

等方性乱流の相関モデル

大路 通雄*・平山 俊雄**

(昭和49年 5月30日受理)

1. ま え が き

一様等方性乱流の2重速度相関またはエネルギー・スペクトル関数を理論的に求めることは、乱流理論の主要な目的の一つであるが、すべての場合に適用できる完全な方法は、現在なお知られていない。一方、乱流理論を応用する立場からは、いろいろな条件の下で得られた実験曲線の全体をある程度まで再現し得る閉じた形の実験公式が用意されていると非常に便利である。たとえば、乱流場に対する外部作用の効果、乱流中に置かれた構造物の応答、乱流拡散の見積もりなど、乱流の相関やスペクトルを一応既知のものとして取り扱いたい問題が少なくない。

そこで、以前に著者のひとりには、いわゆる縦相関係数 $f(r)$ の大局的近似関数として

$$f(r) = \exp(b - \sqrt{c^2 r^2 + b^2}), \quad b \geq 0, \quad c > 0 \quad (1)$$

の形を提案し、その二三の運動学的性質や対応する種々の特性量との関係を調べた¹⁾。ここに b, c は形状パラメータで、両者を独立に調節することによって広くさまざまな相関プロファイルが得られる。これと前後して、この近似関数を実際に応用する機会もあったが^{2), 3)}、実験値との定量的な比較については、まだ検討の余地が多い。

特に、まず等方性乱流の力学的方程式を導入する必要がある。その結果もし形状パラメータを時間の関数として適当に定めることができれば、(1) は単に実験公式というだけでなく、乱れの減衰やエネルギー伝達に対する一種のモデルを提供することも期待されよう。ここでは、そのような方向への予備的な試みを述べる。

2. 基礎公式

初めに文献1) (以下 I と略す) で得られたおもな関係式を簡単に要約しておく。関数(1)の最大の特徴は、指数関数型の相関 ($b \rightarrow 0$) と誤差関数型または Gauss 型の相関 ($b \rightarrow \infty$) との内挿になっていることであり、 b, c を有限値に固定したとき(1) は、 $r \rightarrow 0$ で放物線、 $r \rightarrow \infty$ で指数曲線に漸近する。

(1)から導かれるいろいろな表式のうちで、特に重要なものを挙げれば、横相関係数 (1; (2.2))

* 機械工学教室 教授

** 大学院修士課程

$$g(r) = \left(1 - \frac{c^2 r^2}{2\sqrt{c^2 r^2 + b^2}}\right) \exp(b - \sqrt{c^2 r^2 + b^2}). \quad (2)$$

散逸スケール (I; (2.3))

$$\lambda \equiv \frac{1}{\sqrt{-f''(0)}} = \frac{\sqrt{b}}{c} \quad (3)$$

($'$ は r についての微分)

積分スケール (I; (2.4))

$$L \equiv \int_0^\infty f(r) dr = \frac{b \exp b}{c} K_1(b). \quad (4)$$

ただし K_n は n 次の第 2 種変形 Bessel 関数である.

周波数スペクトル関数とエネルギー・スペクトル関数は、それぞれ K_1 と K_3 で解析的に表わされる (I; (4.1), (4.2) 参照).

以上のほか、ここでは新たに Loitsiansky 積分

$$A \equiv u^2 \int_0^\infty r^4 f(r) dr \quad (5)$$

を求めた. u^2 は速度変動の 2 乗平均で、減衰の時間 t だけの関数である. (1) のように $r \rightarrow \infty$ で $f(r)$ が指数関数的に小さくなる場合には、この積分はもちろん収束し、 K_n を含む積分の公式から直ちに

$$A = 3u^2 \frac{b^3 \exp b}{c^5} K_3(b) \quad (6)$$

を得る (付録 1 参照).

3. パラメータの時間的变化

次に形状パラメータの時間的变化を定めるために、力学的な関係を導入しよう. よく知られているように⁴⁾, f の消長を規定する Kármán-Howarth 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} (u^2 f) = u^3 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r} \right) k + 2\nu u^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) f \quad (7)$$

(ν は動粘性率) には 3 重相関関数 $k(r, t)$ が現われるが、特に $r=0$ ではその寄与は自動的に消え、(7) はエネルギー減衰方程式

$$\frac{du^2}{dt} = -10\nu \frac{u^2}{\lambda^2} \quad (8)$$

に帰着する.

また (7) に r^4 を掛け $r=0$ から ∞ まで積分すると、 $r \rightarrow \infty$ のときに $f=0(r^{-5})$, $k=0(r^{-4})$ ならば、Loitsiansky の不変定理

$$A = \text{const} \equiv A_0 \quad (9)$$

が成り立ち、ここでも k の影響は相殺して表面に現われない。この定理の成否に関しては、いろいろな角度からの考察があるが⁵⁾、少なくとも完全に等方的な乱流では正しいことが示されている⁶⁾。現実には、ふつう大きいスケールの成分 (big eddies) について多少の非等方性が必ず存在するので、完全な等方性乱流はあり得ないけれども、当面の関心はモデルとしての等方性乱流であり、事実、遠方で指数関数的に減少する f を仮定すること自体が、グローバルな非等方性を除外した立場にほかならない。そこで、差し当り (9) が成立しているものとする。

このようにして、(8) と (9) は、 λ と A に (3) と (6) を用いると、三つの未知量 u^2 , b , c に対する二つの独立な関係式と見なすことができる。これから u^2 を消去するには、(9) を対数微分して (8) を代入すればよい。結果は、 K_n に関する公式⁷⁾ を使って、簡単に

$$\left[1 - \frac{K_2(b)}{K_3(b)} \right] \frac{db}{dt} - \frac{5}{c} \frac{dc}{dt} = \frac{10c^2}{b} \nu \quad (10)$$

となる。これらは A の存在とその不変性以外に特別な仮定を含んでいないが、未知数の数の方が一つ多いから、このままでは解は決まらない。逆にいうと、この自由度をどのように利用するかで、いろいろな可能性が生じるであろう。

ここでは、できるだけ単純な取り扱いによって減衰過程がどの程度記述されるかを検証する意味で、最もあらいモデルに相当する。

$$c = \text{const} = c_0 \quad (11)$$

を仮定する。すなわち (10) で $dc/dt = 0$ ととり、時間変数を無次元化して

$$10c_0^2 \nu t = \theta \quad (12)$$

とおけば、

$$\frac{d\theta}{db} = b \left[1 - \frac{K_2(b)}{K_3(b)} \right], \quad (13)$$

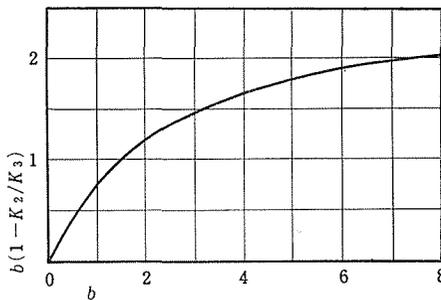


図1 $b(1 - K_2/K_3)$

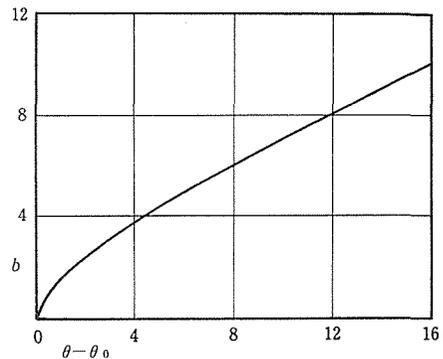


図2 b と $\theta - \theta_0$ の関係

これを積分して

$$\theta - \theta_0 = \int_0^b b \left[1 - \frac{K_2(b)}{K_3(b)} \right] db \quad (14)$$

のように解が確定するのである。ここに θ_0 は、 $b = 0$ に対応する θ の仮想原点とする。図1に見るように、 $d\theta/db$ は b の単調関数であるから、(14)は b を $(\theta - \theta_0)$ の1価関数として定めるもので、数値積分の結果を図2に示した*。

特に両極端の場合は、解析的に次の形で表わされる。

(i) $b \rightarrow 0$ ($\theta - \theta_0 \rightarrow 0$, 以下原点展開という)。

$z \rightarrow 0$ に対する公式(文献7), (9.2)式

$$K_n(z) = \frac{(n-1)!}{2} \left(\frac{2}{z} \right)^n + O(z^{1-n}) \quad (15)$$

により、

$$b \rightarrow \sqrt{2(\theta - \theta_0)} = \sqrt{20c_0^2\nu(t - t_0)}. \quad (16)$$

(ii) $b \rightarrow \infty$ ($\theta - \theta_0 \rightarrow \infty$, 以下漸近展開という)。

$y \rightarrow \infty$ に対する漸近展開(文献7), (9.9)式

$$\sqrt{z} K_n(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-z} \left[1 + \frac{4n^2 - 1}{8z} + \dots \right] \quad (17)$$

によって

$$b \left[1 - \frac{K_2(b)}{K_3(b)} \right] \sim \frac{5}{2} + o(1) \quad (18)$$

となり、したがって

$$b \sim \frac{2}{5}(\theta - \theta_1) = 4c_0^2\nu(t - t_1). \quad (19)$$

ただし θ_1 は θ_0 と異なる仮想原点である。

上に t_0, t_1 がそれぞれ θ_0, θ_1 に対応する t の値であることはいうまでもない。(i)の原点展開は、 θ_0 が特異点 $b = 0$ に相当する仮想原点であるから、現実的な意味に乏しいが、(ii)の漸近展開は、減衰が十分に進行した終末期を表わすものと解釈される。

4. 減衰過程

パラメータ b を無次元減衰時間 θ の関数として定めることができたので、 c を一定とした相関モデル

$$f(r) = \exp(b - \sqrt{c_0^2 r^2 + b^2}) \quad (20)$$

の減衰過程は完全に決まったことになる。以下、特に興味ある二三の特性量について、その減衰に伴う推移を調べて見たい。

* 被積分関数 $b(1 - K_2/K_3)$ の数値は、文献7)の数表を補足して求めた(付録2参照)。

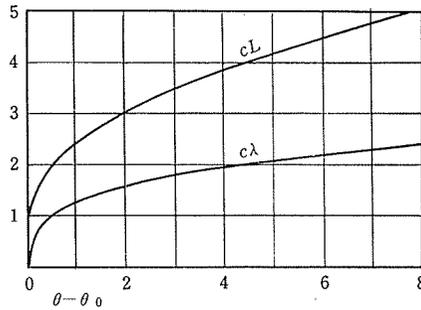


図3 特性スケール $c_0\lambda, c_0L$

特性スケール

図3は、 $c_0\lambda$ を(3)式によって、 c_0L を(4)式によって求めた数値計算の結果である。ここでも

(i) 原点展開：

$$\lambda \rightarrow \frac{1}{c_0} [2(\theta - \theta_0)]^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{c_0}} [20\nu(t - t_0)]^{\frac{1}{4}}, \tag{21}$$

$$L \rightarrow \frac{1}{c_0} [1 + \sqrt{2(\theta - \theta_0)}] = \frac{1}{c_0} + 2\sqrt{5\nu(t - t_0)}. \tag{22}$$

(ii) 漸近展開：

$$\lambda \sim \frac{1}{c_0} \sqrt{\frac{2}{5}(\theta - \theta_1)} = 2\sqrt{\nu(t - t_1)}, \tag{23}$$

$$L \sim \frac{1}{c_0} \sqrt{\frac{\pi}{5}(\theta - \theta_1)} = \sqrt{2\pi\nu(t - t_1)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\lambda \tag{24}$$

を導くことができる。(ii)は、等方性乱流の減衰終末期として知られた関係^{4),5)}にほかならない。

乱流エネルギーの減衰

エネルギー減衰方程式(8)で独立変数を b に変換して、(3)および(8)を用いると

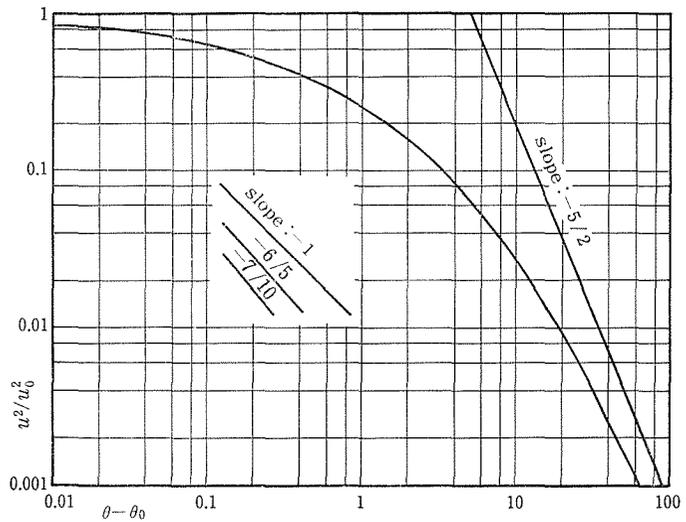
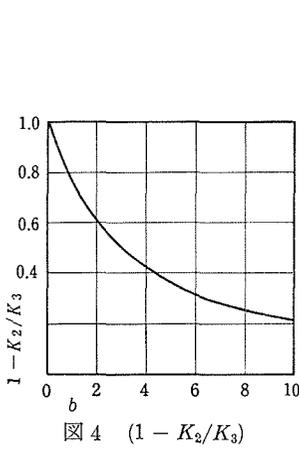
$$\frac{d \ln u^2}{db} = - \left[1 - \frac{K_2(b)}{K_3(b)} \right] \tag{25}$$

を得る。関数 $1 - K_2/K_3$ の値は図4と付録2に、これを数値的に積分した減衰法則

$$u^2 = u_0^2 \exp \left[- \int_0^b \left\{ 1 - \frac{K_2(b)}{K_3(b)} \right\} db \right] \tag{26}$$

の値は $\theta - \theta_0$ (または $t - t_0$) の関数に引き直して図5に対数目盛りでプロットした。 u_0^2 は、 $\theta = \theta_0$ における u^2 の値で、 $c_0^5 A_0 / 24$ に等しい((3), (9)参照)。

(26)の原点展開に当たる表式



$$u^2 \rightarrow u_0^2 \exp(-b) \rightarrow u_0^2 \exp[-c_0 \sqrt{20\nu}(t - t_0)] \tag{27}$$

は経験事実と相容れないが、これは前節の終りに述べたこの展開の性格から見て不思議ではない。一方、漸近展開は、定数 C を導入して

$$u^2 \sim u_0^2 C b^{-5/2} \sim \frac{A_0}{24} C [4\nu(t - t_1)]^{-5/2} \tag{28}$$

と書かれ、終末期の減衰法則に一致する。この事情を示すために、図5には $-5/2$ の傾斜を持つ直線が記入されている。

初期の減衰に対しては、実験結果と相似性の考察から、逆比例法則⁴⁾、 $-10/7$ 乗法則⁸⁾、 $-5/6$ 乗法則⁹⁾* などのべき法則が一般に知られていて、それぞれに対応する直線も図5に示したが、(26)の減衰法則は、初期に属する領域に直線部分をほとんど持たないから、べき法則を与えない。これは、恐らく c を一定としたモデルが簡単すぎるためと思われる(図7も参照)。

マイクロ Reynolds 数

次に、もう一つの重要な特性量として

$$R_\lambda = \frac{u\lambda}{\nu} \tag{29}$$

で定義されるマイクロ Reynolds 数を考えよう。再び b を独立変数にとれば、(3) と (26) から、

* この場合には、Loitsiansky の不変定理は成立しない。

$$R_\lambda = R_* \sqrt{b} \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^b \left\{ 1 - \frac{K_2(b)}{K_8(b)} \right\} db \right] \quad (30)$$

であり、ここに

$$R_* = \frac{u_0}{\nu c_0} \quad (31)$$

とおいた。 $1/c_0$ は長さの次元を持つので、 R_* は一種の特性的な Reynolds 数と見ることが出来る。

上述の数値計算結果を利用して求めた R_λ/R_* の $\theta - \theta_0$ に対する変化は、図6の通りであって、原点から急激に立ち上り、 $\theta - \theta_0 \doteq 1.2$ で極大値 ($\doteq 0.65$) に達した後、徐々に減少することが著しい特徴である。このうち、仮想原点の非現実性に伴うものとして R_λ の急増部分 ($\theta - \theta_0 \leq 1$) を除き、 $R_{\lambda \max}$ 付近以後を実際の減衰過程と比較するべきであらう。

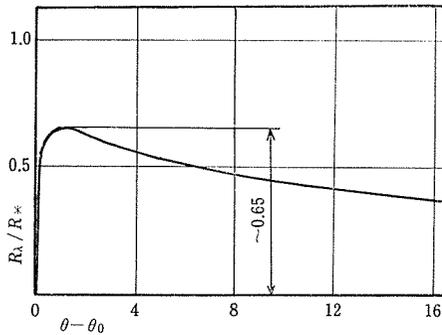


図6 ミクロ Reynolds 数 R_λ/R_*

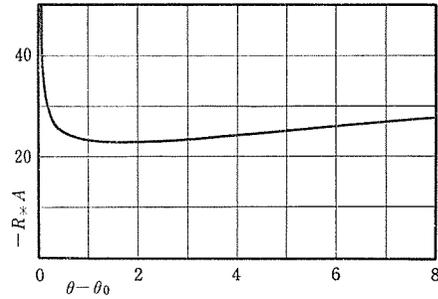


図7 R_*A の変化

関連して、非線形エネルギー伝達とエネルギー減衰の特性時間比を代表する無次元関数

$$A = -\frac{L}{u^3} \frac{du^2}{dt} \left(= 10 \frac{L}{\lambda R_\lambda} \right) \quad (32)$$

の変化を調べるためにプロットした R_*A の挙動(図7)も、 $\theta - \theta_0 \sim 1$ を境としてまったく異なっている。実験によれば、減衰初期を通じて A はほぼ一定で1の程度の大きさと推定される⁴⁾。図7においても、 $\theta - \theta_0 \geq 1$ の領域で R_*A は厳密に一定ではないが、その変化は比較的小さい。ただし R_*A の平均値を25ととって、仮に $A = 1$ とすると $R_* \doteq 25$ であるから、図6から $R_{\lambda \max} \doteq 16$ の程度であり、減衰初期に対する値としてはやや小さ過ぎるようである¹⁰⁾。

5. 相関プロフィール

一様等方性乱流では、 $u^2(t)$ と $f(r, t)$ がわかれば原理的には逐次の高次相関をすべて知ることができる。ここでは r/λ を変数として f のプロフィールを I; 第4図から再録し(図8)、また3重相関係数 k のプロフィールを数値的に求めた。

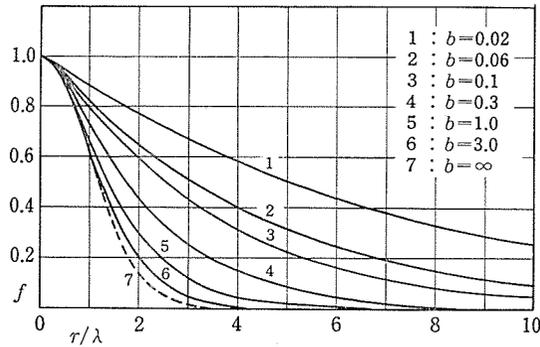


図8 2重相関係数 $f(r/\lambda, b)$

すなわち Kármán-Howarth 方程式を r について 1 回積分し, k について解けば

$$k(r, t) = \frac{1}{r^4 u^3} \frac{\partial}{\partial t} \left[u^2 \int_0^r r^4 f(r) dr \right] - \frac{2\nu}{u^2} \frac{\partial f}{\partial r} \quad (33)$$

変数を r/λ ($\equiv \xi$ と書く) と b に変えると, 若干の計算の後に

$$k(\xi, b) = \frac{10}{\xi^4 R_\lambda(b)} \left[\frac{G(b)}{1-G(b)} F_4(\xi, b) + \frac{1}{1-G(b)} \{ \xi^3 f(\xi, b) - 3F_2(\xi, b) \} + \frac{b\xi^2}{5\sqrt{b\xi^2 + b^2}} f(\xi, b) \right] \quad (34)$$

に達する. ここに

$$f(\xi, b) = \exp[b - \sqrt{b\xi^2 + b^2}], \quad (I; (3.2) \text{ 式}) \quad (35)$$

$$F_n(\xi, b) = \int_0^\xi \xi^n f(\xi, b) d\xi, \quad (36)$$

$$G(b) = K_2(b)/K_3(b) \quad (37)$$

であり, $R_\lambda(b)$ には (30) を用いればよい.

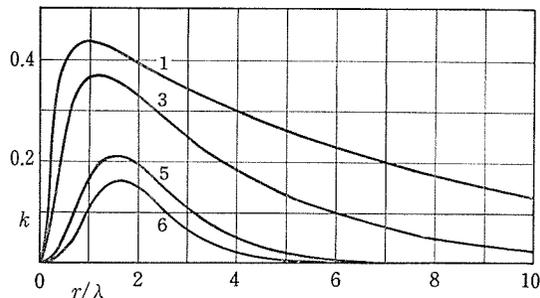


図9 3重相関係数 $k(r/\lambda, b)$
各曲線上の数字の意味は図8と同じ.

幾つかの b に対し数値計算を実行して図 9 に描いたプロフィールが、少なくとも定性的には実験曲線^{10), 11)} ときわめて良く似ていることに注目したい。 r/L を変数とする表示は省略する。

6. む す び

以上、近似関数 (1) で与えられる一様等方性乱流のモデルのうち、パラメータ c を定数と仮定した最も単純な場合について力学的方程式からの帰結を検討し、比較的簡単な解析によって特に減衰終末期への推移が、かなり忠実に再現されることを明らかにした。

しかし減衰初期に関しては、理論的または実験的な定説に比べて、部分的に傾向の類似はあるが不満足な点も多く、一貫して整合したモデルとはいえない。 c を一定とする代わりに、より適当な関係式を見いだして、この難点をどの程度改善できるかが次の課題であろう。

他方、モデル (1) は、要するに指数関数型相関の頂点を補正したものであり、それが物理的にどのような確率過程に相当しているかも、やや違った立場から興味深い問題である。

この研究は、一部科学研究費総合研究 A 「流体力学における非線型問題」 (代表者京大巽友正教授) の補助を受けた。おわりに、計算プログラムの作成、原稿の整備等に当たって松沢照男氏 (現信州大医学部助手)、舟田敏雄氏 (現和歌山高専助手) をはじめ流体力学研究室の諸氏による所が大きかったことを付記して謝意を表します。

付 録 1

(6) 式の誘導

I; 付録中の公式

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} x^2 \exp[-\alpha\sqrt{x^2+\beta^2}] \left(\frac{\sin xy}{xy} - \cos xy \right) dx \\ &= \frac{\alpha\beta^3 y^2}{(y^2+\alpha^2)^{3/2}} [K_3(\beta\sqrt{y^2+\alpha^2})] \end{aligned}$$

において左辺の被積分関数を y で展開した後、両辺を y^2 で割って $y \rightarrow 0$ とすれば

$$\frac{1}{3} \int_0^{\infty} x^4 \exp[-\alpha\sqrt{x^2+\beta^2}] dx = \frac{\beta^3}{\alpha^2} K_3(\beta\alpha).$$

ここで α の代わりに c , β の代わりに b/c と書くと

$$\frac{1}{u^2} = \exp b \int_0^{\infty} r^4 \exp[-\sqrt{c^2 r^2 + b^2}] dr = \frac{3b^3 \exp b}{c^5} K_3(b)$$

を得る。

付 録 2

(14) 式と (25) 式の積分に関する数表

表1 $[1 - K_2(b)/K_3(b)]$, $b[1 - K_2(b)/K_3(b)]$ の数表 ($b = 0.00 \sim 49.0$)

b	$1 - K_2/K_3$	$b(1 - K_2/K_3)$	b	$1 - K_2/K_3$	$b(1 - K_2/K_3)$	b	$1 - K_2/K_3$	$b(1 - K_2/K_3)$
0.00	1.0000000	0.0000000	0.90	0.7912027	0.7120824	9.00	0.2298889	2.0690001
0.02	0.9950001	0.0199000	0.92	0.7871392	0.7241681	9.20	0.2258228	2.0775698
0.04	0.9900020	0.0396001	0.94	0.7831092	0.7361226	9.40	0.2218013	2.0849322
0.06	0.9850066	0.0591004	0.96	0.7791205	0.7479557	9.60	0.2180135	2.0929296
0.08	0.9800154	0.0784012	0.98	0.7751300	0.7596274	9.80	0.2143060	2.1001988
0.10	0.9750307	0.0975031	1.00	0.7711872	0.7711872	10.0	0.2107218	2.1072180
0.12	0.9700537	0.1164064	1.20	0.7335567	0.8800280	11.0	0.1943842	2.1382262
0.14	0.9650836	0.1351117	1.40	0.6982709	0.9775793	12.0	0.1804645	2.1655740
0.16	0.9601271	0.1536203	1.60	0.6658198	1.0653117	13.0	0.1683903	2.1891090
0.18	0.9551743	0.1719314	1.80	0.6357822	1.1444080	14.0	0.1578265	2.2095710
0.20	0.9502393	0.1900479	2.00	0.6080494	1.2160988	15.0	0.1485015	2.2275225
0.22	0.9453180	0.2079700	2.20	0.5822938	1.2810464	16.0	0.1402122	2.2433952
0.24	0.9404121	0.2256989	2.40	0.5584535	1.3402884	17.0	0.1327959	2.2575303
0.26	0.9355132	0.2432334	2.60	0.5362813	1.3943314	18.0	0.1261221	2.2701978
0.28	0.9306436	0.2605802	2.80	0.5156909	1.4439345	19.0	0.1200848	2.2816112
0.30	0.9257789	0.2777337	3.00	0.4965029	1.4895087	20.0	0.1145975	2.2919500
0.32	0.9209446	0.2947023	3.20	0.4786515	1.5316848	21.0	0.1095884	2.3013564
0.34	0.9161210	0.3114812	3.40	0.4619120	1.5705008	22.0	0.1049979	2.3099538
0.36	0.9113196	0.3280751	3.60	0.4462311	1.6064320	23.0	0.1007756	2.3178388
0.38	0.9065474	0.3444880	3.80	0.4315583	1.6399215	24.0	0.0968790	2.3250960
0.40	0.9017933	0.3607173	4.00	0.4177347	1.6709388	25.0	0.0932720	2.3318000
0.42	0.8970499	0.3767610	4.20	0.4047290	1.6998618	26.0	0.0899235	2.3380110
0.44	0.8923217	0.3926215	4.40	0.3925214	1.7270942	27.0	0.0868067	2.3437809
0.46	0.8876451	0.4083167	4.60	0.3809605	1.7524183	28.0	0.0838983	2.3491524
0.48	0.8829858	0.4238332	4.80	0.3700352	1.7761690	29.0	0.0811783	2.3541707
0.50	0.8783329	0.4391665	5.00	0.3597433	1.7987165	30.0	0.0786288	2.3588640
0.52	0.8737130	0.4545308	5.20	0.3500068	1.8200354	31.0	0.0762344	2.3632664
0.54	0.8691302	0.4693303	5.40	0.3407377	1.8399836	32.0	0.0739813	2.3674016
0.56	0.8645652	0.4841565	5.60	0.3318134	1.8581550	33.0	0.0718575	2.3712975
0.58	0.8600241	0.4988140	5.80	0.3235302	1.8764752	34.0	0.0698520	2.3749680
0.60	0.8555119	0.5133071	6.00	0.3155244	1.8931464	35.0	0.0679554	2.3784390
0.62	0.8510311	0.5276393	6.20	0.3079344	1.9091934	36.0	0.0661589	2.3817204
0.64	0.8465766	0.5418090	6.40	0.3006732	1.9243085	37.0	0.0644548	2.3848276
0.66	0.8421414	0.5558133	6.60	0.2937453	1.9387190	38.0	0.0628368	2.3877794
0.68	0.8377408	0.5696637	6.80	0.2871366	1.9525289	39.0	0.0612970	2.3905830
0.70	0.8333624	0.5833537	7.00	0.2808196	1.9657372	40.0	0.0598312	2.3937480
0.72	0.8290132	0.5968895	7.20	0.2747327	1.9780754	41.0	0.0584339	2.3957899
0.74	0.8246901	0.6102707	7.40	0.2688950	1.9898230	42.0	0.0571002	2.3982084
0.76	0.8204092	0.6235110	7.60	0.2633492	2.0014539	43.0	0.0558261	2.4005223
0.78	0.8161594	0.6366043	7.80	0.2580125	2.0124975	44.0	0.0546075	2.4027300
0.80	0.8119144	0.6495315	8.00	0.2528867	2.0230936	45.0	0.0534410	2.4048450
0.82	0.8077025	0.6623161	8.20	0.2477802	2.0317976	46.0	0.0523232	2.4068672
0.84	0.8035085	0.6749471	8.40	0.2431469	2.0424340	47.0	0.0512512	2.4088064
0.86	0.7994002	0.6874842	8.60	0.2385519	2.0515463	48.0	0.0502223	2.4106704
0.88	0.7952756	0.6998425	8.80	0.2341674	2.0606731	49.0	0.0492338	2.4124562

参 考 文 献

- 1) 大路通雄：等方性乱れの二重速度相関を近似する一函数。“九大応力研所報”第15号(1960) 139.
- 2) M. Ohji: On the theory of homogeneous axisymmetric turbulence (II). *Rep. Res. Inst. Appl. Mech.* **6** (1958) 153.
- 3) M. Ohji: Effect of a very strong uniform magnetic field on magneto-fluid dynamic turbulence. *J. Phys. Soc. Japan*, **19** (1964) 1430; M. Ohji: Response of magneto-fluid dynamic turbulence to an imposed strong magnetic field in the presence of the Hall effect. *J. Phys. Soc. Japan* **21** (1966) 167; 大路通雄, 土屋良明: 一様な磁場を伴う回転系中の電磁乱流. “信州大工学部紀要”第28号(1970) 15.
- 4) G. K. Batchelor: *The theory of homogeneous turbulence*. Cambridge Univ. Press (1953). 巽友正訳 “乱流理論” 吉岡書店 (1960).
- 5) J. C. Rotta: *Turbulente Strömungen*. B. G. Teubner Stuttgart (1972).
- 6) J. L. Lumley: Invariants in turbulent flow. *Phys. Fluids* **9** (1966) 2111.
- 7) 柴垣和三雄: “0.01%変形ベッセル函数表とその数値計算法” 培風館 (1955).
- 8) A. N. Kolmogoroff: On degeneration of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid. *C. R. Acad. Sci. U.S.S.R.* **30** (1941) 301.
- 9) P. G. Saffman: Note on decay of homogeneous turbulence. *Phys. Fluids* **10** (1967) 1349.
- 10) G. K. Batchelor & A. A. Townsend: Decay of isotropic turbulence in the initial period. *Proc. Roy. Soc. London* **A193** (1948) 539.
- 11) R. W. Stewart: Triple velocity correlations in isotropic turbulence. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **47** (1951) 146.

Summary

A Proposed Model for Correlation Functions in Isotropic Turbulence

Michio OHJI and Toshio HIRAYAMA

(Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering)

An attempt is made to simulate the decay process of homogeneous isotropic turbulence in an incompressible fluid by a model function

$$f(r) = \exp [b - \sqrt{c^2 r^2 + b^2}]$$

for the longitudinal double velocity correlation coefficient $f(r)$, where b and c are adjustable form parameters. It is assumed that c is equal to a constant c_0 for simplicity, and the equation for the decay of turbulent energy and Loitsi-ansky's invariant theorem are combined together to determine b as a function of the decay time t . The result is expressed by a simple integral including the modified Bessel functions K_n (up to $n = 3$). Associated temporal changes of some interesting quantities such as the length scales, the energy decay law, the turbulence Reynolds number as well as the triple velocity correlations are also discussed. They are in qualitative agreement with the case of actual turbulence, especially as the final stage of decay is approached. For the initial stage, a little more sophisticated model is expected to be promising.