco-elastic behavior of concrete structures, with particular reference to thermal stresses, A.C.I., No. 58—9, pp.383～394, Oct. 1961.
- 16) Kawamura M. : Shrinkage stress in concrete as a viscoelastic material, A.C.I., No. 66—84, pp.968～970, Dec. 1969.
- 17) Eugene L.M. : Viscoelastic plate on poroelastic foundation, A.S.C.E., EM4, pp.911～928, Aug. 1972.
- 18) 高橋，川口：有限要素法によるクリープ解析，大林組技術研究所報，No.9, pp.32～36, 1974.
- 19) 竹本 靖：PC不静定ラーメンのクリープ応力略算法，大林組技術研究所報，No. 6, pp.35～39, 1972.
- 20) Sackman J.L. and Nickell R.E. : Creep of a cracked reinforced beam, A. S. C. E., ST1, pp. 283～308, Jan. 1968.
- 21) 桜井，吉村：粘弾性地盤巾の構造物に作用する圧力の一計算法，土木学会論文報告集，第218号 pp.75～85，1973年10月。
- 22) 斉藤，藤原，吉岡：有限要素法によるシールド外周地盤の挙動解析，土と基礎，25—3，pp. 21～26，Mar. 1977.
- 23) 斉藤，藤原，内藤，吉岡：有限要素法による地盤の粘弾性解析，大林組技術研究所報，No. 11, pp.48～52，1975.
- 24) Booker J.R. : Analysis of creep settlement of pile foundations, PB-252080, pp.1～27, Sep. 1975.
- 25) 吉見，桑原，橋場：液状化した砂地盤における構造物の挙動の被害防止対策，土と基礎，No. 869, pp.17～22, Jun. 1975.
- 26) 矢作，和田：液状化を考慮した基礎構造物設計上の問題点，土と基礎，No. 870, pp.23～28, Jun. 1975.
- 27) 渡辺啓行：有限要素法による粘弾性体の振動解析，土木学会論文報告集，第198号，pp.21～35，1972年2月。

- 28) Bobby O.H. et al : Generalized Kelvin-Voight used in soil dynamics study, A. S. C. E., EM1, pp.143~156, Feb. 1966.
- 29) Eringen A.C. : On the nonlinear oscillations of viscoelastic plates, Jour. of Applied Mechanics, pp.563~567, Dec. 1955.
- 30) Deak A.L. : Large deflections of a linearly viscoelastic shallow spherical shell, Jour. of Applied Mechanics, pp.469~474, Jun. 1972.
- 31) Hewitt J.S. and Mazumdar J. : Vibrations of triangular viscoelastic plates, Jour. of the Engineering Mechanics Divisions, EM6, pp.1143~1148, Dec. 1974.
- 32) Fyfe I.M. : The applicability of elastic /viscoelastic Theory in stress wave propagation, Jour. of Applied Mechanics, pp.141~146. March, 1975.
- 33) Nicholson D.W. : A note on a Laplace transform in viscoplasticity, Acta Mechanica, 24, pp.327~331, 1976.
- 34) Melone D.W. and Connor J.J. : Finite elements and dynamic visco elasticity, A. S. C.E., pp.1145~1158, Aug. 1971.
- 35) Akai k. and Hori M. : Considerations of wave characteristics in soil assumed as a viscoelastic materials, proc. of JSCE, No. 221, pp.81~88, Jan. 1974.
- 36) 渡辺, 畑野 : 動的地盤係数の測定 —粘土地盤における載荷板の寸法効果—, 土木学会論文報告集, 第178号, pp.47~52, 1970年6月.
- 37) 村上, 岩附 : 内圧を受ける円筒かくの遷移クリープ変形, 日本機械学会論文集 (第I部), 35巻 271号, pp.459~469, 昭和44年3月.
- 38) 速水博秀 : 打撃せん孔の機械力学的研究, 公害資料研究所報告, 第7号, pp.1~146, 昭和50年9月.
- 39) 堀井, 川原 : 有限要素法による粘弾性体の解析法, 土木学会論文報告集, 第179号, pp.23~35, 1970年7月.
- 40) Zienkiewicz O.C. et al : A numerical method of visco-elastic stress analysis, Int. mech. Sci. Program Press, VoL. 10, pp.807~827, 1968.
- 41) 矢川, 宮崎 : 有限要素法によるクリープ解析の現状, 日本機械学会誌, 第79巻, 第691号, pp.42~48, 昭和51年6月.
- 42) Brilla J. et al : The generalization of the finite element method for the solution of visco-elastic two-dimensional problems, Symposium Gothenburg / Sweden, Mechanics of visco-elastic media and bodies, pp.229~241, Sep. 1974.
- 43) Alfley T. : Non-homogeneous stresses in visco elastic media, Meeting of the Society of Rheology, pp.113~119, Vol. II, No.2, Oct. 1943.
- 44) Kerr A.D. : Elastic and viscoelastic foundation models, Jour. of Applied Mechanics, pp.491~498, Sep. 1964.
- 45) Lee E.H. : Stress analysis in visco-elastic bodies, Vol. XIII, No.2, pp.183~190, Jun. 1954.
- 46) 田中豊喜 : 有限要素法による線形粘弾性体の応力解析, 日本鋼構造協会 第3回大会研究集会マトリックス構造解析講演論文集, pp.422~429, 1969年5月.
- 47) Booker J.R. and Small J.C. : The numerical solution of visco-elastic problems using Laplace transforms, Finite Element Methods in Engineering, The univevrsity of New South wales, pp.315~326, 1974.

- 48) 中島, 丹羽, 小林: 数値ラプラス逆変換の過渡応答解析への応用, 土木学会 年次学術講演会講演概要集(I), pp.526~527, 1976年10月.
- 49) 台丸谷, 内藤: 熱衝撃を受ける半無限の過渡的挙動の解析, 日本機械学会論文集(第I部), 39巻, 318号, pp.518~527, 昭和48年2月.
- 50) Wu C.H. and Ting T.C. : On the contact problem of a rigid punch pressed on a viscoelastic beam, *Jour. of Applied Mechanics*, pp.461~468, Jun. 1972.
- 51) Ashton J.E. and Moavenzadeh F : Linear viscoelastic boundary value problems, *A. S.C.E., EM1*, pp.117~136, Feb. 1968.
- 52) Kaliszky S. : Large deformations of rigid-viscoplastic structures under impulsive and pressure loading, *Jour. of Struct. Mech.*, pp.295~317, 1973.
- 53) 草間, 三井, 入口: ラプラス変換による線形粘弾性問題の数値解析, 土木学会中部支部研究発表会講演概要集, pp.1~2, 昭和51年1月.
- 54) 草間, 三井, 入口: 対応原理による線形粘弾性解析, 土木学会第32回年次学術講演会講演概要集, pp.86~87, 昭和52年10月.
- 55) 山田嘉昭: 塑性・粘弾性, コンピュータによる構造工学講座II~2-A, 日本鋼構造協会編, 培風館, pp.160, 昭和47年5月.
- 56) Lee E. H., et al : Stress analysis for linear viscoelastic materials, *Transactions of the society of Rheology III*, pp.41~59, 1959.
- 57) Cost. T. L. : Approximate Laplace transform inversions in viscoelastic stress analysis, *AIAA Journal*, Vol.2, No.12, pp.2157~2166. Dec. 1964.