

隅を円弧で丸めた長方形孔のある無限板の応力解析

(孔縁補強による影響)

佐々木三郎*・志摩政幸**

(昭和49年10月31日受理)

Stress Analysis of an Infinite Sheet having a Rectangular Hole with Circular Corners

—On the effect of the reinforcement around a hole—

Saburo SASAKI and Masayuki SHIMA

This paper presents a solution of the stress distributions of an infinite sheet having a reinforced rectangular hole with circular corners. The sheet is assumed to be subjected to a uniformly tensile stress at infinity and the stress analysis of the sheet is calculated by the complex potentials.

Many authors have analyzed the stress of the sheet using the conformal mapping function which maps nearly the shape. When these functions are used, the curves of corners along the hole are not circular and the curvature at each point on the boundary varies gradually, therefore the stress concentration factors are calculated smaller than the expected values.

So, to analyze the stress correctly, we used the exact mapping function obtained by M. Kikukawa's method and we analyzed the stress in the sheet and the reinforcement by the method of W.H. Wittrick.

And the numerical results obtained by the above treatment are shown in many figures to give useful data of the stress distribution and the stress concentration in the cases of various sizes of radii and reinforcements.

1 ま え が き

薄板構造物では出入口や配管・点検などの理由から長方形の孔をあけることが多く、その際隅角部からの破壊を避けるためと工作し易さから隅を円弧で丸めるのが普通である。

このような有孔板に生ずる平面応力を解析するには複素応力関数を用いるのが有力で、 z 面(物理面)の孔の曲線 Γ の外部領域を ζ 面の単位円 γ の外部または内部に等角写像する関数 $z = \omega(\zeta)$ を利用している。

* 機械工学教室 助教授

** 昭和49年3月大学院修士課程修了

従来の研究では¹⁾比較的簡単な写像関数を用いているため、 γ に対応する z 面の Γ は近似長方形孔となり、隅は円弧とならず曲率半径も徐々に変化している。そのため曲率の大きさに鋭敏なへり応力も緩やかに変化し、応力集中係数なども少なめに計算されている。

この研究は直線と円弧部分からなる有孔板の一例として、孔縁を補強した表題の有孔無限板に、面内引張荷重が作用したとき生ずる応力を計算し、とくに接合部の応力状態を種々の円弧半径・補強量について検討したものである。

内容は二つの部分からなっている。初めに曲線 Γ の外部領域に対応する写像関数 $z = \omega(\zeta)$ を計算するのに、近似曲線 Γ_0 を与える $z = \omega_0(\zeta)$ から出発する菊川の方法²⁾を用い、種々の円弧半径・辺比をもつ長方形孔無限領域の写像関数を求め、つぎに上記孔縁を補強した無限板に一樣な引張力が作用したとき生ずる応力を、Wittrickの方法³⁾により計算し、その結果を見易いように図表にまとめたものである。

周知のように補強のある円孔無限板についてはGurney⁴⁾らの早期の研究、補強材を円環とみなした筆者の1人⁵⁾の計算などがあるが、補強のある長方形孔などになると厳密な扱いは困難になり、本研究でも補強材は引張剛性のみを持つとした上記の方法を適用している。(計算は図1の形状、表1の各種寸法について行った)

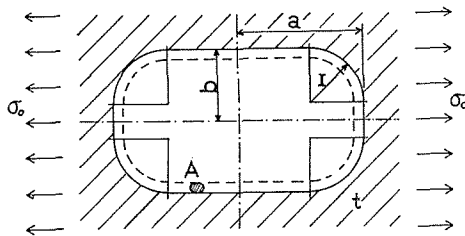


図1 孔縁を補強した有孔板

表1 計算に用いた数値

| | |
|----------------------|---|
| $A' = \frac{A}{bt}$ | $0, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ |
| $\frac{a}{b}$ | $2, \frac{3}{2}, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ |
| $\rho = \frac{r}{b}$ | $0.2, 0.3, \dots (0.1) \dots, 1.0$ |

t : 無限板の板厚

r : 円弧半径

A : 補強材の断面積

2 隅を円弧で丸めた長方形孔無限領域の写像関数

z 面の曲線 Γ の外部を、 ζ 面の単位円 γ の外部に写像する関数は次式で与えられる。

$$z = \omega(\zeta) = C_{-1}\zeta + C_0 + \frac{C_1}{\zeta} + \frac{C_2}{\zeta^2} + \dots \quad (1)$$

ただし $\omega(\zeta)$ は考えている領域で正則で $\omega'(\zeta) \neq 0$,

係数 C_i は一般に複素数である。

任意の曲線 Γ を与えて(1)式の係数を定めることは一般に困難で、仮りに求められたとしても無限級数のままでは後述の応力計算にそのまま適用できない。むしろ比較的項数の少ない写像関数で Γ に極めて近い曲線が得られれば好都合であろう。

以下に近似曲線 Γ_0 を与える $z = \omega_0(\zeta)$ から, Γ の写像関数 $z = \omega(\zeta)$ を導く菊川の方法を略述し, 表題の領域に適用する計算の手順を述べる.

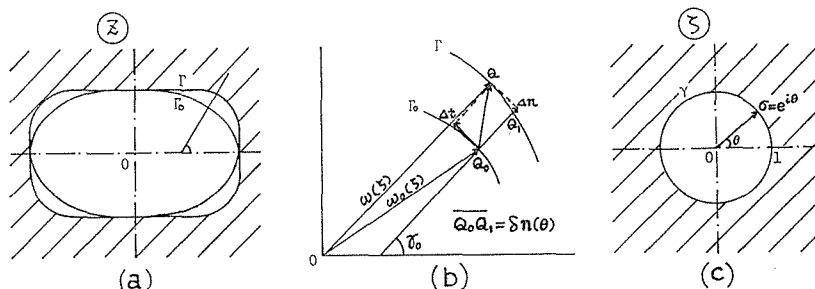


図2 $\Gamma_0: z = \omega_0(\zeta)$ から $\Gamma: z = \omega(\zeta)$ を求める菊川の方法

図2において Γ_0, Γ を与える写像関数を $\omega_0(\zeta), \omega(\zeta)$ としその差を

$$\Delta \omega(\zeta) = \omega(\zeta) - \omega_0(\zeta) \tag{2}$$

とおいて, $\Delta \omega(\zeta)$ を定めようとする.

r 円上の点 $\zeta = e^{i\theta}$ に対応する Γ_0, Γ 上の点を Q_0, Q とすれば $\overrightarrow{Q_0Q} = \Delta \omega(\zeta)$ で, これの Q_0 における曲線 Γ_0 の法線成分, 接線成分を $\Delta n(\theta), \Delta t(\theta)$ とおけば

$$\Delta \omega(\zeta) = (\Delta n(\theta) + i \Delta t(\theta)) e^{i r_0}, \quad e^{i r_0} = \frac{\omega_0'(\zeta) \cdot \zeta}{|\omega_0'(\zeta)|}$$

$$\text{従って } \frac{\Delta \omega(\zeta)}{\omega_0'(\zeta) \cdot \zeta} = \frac{\Delta n(\theta)}{|\omega_0'(\zeta)|} + i \frac{\Delta t(\theta)}{|\omega_0'(\zeta)|} \tag{3}$$

しかるに (3) 式の左辺は (1), (2) 式より, 考えている領域で正則で, $|z| \rightarrow \infty$ のとき有限値に収束する故次式に展開される

$$\frac{\Delta \omega(\zeta)}{\omega_0'(\zeta) \cdot \zeta} = \frac{\Delta m_0}{2} + \Delta m_1 \frac{1}{\zeta} + \Delta m_2 \frac{1}{\zeta^2} + \dots, \quad (\Delta m_0: \text{実数}) \tag{4}$$

いま $\Delta m_p = \Delta m_p' + i \Delta m_p''$ とおけば (3), (4) 式より

$$\frac{\Delta n(\theta)}{|\omega_0'(e^{i\theta})|} = \frac{\Delta m_0}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} \Delta m_p' \cos p\theta + \sum_{p=1}^{\infty} \Delta m_p'' \sin p\theta, \tag{5}$$

(5) 式より

$$\left. \begin{aligned} \Delta m_p' &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Delta n(\theta)}{|\omega_0'(e^{i\theta})|} \cos p\theta d\theta, \\ \Delta m_p'' &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Delta n(\theta)}{|\omega_0'(e^{i\theta})|} \sin p\theta d\theta. \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

Γ が x 軸について対称な場合は

$$\Delta m_{p'} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\Delta n(\theta)}{|\omega_0'(e^{i\theta})|} \cos p\theta d\theta, \quad \Delta m_{p''} = 0$$

さらに $x \cdot y$ 軸について対称な場合、 $\Delta m_{p'}$ は p が奇数のとき 0 となり $\Delta m_{p'(\text{even})}$ のみとなる。

実際の計算では $\Delta n(\theta)$ は未知であるが、 Γ_0 と Γ が比較的接近していれば、 Q_0 の法線が Γ と交わる点を Q_1 とし、 $\overline{Q_0 Q_1} = \delta n(\theta)$ を $\Delta n(\theta)$ の代りに用いる。(以下 $\delta n(\theta)$ を用いる計算には Δ の代りに δ を使用する) また (6) 式の数値計算は γ 円上の $2m$ 個の等分割点 $\theta_j = j\pi/m$ ($j = 0, 1, 2, \dots, 2m-1$) につき計算し、積分の代りに Σ 計算を行うのである。

以上の計算を 2 軸対称図形の場合について計算の手順を示してみよう。

Γ に対応する写像関数 (1) 式を ζ^{-N} の項まで求める方針のもとに次式におく

$$\omega(\zeta) = C_{-1}\zeta + \frac{C_1}{\zeta} + \frac{C_3}{\zeta^3} + \dots + \frac{C_N}{\zeta^N}, \quad (C_j: \text{実数}, N: \text{奇数}) \quad (7)$$

Γ_0 に対応する初めの近似関数が ζ^{-n} の項まであったとし、計算の便宜上次のようにおく

$$\omega_0(\zeta) = e_{-1}\zeta + \frac{e_1}{\zeta} + \dots + \frac{e_n}{\zeta^n} + \frac{e_{n+2}}{\zeta^{n+2}} + \dots + \frac{e_N}{\zeta^N}, \quad (8)$$

ただし $e_{n+2} = \dots = e_N = 0$. (n : 奇数)

(5), (6) 式を計算するのに $[0, 90^\circ]$ を m 個に等分割し、 $\theta_j = j\pi/2m$ ($j = 0, 1, 2, \dots, m-1$) を単位円 γ 上にとり、 $\zeta = e^{i\theta_j}$ を (8) 式に代入して Γ_0 をえがき Γ との間隔より $\delta n(\theta_j)$ を、また (8) 式よりの $\omega_0'(\zeta)$ から $|\omega_0'(\zeta)|$ を計算する。(5), (6) 式より

$$\left. \begin{aligned} \delta m'_{2p} &= \frac{2}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\delta n(\theta_j)}{|\omega_0'(e^{i\theta_j})|} \cos 2p\theta_j, \quad (p = 0, 1, 2, \dots) \\ \delta m_{2p''} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(4) 式よりつぎの (10) 式となり、これを (11) 式におく

$$\delta\omega(\zeta) = \omega_0'(\zeta) \cdot \zeta \left(\frac{\delta m_0}{2} + \frac{\delta m_2}{\zeta^2} + \frac{\delta m_4}{\zeta^4} + \dots + \frac{\delta m_{N+1}}{\zeta^{N+1}} \right), \quad (10)$$

$$= d_{-1}\zeta + \frac{d_1}{\zeta} + \frac{d_3}{\zeta^3} + \dots + \frac{d_N}{\zeta^N}, \quad (11)$$

d_k は δm_s と e_i より次式で計算される

$$d_k = \frac{\delta m_0}{2} (-ke_k) + \sum_{s=2,4,\dots}^{k+1} \delta m_s \{ -(k-s)e_{k-s} \}, \quad (k = -1, 1, 3, \dots, N) \quad (12)$$

従って(1),(2)式より $\omega(\zeta)$ の近似式の係数は

$$C_j = e_j + d_j. \quad (13)$$

(13)式から計算した C_j を係数とする(1)式の図形と Γ との間に差があれば、これを改めて $\omega_0(\zeta)$ として上の手続きを繰返せばよい。

- 隅を円弧で丸めた長方形孔無限領域の写像関数 (辺比 $a/b = 2, 1.5, 1$ について)
求むる写像関数を項数20 ($N = 37$) の次式にとり

$$\Gamma_i: \omega(\zeta) = C_{-1}\zeta + \frac{C_1}{\zeta} + \frac{C_3}{\zeta^3} + \dots + \frac{C_{37}}{\zeta^{37}}, \quad (14)$$

初めの関数 $\omega_0(\zeta)$ には、楕円を表わす次式をとる

$$\Gamma_0: \omega_0(\zeta) = e_{-1}\zeta + e_1/\zeta \quad (15)$$

ただし $e_{-1}, e_1 = 1.5, 0.5$ ($a/b = 2$), $1.25, 0.25$ (1.5), $1.0, 0.0$ (1 ...正方形孔).

(9)式より $\delta m_{2p'}$ を計算するために、単位円 γ の偏角 $[0^\circ, 90^\circ]$ を 5° 間隔に18分割した。初め $\rho = 1.0$ の曲線 Γ_{10} に近接するには、 Γ_0 との間隔が広すぎるため $\delta n(\theta)$ を $\overline{Q_0 Q_1}$ の $1/2$ にとり徐々に接近するよう上記計算を繰返し、5~6回目に稍々満足できる誤差以内 ($b=1$ に対し $\overline{Q_0 Q_1} < 0.001$) に入る係数 C_j が求まり、これをもとに $\rho = 0.9$ (Γ_9), \dots , 0.2 (Γ_2) と、つぎつぎに対応する係数 C_j を計算した。

図3は $a/b = 2$ における $\Gamma_0, \Gamma_{10}, \Gamma_9, \dots, \Gamma_2$ の図形を示し、表2は C_j の値の一例を、表3は(14)式から求めた $x \cdot y$ 座標の値と Γ_i との間隔 $\delta n(\theta)$ を示す一例である。

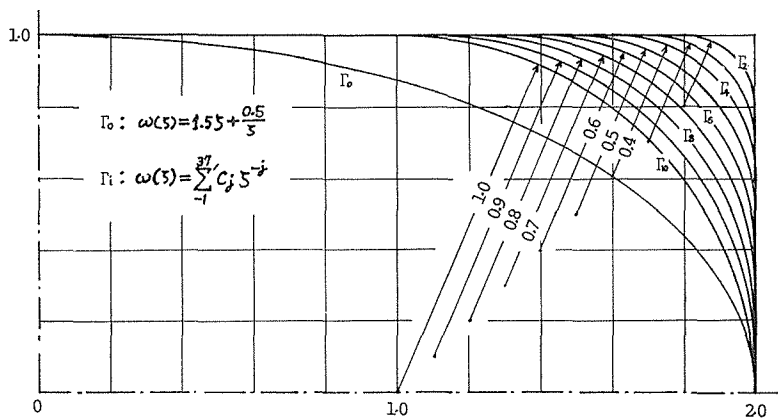


図3 $z = \omega(\zeta)$ を段階的に求める曲線 ($a/b = 2$)

表2 C_j の一例

| a/b | 2 | | 1.5 | | 1 | |
|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | ρ | | | | | |
| j | 0.8 | 0.4 | 0.8 | 0.4 | 0.8 | 0.4 |
| -1 | 1.633576 | 1.704693 | 1.348412 | 1.422625 | 1.050060 | 1.130571 |
| 1 | 0.497113 | 0.522803 | 0.243600 | 0.260271 | 0.0 | 0.0 |
| 3 | -0.127955 | -0.206082 | -0.087698 | -0.172889 | -0.038465 | -0.127246 |
| 5 | 0.012131 | -0.020335 | 0.011919 | -0.007597 | 0.0 | 0.0 |
| 7 | -0.003901 | 0.001652 | -0.010195 | -0.001991 | -0.008374 | -0.006881 |
| 9 | -0.008020 | -0.005517 | -0.003082 | -0.005255 | 0.0 | 0.0 |
| 11 | 0.000194 | -0.001605 | -0.000083 | 0.002458 | -0.002705 | 0.003956 |
| 13 | -0.001011 | 0.003514 | -0.002433 | 0.003086 | 0.0 | 0.0 |
| 15 | -0.001980 | 0.001876 | -0.000083 | -0.000236 | -0.000822 | 0.000207 |
| 17 | 0.000093 | -0.000441 | -0.000319 | -0.000052 | 0.0 | 0.0 |
| 19 | -0.000242 | 0.000047 | -0.000575 | 0.000231 | -0.000120 | -0.000836 |
| 21 | -0.000572 | 0.000298 | 0.000275 | -0.000725 | 0.0 | 0.0 |
| 23 | 0.000181 | -0.000554 | -0.000184 | -0.000426 | 0.000108 | 0.000072 |
| 25 | 0.000026 | -0.000538 | 0.000018 | 0.000323 | 0.0 | 0.0 |
| 27 | -0.000108 | 0.000114 | 0.000219 | 0.000069 | 0.000138 | 0.000258 |
| 29 | 0.000228 | 0.000072 | -0.000037 | 0.000019 | 0.0 | 0.0 |
| 31 | 0.000089 | -0.000117 | 0.000136 | 0.000218 | 0.000111 | -0.000024 |
| 33 | 0.000062 | 0.000195 | 0.000046 | -0.000081 | 0.0 | 0.0 |
| 35 | 0.000115 | 0.000128 | 0.000005 | -0.000149 | 0.000054 | -0.000077 |
| 37 | 0.000015 | -0.000091 | 0.000150 | 0.000054 | 0.0 | 0.0 |

表3 座標値と $\delta n(\theta) (= \overline{Q_0 Q_1})$ の一例

| r 円の 偏角 θ | $a/b = 2, \rho = 0.8$ | | | $a/b = 1.5, \rho = 0.4$ | | |
|-----------------------|-----------------------|----------|------------------------|-------------------------|----------|-----------------------|
| | x | y | $\delta n(\theta)$ | x | y | $\delta n(\theta)$ |
| 0.0 | 2.000034 | 0.000000 | -0.34×10^{-4} | 1.499953 | 0.000000 | 0.47×10^{-4} |
| 3.0 | 1.999980 | 0.083374 | 0.20 // | 1.499970 | 0.090277 | 0.30 // |
| 6.0 | 1.999962 | 0.164722 | 0.38 // | 1.499988 | 0.179765 | 0.12 // |
| 9.0 | 1.998521 | 0.241168 | 4.19 // | 1.500006 | 0.267700 | -0.06 // |
| 12.0 | 1.992138 | 0.312093 | -0.30 // | 1.500027 | 0.353203 | -0.27 // |
| 15.0 | 1.979118 | 0.379818 | 4.00 // | 1.499986 | 0.435362 | 0.14 // |
| 18.0 | 1.960647 | 0.445696 | 6.56 // | 1.499987 | 0.513019 | 0.13 // |
| 21.0 | 0.508971 | 0.508971 | 4.22 // | 1.499660 | 0.584072 | 3.40 // |
| 24.0 | 1.909066 | 0.569327 | 5.15 // | 1.496563 | 0.646447 | 7.26 // |
| 27.0 | 1.875564 | 0.627180 | 7.07 // | 1.487062 | 0.700840 | 0.18 // |
| 30.0 | 1.837542 | 0.682222 | 6.27 // | 1.470004 | 0.750426 | 5.87 // |
| 33.0 | 1.794951 | 0.733904 | 6.13 // | 1.447229 | 0.796868 | 8.45 // |
| 36.0 | 1.747721 | 0.782157 | 6.87 // | 1.419902 | 0.839275 | 5.14 // |
| 39.0 | 1.696128 | 0.826756 | 6.47 // | 1.387515 | 0.877207 | 6.14 // |
| 42.0 | 1.640231 | 0.867240 | 6.17 // | 1.350253 | 0.911128 | 7.17 // |
| 45.0 | 1.579990 | 0.903374 | 5.99 // | 1.308740 | 0.940524 | 5.89 // |
| 48.0 | 1.616463 | 0.934594 | 5.35 // | 1.262637 | 0.964723 | 6.59 // |
| 51.0 | 1.446533 | 0.969579 | 4.63 // | 1.211872 | 0.983580 | 4.39 // |
| 54.0 | 1.373024 | 0.980703 | 3.53 // | 1.156256 | 0.995730 | 2.91 // |
| 57.0 | 1.294240 | 0.993921 | 5.06 // | 1.092898 | 1.000176 | -1.76 // |
| 60.0 | 1.207877 | 0.999765 | 1.96 // | 1.018652 | 0.999987 | 0.13 // |
| 63.0 | 1.111375 | 1.000457 | -4.57 // | 0.934816 | 0.999685 | 3.15 // |
| 66.0 | 1.005016 | 0.999853 | 1.47 // | 0.844967 | 1.000135 | -1.35 // |
| 69.0 | 0.891650 | 0.999903 | 0.97 // | 0.750291 | 1.000110 | -1.10 // |
| | | | | 0 | | |
| 90.0 | -0.000002 | 0.999904 | 0.96 // | -0.000001 | 0.999867 | 1.33 // |

3 孔縁を補強した無限板の応力解析

3.1 基礎式

z 面に m 個の孔のある無限板に、無限遠で外力が作用し、孔縁に作用する外力が釣合いにあれば、複素応力関数 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ は次式で表わされる—応力に無関係な項は省略—

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(z) &= \sum_{n=-1,0}^{\infty} a_n' z^{-n}, \\ \psi_1(z) &= \sum_{n=-1}^{\infty} b_n' z^{-n}, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ただし a_{-1}' , b_{-1}' は無限遠の外応力に関する項.

z 面の孔 Γ の外部領域を ζ 面の単位円 γ の外部領域に写像する関数 $z = \omega(\zeta)$ により (19)式を変換すれば

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n \zeta^{-n}, \quad \psi(\zeta) = \sum_{n=-1}^{\infty} b_n \zeta^{-n}, \quad (20)$$

ただし $a_{-1} = \frac{1}{8} (\sigma_{x\infty} + \sigma_{y\infty}) C_{-1}$,

$$b_{-1} = \frac{1}{4} \{ (\sigma_{y\infty} - \sigma_{x\infty}) + 2i\tau_{xy\infty} \} C_{-1} \quad (21)$$

応力は次式より計算される

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n + \sigma_t &= 4 \left\{ \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\overline{\varphi'(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}} \right\}, \\ \sigma_t - \sigma_n + 2i\tau_{nt} &= \frac{4\zeta}{\zeta \omega'(\zeta)} \left[\overline{\omega(\zeta)} \left\{ \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right\}' + \psi'(\zeta) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

(20) 式の a_n , b_n ($n = 1, 2, \dots$) を補強材と平面板の接合部における条件から定められれば、応力は (22) 式から計算される.

3.2 境界条件と a_n , b_n の決定

補強材はコンパクトで曲げ剛性は引張り剛性にくらべて小さく無視できるものとする. 境界条件から a_n , b_n を定める条件を述べ、

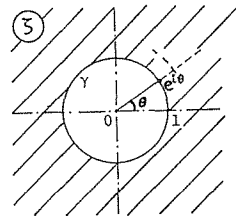
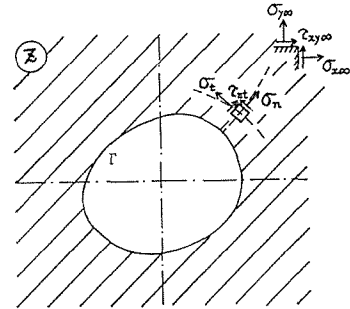


図4 曲線座標で表わした応力

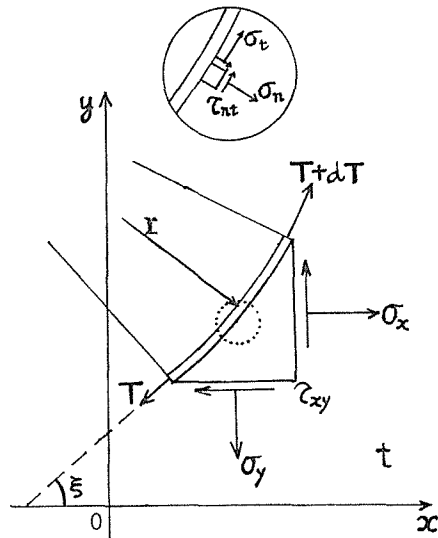


図5 三角形要素の釣合

接合部の応力，補強材の軸力などの式を示したのち，本研究での二軸対称の場合の計算手順を要約する．

図6の補強材を含む三角形要素の釣合条件より

$$\frac{T}{2t} = -ie^{i\epsilon} \left[\overline{\varphi(z)} + \bar{z}\varphi'(z) + \psi(z) \right]. \quad (23)$$

左辺は実数であるから，右辺が実数である条件は(24)式となり，これは $\psi(z)$ を $\varphi(z)$ の項で表わす関係式とみられる．

$$e^{i\epsilon} \left[\overline{\varphi(z)} + \bar{z}\varphi'(z) + \psi(z) \right] + e^{-i\epsilon} \left[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} \right] = 0, \quad (24)$$

ただし $e^{i\epsilon} = i\sigma\omega'(\sigma)/|\omega'(\sigma)|$, $\sigma = ei^\theta$.

接合部のひずみが等しい条件は

$$T/A = \sigma_t - \nu\sigma_n, \quad (A: \text{断面積}, \nu: \text{ポアソン比}) \quad (25)$$

また補強材とそれに接する板の部分の釣合いより

$$\sigma_n = \frac{T}{rt}, \quad \tau_{nt} = \frac{1}{t} \frac{dT}{ds} \quad (26)$$

上の2式より

$$\sigma_n + \sigma_t = \sigma_x + \sigma_y = \left(\frac{1}{A} + \frac{1+\nu}{rt} \right) T. \quad (27)$$

以上の3条件(23),(24),(27)式を満すように $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ の係数 a_n , b_n を定める手順と接合部応力，軸力などを計算する手順を，二軸対称領域についてまとめてみよう．

[1] 写像関数(7)式を実数，虚数部に分け $[0^\circ, 90^\circ]$ 内の θ について，つぎの計算をしておく(以下 \sum' は $j = -1, 1, 3, \dots, N$ とした和を表わす)

$$\omega(\zeta) = c_{-1}\zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_3}{\zeta^3} + \dots + \frac{c_N}{\zeta^N}, \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} X &= \sum' c_j \cos j\theta, & Y &= -\sum' c_j \sin j\theta, \\ \dot{X} &= -\sum' j c_j \sin j\theta, & \dot{Y} &= -\sum' j c_j \cos j\theta, \\ \ddot{X} &= -\sum' j^2 c_j \cos j\theta, & \ddot{Y} &= \sum' j^2 c_j \sin j\theta. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} P &= \dot{X}^2 + \dot{Y}^2, & \dot{P} &= 2(\dot{X}\ddot{X} + \dot{Y}\ddot{Y}), \\ \frac{1}{r} &= P^{-\frac{2}{3}}(\dot{X}\ddot{Y} - \dot{Y}\ddot{X}), & Q &= 2P^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{t}{A} + \frac{1+\nu}{r} \right)^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

[2] 無限遠に作用する外応力を $\sigma_{x\infty}$, $\sigma_{y\infty}$ とすれば，これも二軸対称であるから $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ は次式におくことができる．

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=-1}^N a_n \zeta^{-n}, \quad \psi(\zeta) = \sum_{n=-1}^N b_n \zeta^{-n}, \quad (30)$$

$$\text{ただし } a_{-1} = \frac{1}{8} (\sigma_{x\infty} + \sigma_{y\infty}) c_{-1}, \quad b_{-1} = \frac{1}{4} (\sigma_{y\infty} - \sigma_{x\infty}) c_{-1},$$

(27) 式に (22)₁ 式を代入した式と (23) 式から T を消去して b_1, a_1, a_3, \dots を定める次式がえられる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} c_{-1}^2 b_1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n (1 + nQ) \sum_{j=-1}^N j c_j \cos(n-j)\theta \right\} + \sum_{n=1}^{N-2} \left\{ a_n \sum_{j=n+2}^N (j-n) c_j \cos(n-j)\theta \right\} \\ & + a_{-1} \sum_{j=-1}^N c_j (1 + jQ) \cos(j+1)\theta + \frac{1}{2} b_{-1} (2c_{-1} \cos 2\theta - c_1) = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

ただし \sum' は下指標に 2 ずつ加えた和を表わす。

すべての θ に対して成立つ条件の代りに、本計算では、 $[0^\circ, 90^\circ]$ の間を 3° 間隔にとつた θ で成立つように、31 元連立方程式を作り $b_1, a_1, a_3, \dots, a_{59}$ の値を定めた。(なお選点法による解の精度をみるため、選点の中間値 $1.5^\circ, 4.5^\circ, \dots$ を (31) 式に代入したところ、左辺の値は $10^{-5} \sim 10^{-12}$ の程度で、十分の精度をもつことがたしかめられた)

[3] 接合部の応力 $\sigma_n, \sigma_t, \tau_{nt}$ および補強材の張力 T

まず次の二式を θ の値ごとに計算しておく

$$\sigma_n + \sigma_t = \frac{8}{P} \left[-a_{-1} \sum' j c_j \cos(j+1)\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n a_n \sum' j c_i \cos(n-j)\theta \right\} \right], \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{TP \frac{1}{2}}{4t} \right) &= -a_{-1} \sum' (j+1) c_j \sin(j+1)\theta - 2b_{-1} c_{-1} \sin 2\theta \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \sum' j(n-j) c_j \sin(n-j)\theta \right\} - \sum_{n=1}^{N-2} \left\{ a_n \sum_{j=n+2}^N (j-n)^2 c_j \sin(j-n)\theta \right\}. \end{aligned} \quad (33)$$

(27), (26), (32), (33) 式より次式が計算され $T, \sigma_n, \sigma_t, \tau_{nt}$ が求められる。

$$\begin{aligned} T &= tQP \frac{1}{2} (\sigma_n + \sigma_t), \quad \sigma_n = \frac{T}{rt}, \quad \sigma_t = (\sigma_n + \sigma_t) - \sigma_n, \\ \tau_{nt} &= \frac{4}{P} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{TP \frac{1}{2}}{4t} \right) - \frac{Q}{4P} (\sigma_n + \sigma_t) \frac{dP}{d\theta}. \end{aligned} \quad (34)$$

[4] 領域内部の応力を計算するに必要な $\psi(\zeta)$ の係数 b_3, b_5, \dots (b_{-1}, b_1 は既知) は、(24) 式を (7) 式により変換し、Cauchy 積分公式により整理した式から、 $\psi(\zeta)$ を b_1 と $\varphi(\zeta)$ から定める式を誘導し、結局 $b_s (s = 3, 5, \dots)$ を b_1, a_1, a_3, \dots および c_j から計算するつぎの漸化式が得られる。

$$\begin{aligned}
 c_{-1}b_s &= \sum_{k=-1}^{s-2} (s-k-1)c_{s-k-1}b_k && (s \leq N, \text{ただし } N+2 \leq s \text{ のときは, 繰返す} \\
 & && \text{ごとに } k \text{ に } 1 \text{ を加える}) \\
 &+ (s-1)c_{s-2}a_{-1} && (s \leq N+2) \\
 &+ \sum_{k=1}^{N-s+1} (s-1)c_{s+k-1}a_k && (s \leq N) \\
 &+ \sum_{k=s-2}^{N+s-1} (s-1)c_{k-s+1}a_k && (s \leq 2 \times (\text{選点数}) - 1) \\
 &+ \frac{1}{2}c_{-1}b_{-1}. && (s = 3)
 \end{aligned} \tag{35}$$

無限板内の応力は (22) 式から計算される.

表 4 に a_n, b_n の一例を示す

表 4 a_n, b_n の一例

(a) $a/b = 2.0, \rho = 0.8$

| n | $A' = 0$ | | $A' = 1/6$ | | $A' = 1/2$ | |
|-----|-----------|-----------|------------|-----------|------------|-----------|
| | a_n | b_n | a_n | b_n | a_n | b_n |
| -1 | 0.204197 | -0.408394 | 0.204197 | -0.408394 | 0.204197 | -0.408394 |
| 1 | 0.327152 | -0.342153 | 0.273007 | -0.286481 | 0.211541 | -0.204346 |
| 3 | 0.017666 | 0.322285 | 0.011284 | 0.235240 | 0.017565 | 0.151221 |
| 5 | -0.003034 | 0.176171 | -0.001787 | 0.111042 | -0.004112 | 0.086965 |
| 7 | -0.000712 | -0.044094 | -0.000751 | -0.033057 | -0.001661 | -0.033227 |
| 9 | 0.000953 | -0.038926 | 0.001033 | -0.022383 | 0.002440 | -0.022225 |
| 11 | -0.000410 | 0.012977 | -0.000490 | 0.012629 | -0.001234 | 0.021606 |
| 13 | -0.000162 | -0.011044 | -0.000293 | -0.010698 | -0.000583 | -0.013990 |
| 15 | 0.000239 | -0.012716 | 0.000369 | -0.010043 | 0.000922 | -0.013142 |
| 17 | -0.000121 | 0.004888 | -0.000226 | 0.006088 | -0.000565 | 0.012742 |
| 19 | -0.000039 | -0.004271 | -0.000119 | -0.005377 | -0.000241 | -0.008175 |
| 21 | 0.000099 | -0.004897 | 0.000201 | -0.005075 | 0.000477 | -0.007846 |
| 23 | -0.000037 | 0.003438 | -0.000098 | 0.004814 | -0.000273 | 0.009586 |
| 25 | 0.000002 | -0.001187 | -0.000027 | -0.002093 | -0.000075 | -0.004146 |
| 27 | 0.000056 | -0.001345 | 0.000140 | -0.001697 | 0.000295 | -0.003594 |
| 29 | -0.000009 | 0.002954 | -0.000036 | 0.004607 | -0.000144 | 0.007934 |
| 31 | 0.000011 | 0.000249 | 0.000013 | 0.000009 | 0.000005 | -0.001646 |
| 33 | -0.000002 | 0.000156 | 0.000055 | -0.000061 | 0.000101 | -0.001660 |
| 35 | -0.000000 | 0.001696 | -0.000021 | 0.002655 | -0.000068 | 0.003730 |
| 37 | -0.000000 | 0.000396 | 0.000005 | 0.000286 | 0.000017 | -0.000621 |
| 39 | | 0.000116 | 0.000020 | 0.000058 | 0.000048 | -0.000219 |
| 41 | | 0.000578 | 0.000002 | 0.001381 | 0.000005 | 0.002859 |
| 43 | | 0.000045 | -0.000008 | 0.000265 | -0.000015 | 0.000844 |
| 45 | | -0.000465 | -0.000000 | -0.000977 | 0.000002 | -0.001553 |
| 47 | | -0.000121 | | -0.000244 | 0.000001 | -0.000216 |
| 49 | | 0.000004 | | 0.000053 | -0.000004 | 0.000230 |
| 51 | | -0.000136 | | -0.000302 | 0.000000 | -0.000513 |
| 53 | | -0.000032 | | -0.000062 | | -0.000064 |
| 55 | | 0.000023 | | 0.000085 | | 0.000168 |
| 57 | | -0.000032 | | -0.000077 | | -0.000175 |
| 59 | | 0.000005 | | -0.000004 | | -0.000034 |

(b) $a/b = 1, \quad \rho = 0.5$

| n | c_n | $A' = 0$ | | $A' = 1/6$ | | $A' = 1/2$ | |
|-----|----------|----------|----------|------------|----------|------------|----------|
| | | a_n | b_n | a_n | b_n | a_n | b_n |
| -1 | 1.02578 | 0.13910 | -0.27821 | 0.13910 | -0.27821 | 0.13910 | -0.27821 |
| 1 | 0.0 | 0.25497 | -0.28543 | 0.19959 | -0.22147 | 0.15100 | -0.15100 |
| 3 | -0.01809 | 0.01239 | 0.26293 | 0.01103 | 0.16252 | 0.01723 | 0.07551 |
| 5 | 0.0 | -0.00259 | 0.076865 | -0.00198 | 0.05328 | -0.00675 | 0.05747 |
| 7 | -0.00429 | 0.00148 | -0.08632 | 0.00170 | -0.05112 | 0.00291 | 0.05233 |
| 9 | 0.0 | 0.00038 | -0.00114 | 0.00051 | 0.00326 | 0.00032 | 0.00770 |
| 11 | -0.00176 | -0.00017 | 0.00939 | -0.00044 | 0.00600 | -0.00115 | 0.00848 |
| 13 | 0.0 | 0.00032 | -0.00937 | 0.00071 | -0.01076 | 0.00147 | -0.01876 |
| 15 | -0.00086 | -0.00019 | 0.01261 | -0.00035 | 0.01358 | -0.00076 | 0.02090 |
| 17 | 0.0 | -0.00005 | -0.00116 | -0.00003 | -0.00332 | 0.00007 | -0.00692 |
| 19 | -0.00044 | 0.00002 | -0.00196 | 0.00014 | -0.00202 | 0.00036 | -0.00312 |
| 21 | 0.0 | -0.00009 | 0.00333 | -0.00030 | 0.00568 | -0.00058 | 0.01089 |
| 23 | -0.00022 | 0.00006 | -0.00510 | 0.00016 | -0.00813 | 0.00035 | -0.01351 |
| 25 | 0.0 | 0.00002 | 0.00091 | 0.00001 | 0.00276 | -0.00004 | 0.00573 |
| 27 | -0.00009 | -0.00001 | 0.00085 | -0.00009 | 0.00146 | -0.00020 | 0.00230 |
| 29 | 0.0 | 0.00002 | -0.00183 | 0.00012 | -0.00441 | 0.00024 | -0.00863 |
| 31 | -0.00003 | -0.00001 | 0.00234 | -0.00005 | 0.00484 | -0.00011 | 0.00821 |
| 33 | 0.0 | -0.00001 | -0.00008 | -0.00002 | -0.00061 | -0.00003 | -0.00146 |
| 35 | -0.00001 | 0.00000 | -0.00092 | 0.00005 | -0.00217 | 0.00011 | -0.00353 |
| 37 | 0.0 | | 0.00093 | -0.00003 | 0.00297 | -0.00006 | 0.00587 |
| 39 | | | -0.00065 | -0.00001 | -0.00152 | -0.00002 | -0.00265 |
| 41 | | | -0.00044 | 0.00001 | -0.00143 | 0.00002 | -0.00265 |
| 43 | | | 0.00055 | 0.00000 | 0.00143 | -0.00000 | 0.00236 |
| 45 | | | -0.00003 | | -0.00009 | | -0.00027 |
| 47 | | | -0.00004 | | -0.00013 | | -0.00017 |
| 49 | | | 0.00008 | | 0.00027 | | 0.00053 |
| 51 | | | -0.00011 | | -0.00032 | | -0.00055 |
| 53 | | | 0.00001 | | 0.00005 | | 0.00013 |
| 55 | | | 0.00001 | | 0.00003 | | 0.00004 |
| 57 | | | -0.00003 | | -0.00010 | | -0.00020 |
| 59 | | | 0.00004 | | 0.00013 | | 0.00022 |

4 計 算 例

計算は表1の組合せについて行い、写像関数の係数 c_j および $\varphi(\zeta) \cdot \psi(\zeta)$ の係数 a_n, b_n の一部は表3, 4に示したとおりである。すべての組合せについて計算した応力などを図示するのは紙数の関係から割愛し、代表的な例について示すことにする。

4.1 応力分布と応力集中係数

図6：接合部のへり応力 (σ_t) を、補強量 ($A' = A/bt$) をパラメーターとして表わしたもので、 ρ が小さいほど σ_{tmax} は大きく補強量が大きいほど小さくなり平均化される。

図7：補強のないときの円弧部分のへり応力をまとめたもの

図8：図7につづいて、応力集中係数 ($\alpha = \sigma_{tmax}/\sigma_0$) および図中 A, B 部の σ_t/σ_0 を ρ を横軸にとって表わしたものである。図中の点線は hypotrochoid 曲線で正方形孔を近似した浅羽¹⁾ による応力集中係数 (α') で、本計算による α に比べて小さいのは曲率半径が徐々に大きくなっているためであろう。

図9： $x \cdot y$ 軸上の σ_x 応力分布を示し、 σ_y は微量なので省略した。 x 軸のそれには補

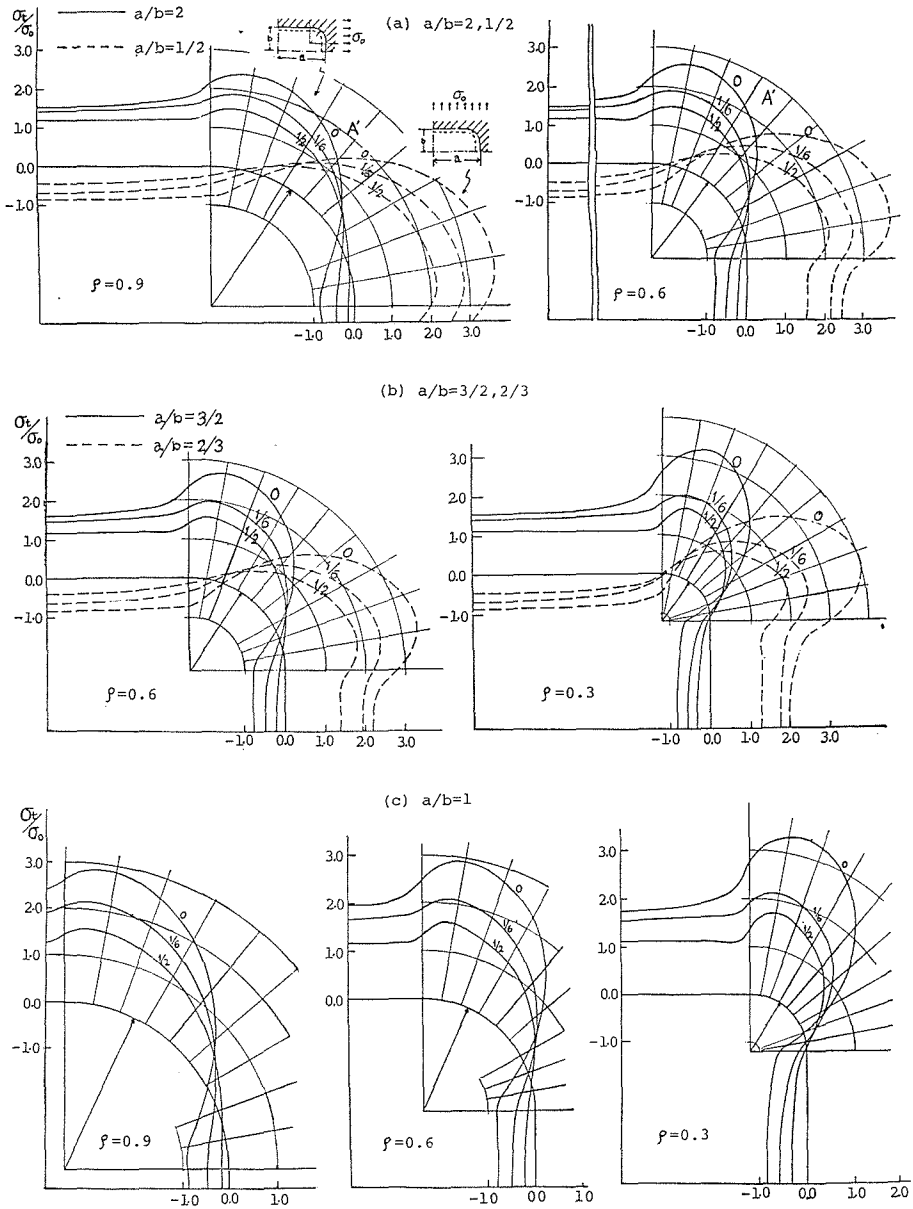


図6 接合部のへり応力 (σ_t) 分布

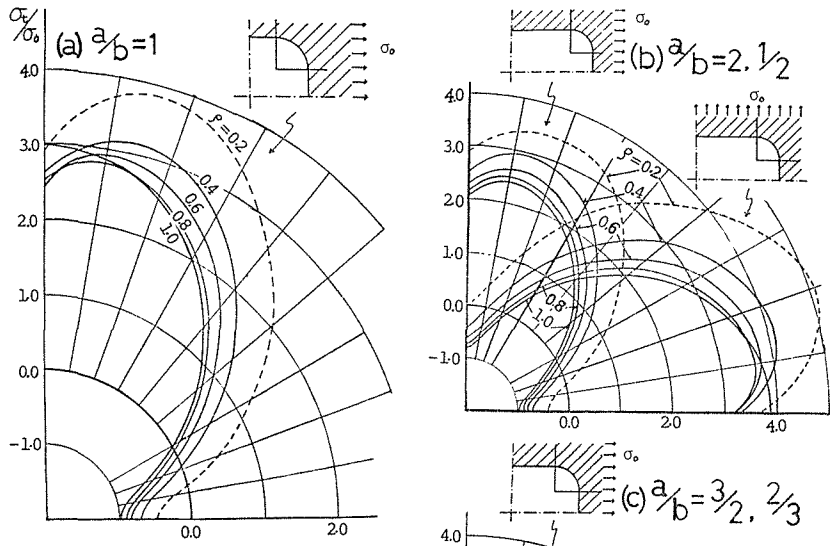


図7 へり応力分布(補強0)

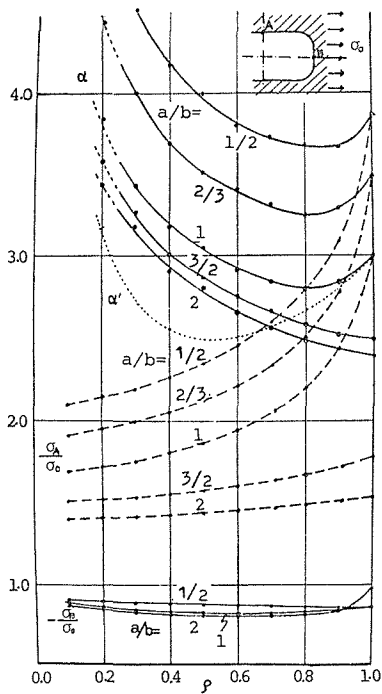


図8 応力集中係数(α)とA,B点の σ_x/σ_0 の ρ による変化

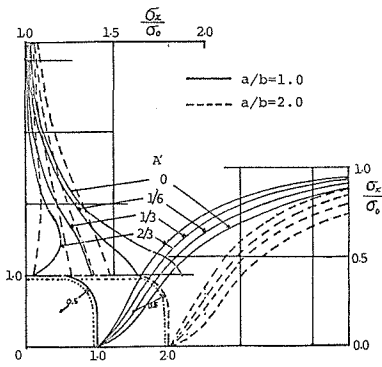
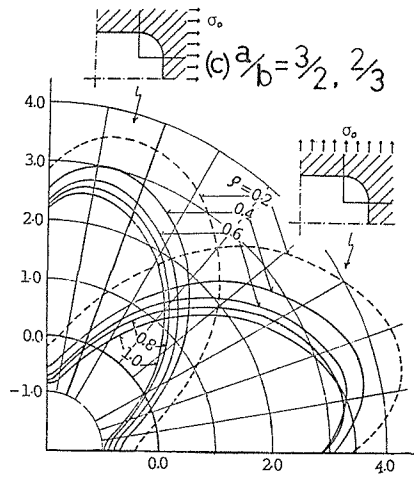


図9 $x \cdot y$ 軸上の σ_x 分布($\rho = 0.5$)

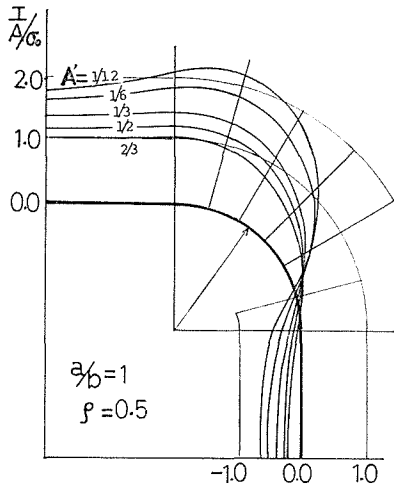


図10 補強材の平均応力 ($\rho = 0.5$)

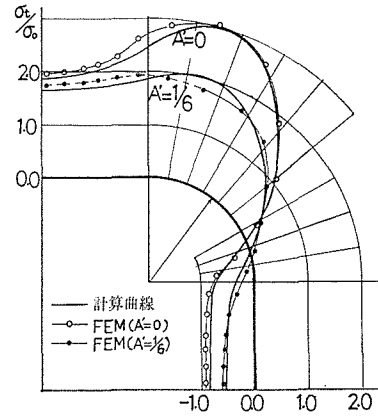
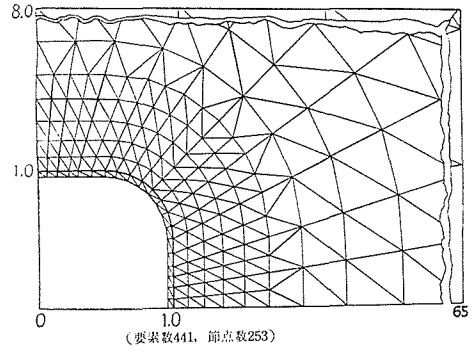
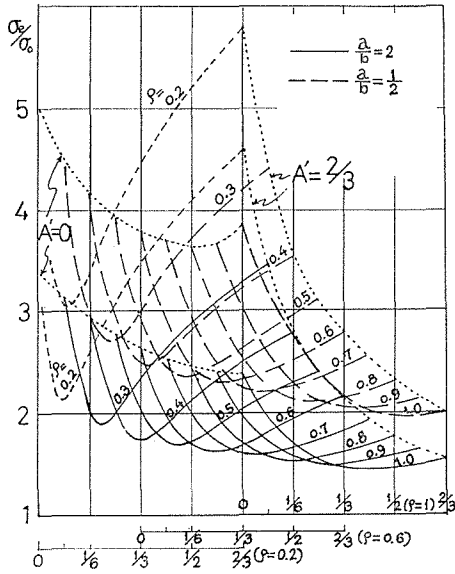
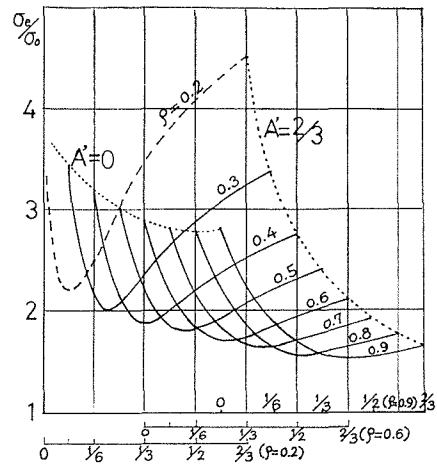


図12 本計算とFEMによる解の比較 ($\rho = 0.5$)



(a) $a/b=2, 1/2$



(b) $a/b=1$

図11 接合部の σ_{emax} 分布

強材の曲げ剛性省略の影響が現われている。

図10：補強材に生ずる平均応力 ($T/A\sigma_0$) 分布。

さて補強材に接続する板の部分にはへり応力 σ_t の外に σ_n, τ_{nt} が存在し—この分布図は省略—これをもとに主応力 σ_1, σ_2 が計算され、塑性条件を与える相等応力 σ_e が板材の降伏点応力 σ_{yp} に到達したとき塑性状態が初まるわけである。いま σ_e を Mises-Hencky の条件を用いてかけば

$$\sigma_e = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2)^{\frac{1}{2}}.$$

各種の組合せ ($A', a/b, \rho$) について、 σ_e の最大値を求め σ_{emax}/σ_0 を縦軸に A/bt を横軸に (パラメータ ρ ごとに横にずらして) 示したものが図11で、各々の円弧半径に対する最適補強量はこれら曲線の包絡線の接点の横座標の値として求められるわけである。

4.2 計算結果の検討

(1) 計算は倍精度で行ったが応力値の精度を知るため、写像関数の項数を12, 16にとり同じ計算を繰返したところ本計算は16項の場合と殆んど差がないことが分った。しかし $\rho = 0.2$ のように鋭い円弧になると誤差がめだち図表では破線で表わし参考にとどめた。

(2) 補強のない場合は、単に孔のある無限板であるから $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$ を定める Muskhelishvili の微積分方程式⁶⁾を用いて解けるわけで、本研究でもこの方法による計算を行い上記選点法による結果とよく一致することがたしかめられた。(この計算法は省略する)

(3) 本計算は無限板が対称であるため実験による検証は困難である。そこで孔の寸法に比べ帯幅の大きい平板モデルを考え $\rho = 0.5$ の場合について有限要素法 (FEM) による計算を行い比較してみた。図12はその分割を示し、図17は $A/bt = 0, 1/6$ の補強量についての本計算による結果 (実線) と FEM による要素の平均応力を滑らかに結んだ (点線) ものである。 θ が 45° 以下ではよく一致するが 45° 以上では誤差が生じている。これは有限幅と補強材の曲げ剛性省略によるものと思われる。

5 あとがき

隅を円弧で丸めた比較的忠実な長方形孔の孔縁を補強した無限板に、軸方向の引張り力が作用したときの応力などを計算し次の結論を得た。

(1) 求むる曲線の外部領域を、単位円の外部に写像するのに、菊川の方法を用い、簡単な写像関数から段階的に精度のよい写像関数を求めるプログラムを開発した。

(2) 補強のある無限板の応力を解析するのに、補強材はコンパクトで引張り剛性のみを考慮した Wittrick の方法を適用し、選点法により $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$ の係数を定め主に補強材との接合部、対称軸上の応力を計算しその一部を図示した。

(3) 補強のない長方形孔無限板の応力集中係数 α を隅の円弧半径 ρ を横軸にとって図示した。それによると従来の近似関数による値よりも大きく計算され量的にもその程度がたしかめられた。また補強材があるときの接合部の応力値から Mises-Hencky の塑性条件による相当応力を計算し、塑性状態を判断するための資料を求めることができた。

補強材はその補強幅が大きくなるに従いその曲げ剛性を無視できないことは一鈴木⁷⁾, Davies⁸⁾ からも指摘しているように一当然で, Wittrick による本計算の適用範囲も自ら制限をうけるわけである. 一般に円孔以外の形状に対して補強部分を平面応力状態とみなした2次元の解法や補強材の曲げ剛性を考慮した解法が望まれる所以である. なおせん断および面内曲げ荷重に対する応力計算も続行中であることを付記して第1報とする.

終りに本研究の資料整理に協力された宮田明君(修士課程)に謝意を表する. なお本計算には東京大学大型電子計算機を使用した.

文 献

- 1) 西田正孝: 応力集中. 森北出版. (1967) 377.
- 2) M. Kikukawa :1st report, Proc. 3rd Japan Nat. Congr. Appl. Mech. (1953) 5.
2nd report, Proc. 4th Japan Nat. Congr. Appl. Mech. (1954) 149.
- 3) W. H. Wittrick : Aeronautical Quarterly, Aug. (1960) 233.
Aeronautical Quarterly, Aug. (1962) 223.
- 4) たとえば
K. Sezawa and K. Kubo : Rept. Aeron. Res. Inst. Tokyo. Imp. Univ., No.84 (1932)
C. Gurney : Aero. Res. Comit. R & M. No.1834 (1938)
J. R. M. Radok: J. Appl. Mech. June (1955) 249.
- 5) 佐々木三郎: 信州大学工学部紀要. 第25号 (1968) 21.
- 6) N. I. Muskhelishvili: ZAMM. Bd. 13. Aug. (1933) 264 など.
- 7) 鈴木真一: 日本機械学会論文集. 第31巻第231号 (1965) 1582.
- 8) G. A. O. Davies: Aeronautical Quarterly, Feb (1967) 43.