Journal of the Faculty of Engineering, Shinshu University, No. 37, 1974
信州大学工学部紀要　第37号

管内旋回流の共役解

池田敏彦*　大路通雄**　坂田光雄***
（昭和49年10月30日受理）

Conjugate Solutions of a Swirling Pipe Flow

Toshihiko IKEDA, Michio OHJI and Mitsuo SAKATA

Conjugate solutions of a steady axisymmetric swirling flow of an inviscid fluid in a straight circular pipe are calculated according to the finite transition theory proposed by Benjamin. Assuming an upstream velocity with uniform axial component and Hamel-Oseen's swirl component, the downstream solutions can be divided into three classes. They are a reverse flow type, a decelerated flow type and an accelerated flow type, and the former two types satisfy the conditions of the finite transition from a supercritical state of flow ($N>1$) to a subcritical one ($N<1$), while the accelerated flow type does not satisfy those conditions. Giving several values of the flow parameters, numerical work can be carried out by using the Runge-Cutta-Gill method. The results show that as the swirl ratio is increased, with the vortex core radius being fixed, the reverse flow type, the decelerated flow type and the accelerated flow type appear in order.

1　はしがき

粘性を省略した管内の軸対称旋回流には同一の流量に対して二つの可能な流れが存在することが知られている．一つの可能な流れの状態は軸対称な定在波を持つことが出来る流れであり，他方は定在波を持ちえない流れである．この二つの可能な流れの状態は開水路の跳水と類似で，それぞれ常流（Froude 数<1）と射流（Froude 数>1）に相当する．

Benjamin[1),2),3)] は Harvey[4)] の軸対称タイプの渦流崩壊の実験に基づいて，崩壊現象は軸対称旋回流の互いに力学的に共役な一対の共役解の間の有限遷移であると解釈した．これは崩壊現象の不連続性を最も自然に説明するものであり，衝撃波と比較する点で興味深い．

しかしながら，有限遷移論に基づく流れの定量的な議論は乏しく，したがって実験との比較にも不都合である．そこで，本報告は Benjamin の有限遷移論の構造を明らかにし，その正当性を検討する目的で，一つのモデル解析を試みた結果について報告する．

*　機械工学教室助手
**　機械工学教室教授
***　大学院修士課程

2 モデル解析

定常，軸対称，非粘性流体に対する円管流の運動方程式は，xを軸方向にとり流れ関数ψを導入して

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{1}{2y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{dH(\psi)}{d\psi}+\frac{1}{2y}\frac{dI(\psi)}{d\psi}=0 \tag{1}$$

で表わされる．ここで，$H(\psi)$, $I(\psi)$ はベルヌーイの定数と循環を示し，それぞれ

$$H(\psi)=\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}(v^2+w^2),\ I(\psi)=yv^2;\quad y=\frac{1}{2}r^2 \tag{2}$$

である．又，流れ関数ψは

$$w=\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} \tag{3}$$

で定義される．さらに，(1)式の第3項は半径方向の遠心力と圧力勾配のつり合いの式と(2), (3)式から

$$\frac{dH(\psi)}{d\psi}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{1}{2yw}\frac{\partial I}{\partial y} \tag{4}$$

を満たさなければならない．

次に以下のような無次元量を導入して

$$\left.\begin{aligned}&V'=v/\overline{w},\ W'=w/\overline{w},\ p'=p/\rho\overline{w}^2,\ \psi'=\psi/\tfrac{1}{2}R^2\overline{w}\\&I'=I/\tfrac{1}{2}R^2\overline{w}^2,\ H'=H/\overline{w}^2,\ x'=x/R,\ \eta'=r/R\\&y'=y/\tfrac{1}{2}R^2\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

(1)～(4)式を無次元化し，プライム「′」を取り除いて書き直すと

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{1}{2y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{dH(\psi)}{d\psi}+\frac{1}{2y}\frac{dI(\psi)}{d\psi}=0 \tag{1$'$}$$

$$H(\psi)=P+\frac{1}{2}(V^2+W^2),\ I(\psi)=yV^2;\ y=\eta^2 \tag{2$'$}$$

$$W=\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{1}{2\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\eta} \tag{3$'$}$$

$$\frac{dH(\psi)}{d\psi}=\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{1}{2yW}\frac{\partial I}{\partial y} \tag{4$'$}$$

が得られる．ここで R は円管半径であり，$\bar{w}$ は平均軸流速度である．円管内のある断面で，H と I が ϕ の関数として知られると $(1)'$ 式の形が定まる．

ここで流れ方向の変化がないような円管内の流れの場に注目しよう．$(1)'$ 式は

$$\frac{d^2\phi}{dy^2}-\frac{dH(\phi)}{d\phi}+\frac{1}{2y}\frac{dI(\phi)}{d\phi}=0 \qquad (1)''$$

と書き改ためられ，V，W 等の諸量は y のみの関数となる．$(1)''$ 式が共役解を求めるための基礎方程式である．いま，円管内の無限上流で，軸流速度及び旋回速度が次式の

$$W=1\ (\text{一様流}),\ V=\frac{\gamma}{\eta}\frac{1-\exp(-\alpha\eta^2)}{1-\exp(-\alpha)}\ (\text{Hamel-Oseenタイプの渦}) \qquad (6)$$

で表わせるような流れが実現していると仮定する．ここで $\alpha\,(>0)$ は渦コアーの大きさを表わすパラメータである．γ は円管壁面上 $(\eta=1)$ での旋回速度に対する軸流速度の比で，言いかえると壁面上での旋回度であり

$$\gamma=V_{\eta=1}/W \qquad (7)$$

で定義される．

(6) 式で仮定された上流の速度分布と $(2)'$，$(3)'$，$(4)'$ 式の関係から，$(1)''$ 式の $dH/d\phi$，$dI/d\phi$ は直ちに計算されて

$$\frac{d^2\phi}{dy^2}=\frac{\alpha\gamma^2}{\{1-\exp(-\alpha)\}^2}\cdot f(\phi)\cdot\left(\frac{1}{\phi}-\frac{1}{y}\right) \qquad (8)$$

$$f(\phi)=\exp(-\alpha\phi)-exp(-2\alpha\phi)$$

となる．上流の解を ϕ_A とすると，ϕ_A は (6) 式と $(3)'$ 式から直ちに積分されて

$$\phi_A=y \qquad (9)$$

となり，むろん (8) 式を満足する．一方，連続の条件により，境界条件は $\eta^2=y$ を考慮して

$$\phi(0)=0,\ \phi(1)=1 \qquad (10)$$

と書き表わされる．問題は(10)式の条件を満足して，上流の解 ϕ_A と共役な解を(8)式から求めることである．言いかえると $(y-\phi)$ 平面において $(0,0)$ と $(1,1)$ のみで交わり，ϕ_A と共役な解 ϕ_B を見いだせばよい（図１）．ここで，(8) 式の二階常微分方程式は次のような性質を持つことが容易に予想される．すなわち，$f(\phi)$ は $\phi>0$ の値に対して常に正の値を持つ．最初に，$[d\phi/dy]_{y=0}<1$ の条件で出発した解 ϕ_B を考えると，(8) 式から $0<\phi<y$ に対して $d^2\phi/dy^2>0$（正の曲率）となり，$\phi_A=y$ と交わることが期待される．次に，$[d\phi/dy]_{y=0}>1$ で出発する解 ϕ_B は $y>\phi$ に対して $d^2\phi/dy^2<0$（負の曲率）となり，やはり $\phi_A=y$ と交わるであろう．

以上の予想のもとで，具体的な計算は次の順序で行なう．

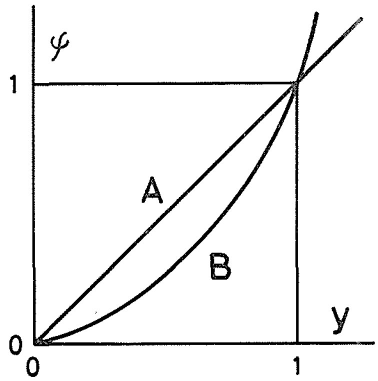


図1 共役解の模式図
Aは上流の解 $\phi_A = y$, B はそれと共役な下流の解 ϕ_B である. $y = 0$ は中心軸, $y = 1$ は円管壁を表わす.

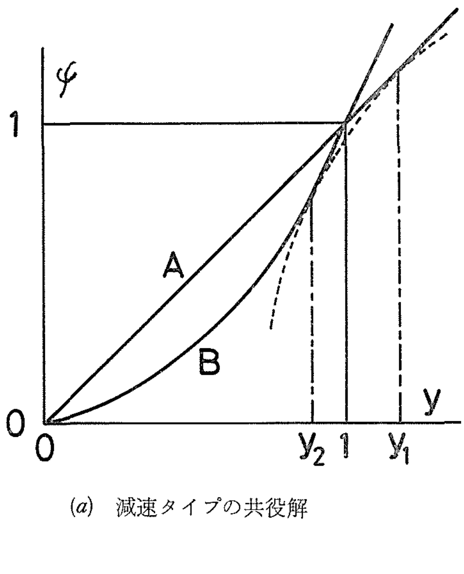
(i) 任意に与えた上流の二つのパラメータ α, γ に対して, 下流の中心軸上の軸流速度 $W_0 (= [d\phi/dy]_{y=0})$ を適当に仮定する.

(ii) この一組の α, γ, W_0 を用いて Runge-Kutta-Gill の方法[5]で(8)式を数値積分し, (10)式の連続の条件を満足するような W_0 を試行錯誤によって見い出す.

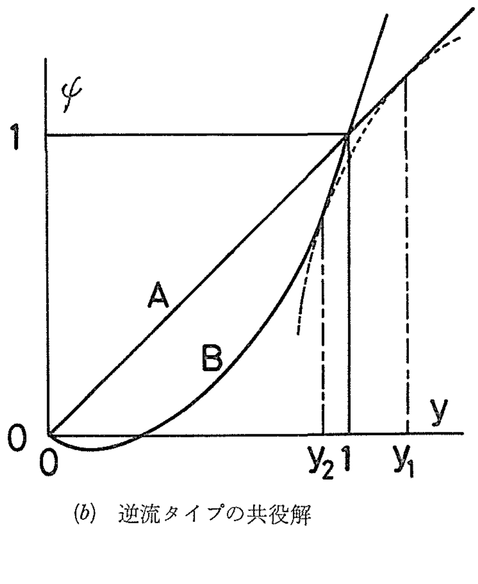
(iii) こうして数値的に求められた下流の解 ϕ_B から直ちに下流の軸流速度分布は求まる. 一方, 旋回速度分布は上流, 下流で同じ値を持つ流線上で, 循環が等しいことから求まる.

3 計算結果

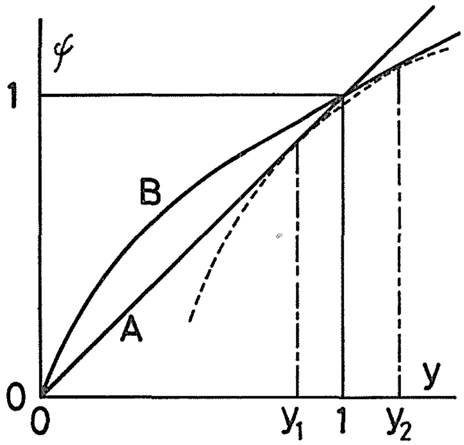
前節2で述べた手順で, 上流の解 $\phi_A = y$ の共解 ϕ_B を求めると, 大別して三つのタイプに分類される. 図2(*a*), (*b*), (*c*)にそれぞれのタイプの模式図を示す. (*a*)タイプは上流の解 ϕ_A の中心軸上速度が1であるのに比較して, 下流の解 ϕ_B のそれが減速される場合である. このタイプの解は, 崩壊現象が中心軸上で, よどみ点を持つか, 又はそれに近い状態に減速されるという実験事実に対応している[6]. 又, 付録の§3における基準に照らすと, ϕ_A が包絡線と接する点の y 座標 y_1 は $y_1 > 1$ (壁面)であり, 一方, ϕ_B のそれの y_2 は $y_2 < 1$ であることから, ϕ_A は射流, ϕ_B は常流であることがわかる. さらに, 付録の §2 で導入された特性パラメーター N を考



(*a*) 減速タイプの共役解



(*b*) 逆流タイプの共役解



(c) 加速タイプの共役解

図2　共役解の三つのタイプの模式図
Aは上流の解 $\phi_A = y$ であり，B はそれと共役な下流の解 ϕ_B を表わす．図中の破線は解の存在する領域を規制する包絡線であり，それと解A, Bが接する点の y 座標を y_1, y_2 とすると，このy_1, y_2 と壁面 ($y = 1$) との大小関係により，流れの状態 (開水路でいう射流，常流) が判定される (付録 §3 を参照).

慮すると，ϕ_A は $N > 1$ の流れであり，ϕ_B は $N < 1$ である※. (b) タイプの解 ϕ_B は中心軸付近に逆流が存在するが，包絡線との接点の y 座標と壁面との大小関係により，上流の解 ϕ_A は射流 ($N > 1$), 下流の解 ϕ_B は常流 ($N < 1$) である. (c) タイプはすでに上流の解 ϕ_A は常流 ($N > 1$) であり，崩壊の可能性を持たない．又，下流の解 ϕ_B の中心軸付近が加速されるというように実験事実に相反した特色を示す．

図3～6に $\alpha(=6)$ に個定して，γ を変えたときの共役解の計算例を示す． 図中で A が射流 ($N > 1$), Bは常流 ($N < 1$) である．なお，W_0 は B の中心軸流速度であり，Γ は後に定義される旋回パラメータである．図3と4は (b) タイプの解で， 中心軸付近で逆流がみられる．この逆流の程度を比較すると，旋回度 γ が小さい程，逆流が大きいし，又，逆流の存在する半径も大きい．この段階から旋回を高めると (a) タイプの解が現われる (図5， 6). むろん，このタイプには逆流はないが，図3と4でみられたように， 旋回度 γ が大きい程，常流 B の減速の度合が小さい．さらに旋回を高めると，B は A の上に現われ，中心軸流速度は加速される ((c)タイプ). 以上のことから，α すなわちコアーの大きさ一定のもとで，旋回度を高めるにつれて， 最初に逆流を持つ (b) タイプが現われ，さらに (a) タイプ，(c) タイプの順に続くことがわかる．図4と5との間のある旋回度 γ で，ちょうどよどみ点 ($W_0 = 0$) を持つBの存在が予想される．

以上の四つの共役解の計算例から求めた旋回及び軸流速度分布を図7， 8に示す．破線は (6) 式で仮定した上流の分布であり，実線は下流の分布である．旋回速度 V の最大値を示す半径 χ と α の関係は，次のことから旋回度 γ に無関係に一対一に対応していることがわかる．すなわち，$dV/d\eta = 0$ の条件から

* Benjamin によると，$N > 1$ の流れに対して「supercritical flow」, $N < 1$ に対して「subcritical flow」という言葉が使われているが， ここでは便宜のため，以下， 跳水で通常用いられている「射流」，「常流」を用いる．

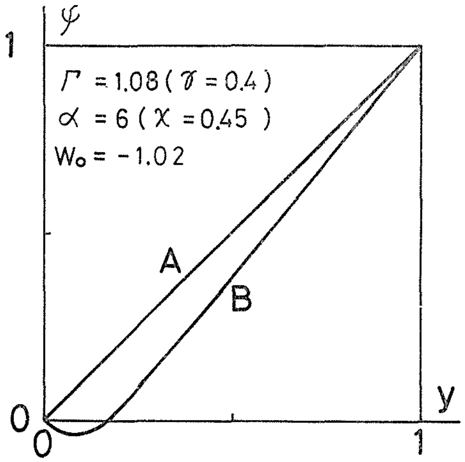


図 3　逆流タイプの共役解の計算例
A は上流の解，B は下流の解，Γ は (12) 式で定義した旋回パラメータ，W_0 は解 B の中心軸流速度，α は渦コアーの大きさを表わすパラメータ，χ は旋回速度 V が最大値を持つ半径である．

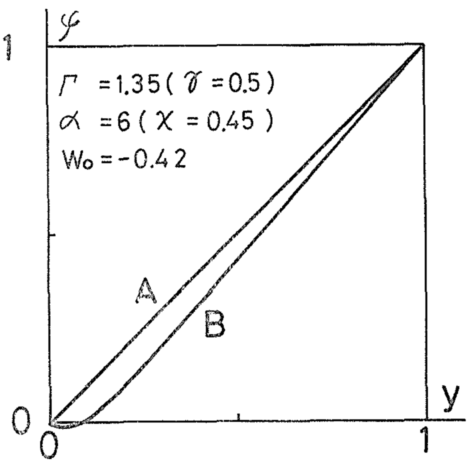


図 4　逆流タイプの共役解の計算例
記号は図 3 と同じ．

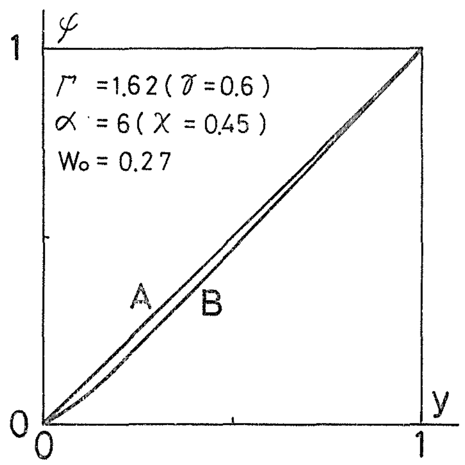


図 5　減速タイプの共役解の計算例
記号は図 3 と同じ．

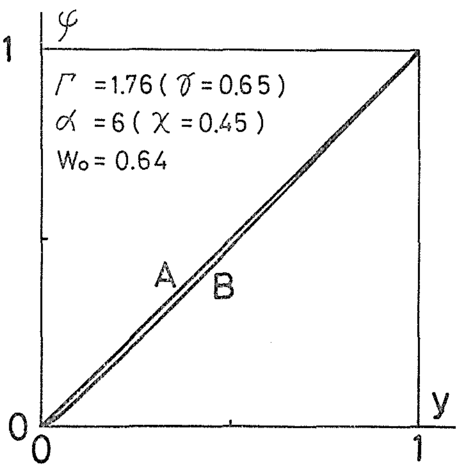


図 6　減速タイプの共役解の計算例
記号は図 3 と同じ．

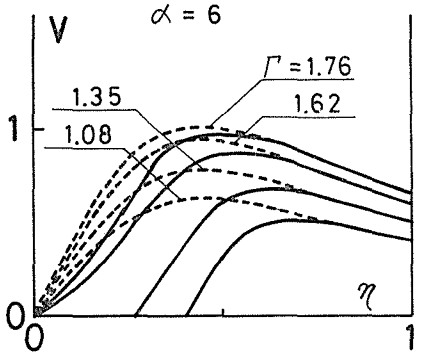


図7　旋回速度分布
破線は上流，実線は下流を表わす．

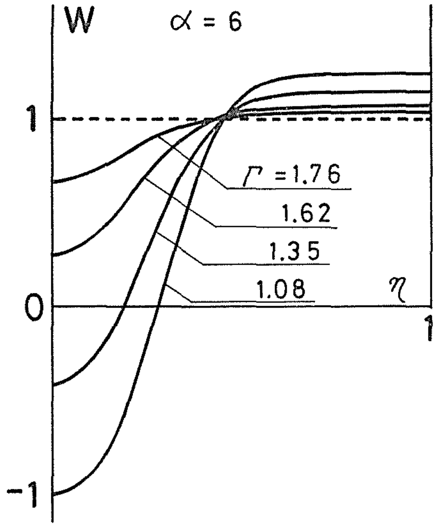


図8　軸流速度分布
破線は上流，実線は下流を表わす．

$$2\alpha\chi^2 + 1 = \exp(\alpha\chi^2) \qquad (11)$$

となる．この関係を図9に示す．

次に旋回パラメータ Γ を次式で定義する．

$$\Gamma = \left[\frac{dv}{d\eta}\right]_{\eta=0} \cdot \chi / \overline{W} = \frac{\alpha\chi\gamma}{1-\exp(-\alpha)}. \qquad (12)$$

Γ は χ と γ の関数となるが，渦流を特色づけるパラメータとしても，実験との比較の点においても都合が良い．

最後に，図10に $(\alpha-\gamma)$ 平面で，三つの解のタイプ (a), (b), (c) が現われる領域を図示する．図中で，○は (a) タイプ，●は (b) タイプ，×は (c) タイプに相当する．(a) タイプの解は細い帯状に分布しているし，(b) タイプは旋回度 γ の小さい領域に現われるのが特色である．旋回パラメータ Γ 一定の線を図示すると，この線が三つの解のタイプの現われ方と同じ傾向を示していることがわかる．

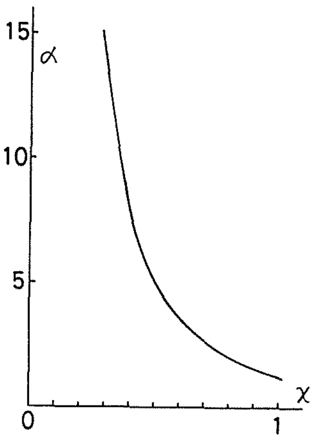


図9　α と χ の関係

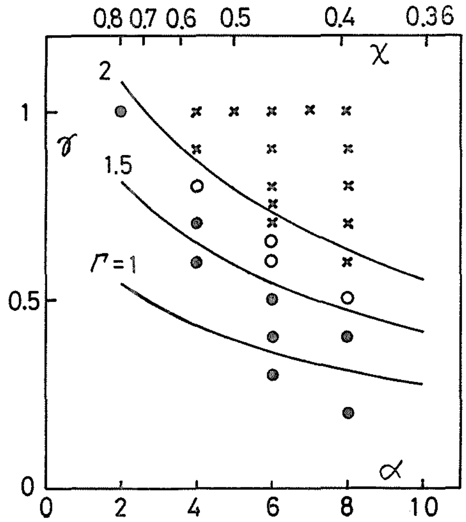


図10　三つのタイプの共役解の分布図
図中で○は減速タイプ，●は逆流タイプ，×は加速タイプを表わす．

4 む　す　び

有限遷移論に基づく共役解のモデル計算の結果を要約すると次のことが言える．

(ｉ) 仮定した上流の速度分布(一様軸流速度と Hamel-Oseen タイプの渦)に対して，下流の解のタイプは三つに分けられる．それらは逆流タイプ (b)，減速タイプ (a)，加速タイプ (c) であり，前者の二つのタイプは射流 $(N>1)$ から常流 $(N<1)$ への遷移の条件を満足しているが，(c) タイプは上流の解が常流 $(N<1)$ となり，遷移の可能性を持たない．

(ii) 渦コアーの大きさ一定のもとで，旋回度 γ が増加するにつれて，逆流タイプ，減速タイプ，加速タイプの順に現われる．又，同タイプで旋回度による影響を考慮すると，旋回度が小さい程，下流の軸流速度分布は上流のそれからは大きくずれる．

(iii) 二つの互いに独立なパラメーターである旋回度 γ と渦コアーの大きさ χ の代りに，(12)式で定義した旋回パラメータ Γ を導入すると，Γ 一定の線は三つのタイプの解の現われ方と同じような傾向を示す．このことは渦流を特色づけるパラメータとして便利であるし，実験と比較するにも都合が良い．

(iv) 有限遷移モデルは，開水路の跳水で重力 g の効果を旋回による遠心力におきかえたことに対応する．すなわち，$g\to 0\ (Fr\to\infty)$ は旋回のない場合 $(\gamma=0)$ に相当し，そのときの流れは高次の射流 $(N\to\infty)$ になる．旋回を高めるにつれて，流れは臨界 $(N=1)$ に近づき，それを越えると流れは常流 $(N<1)$ になる．

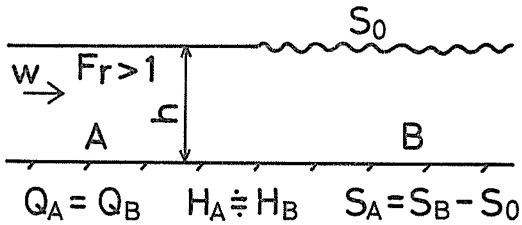
おわりに．数値計算のプログラム作成に協力をいただいた和歌山高専の舟田敏雄助手に感謝の意を表わします。

付録　　有限遷移論

1962年，Benjamin により提唱された有限遷移論の大要を述べよう．この理論は開水路の跳水現象を基礎に，その類似で軸対称渦流崩壊現象を説明しようとしたものである．この理論の構成は主に，開水路の跳水モデル，運動方程式からの流れの状態の考察，さらに変分原理を用いて共役解の説明とから成っている．以下，その順序で要点を述べる．なお詳細は文献 1) を参照されたい．

§1　開水路の跳水モデル

開水路の跳水現象は射流(Froude 数 >1) から常流 (Froude 数 <1) への遷移であり，射流の Froude 数の大きさにより遷移の強さが異る．ここで扱うモデルは射流の Froude 数が 1 に近く，従って弱遷移である．この場合，図A1 に示すように，常流は無限小定在波を持つ．領域 A と B で，流量 Q，全エネルギー H は保存されるが，次式で定義する流れ方向の運動量



図A1　開水路の跳水モデル

$$S = \rho(w^2h + \frac{1}{2}gh^2) \tag{A1}$$

の増加を伴う． この増加分 $(S_B - S_A)$ が常流に存在する定在波の造波抵抗 S_0 により相殺されて定常状態が実現する．

§2　運動方程式からの流れの状態

流れの状態 (開水路でいう射流，常流) を判定するために，特性パラメータとして

$$N = \frac{C_+ + C_-}{C_+ - C_-} \tag{A2}$$

を導入する．ここで，C_+ は主流の速度と，それと同方向に伝播する撹乱の速度との和であり，C_- は差である．跳水モデルでは $C_+ = w + \sqrt{gh}$，$C_- = w - \sqrt{gh}$ であり (A2) 式は

$$N = \frac{w}{\sqrt{gh}} = \text{Froude 数} \tag{A3}$$

となる．$N > 1$ の流れは射流に，$N < 1$ は常流に対応している．

これを定常，軸対称，非粘性旋回流に適用しよう．再び基礎方程式 (1) を書くと

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{1}{2y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{dH(\psi)}{d\psi}+\frac{1}{2y}\frac{dI(\psi)}{d\psi}=0 \tag{1}$$

である．円管内のある断面で，(1) 式の解が知られているとする．この解を ψ_A とすると，ψ_A が $N>1$ か又は $N<1$ の流れかを判別するために次のような流れ関数を考える．

$$\psi\,(x,y)=\psi_A((y)+\varepsilon\phi(y)\cdot e^{\beta x} \tag{A4}$$

これを (1) 式に代入し，高次の項を無視すると

$$\phi_{yy}+\left\{\frac{\beta^2}{2y}-\frac{w_{yy}}{w}+\frac{I_y}{2yw^2}\right\}\phi=0 \tag{A5}$$

が得られる．一方，連続の条件は

$$\phi(0)=0,\quad \phi(a)=0 \tag{A6}$$

を与える．ここで，$y=a$ は円管壁を表わす．(A5) 式と (A6) 式は Sturm-Liouville 系で，全ての固有値 $\beta^2>0$ のとき，流れは射流であり，$N>1$ に対応する．一方，少なくとも一つの $\beta^2<0$ が存在するときには流れは常流 ($N<1$) で，波長 $2\pi/\sqrt{-\beta^2}$ の定在波を持つ．$\beta^2=0$ は臨界であり，そのときの解を ϕ_c とすると，(A6) 式のどちらか一方の条件を満たす．この ϕ_c と ϕ の $0\geqq y\geqq a$ 間の振動を比較することにより，流れの状態の判別が出来る[7]．

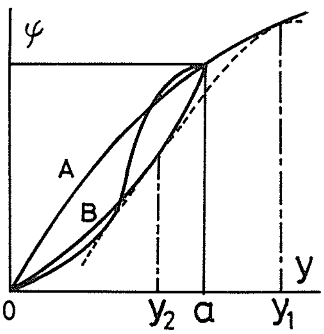
§3 変分原理による共役解の説明

§1 で定義した流れ方向の運動量を管内流に適用すると

$$S=2\pi\int_0^a(p+\rho w^2)dy=2\pi\rho\int_0^a\left\{\frac{1}{2}\psi_y{}^2+H(\psi)-\frac{I(\psi)}{2y}\right\}dy \tag{A7}$$

と書ける．ここで，S の第一変分 ($\delta S=0$) を考えると

$$\frac{d^2\psi}{dy^2}-\frac{dH(\psi)}{d\psi}+\frac{1}{2y}\frac{dI(\psi)}{dy}=0 \tag{A8}$$



図A2 共役解と包絡線との接点の関係

となり，運動方程式と一致する．又，第二変分 (δ^2S) を考慮すると，§2 で述べた流れの状態を記述する方程式 (A5), (A6) の固有値 $\beta^2=0$ のときの臨界に相当する式が得られる．このことから，(A7)式で定義した S を考えることにより，力学的な問題を変分問題として取り扱うことが可能になる．

一般に，($y-\psi$) 平面において同一の流量を持つ (A8) 式の解は数多く存在することが予想される (図A2)． この数多く存在する解の中で，S を最小にす

る解があり，その解は $N>1$ の射流に対応する．又，これらの解の存在する場は一本の包絡線により規制される．この包絡線とおのおのの解が接する点の y 座標と管壁 a の大小関係により，$N>1$ か又は $N<1$ の流れであるかがわかる．すなわち，図A2 で ψ_A と包絡線との接点の y 座標 y_1 が $y_1>a$ のとき，ψ_A は射流で，S は最小値を取る．ψ_B と包絡線との接点の y 座標 y_2 が $y_2<a$ のとき，ψ_B は常流で，S は最小値でも最大値でもない．

文　　献

1) T. B. Benjamin, "Theory of the vortex breakdown phenomenon" *J. Fluid Mech.*, *Vol.* **14** (1962), 593–629.
2) T. B. Benjamin, "Significance of the vortex breakdown phenomenon" *J. Basic. Engng.*, *Trans. ASME.*, *Ser. D*, *Vol.* **85** (1965), 518-524.
3) T. B. Benjamin, "Some developments in the theory of vortex breakdown" *J. Fluid Mech.*, *Vol.* **28** (1967), 65–84.
4) J. K. Harvey, "Some observations of the vortex breakdown phenomenon" *J. Fluid Mech.*, *Vol.* **14** (1962), 585-592.
5) 一松信著，"数値計算" 近代数学新書，1963年，174–190.
6) T. Sarpkaya, "On stationary and travelling vortex breakdown" *J. Fluid Mech.*, *Vol.* **45** (1971), 545–559.
7) E. L. Ince, "Ordinary differential equations" *Dover publications*, 1956, 223–253.