

厚さ方向にモジュレーションが変化する ホログラムグレーティングの回折効率

両 角 修四郎*

(昭和49年5月31日受理)

1. 緒 言

立体ホログラムは、搬送波形ホログラフイー¹⁾によって、オフセット角を大きくし、強いコヒーレント光と厚い高解像力感光材を用いて作成される。これは応用分野では、蓄積情報量の大きい点で注目され、光学的には、その再生が Bragg 反射によって行われ、共役像が発生しない、白色光による再生が可能である等のすぐれた特徴をもっている。

このホログラムの結像や明るさ等の光学的性質を知るためには、構成要素としての厚い正弦波状グレーティングの光学的特性を調べることが必要で、中でも回折効率については、従来から数多くの研究が行われてきた。代表的なものとして、応用まで含めた包括的な、立体ホログラムに関する Leith らの研究²⁾、位相ホログラムの回折効率の計算法に、Floquet の定理を用い、固有値問題を適用した Burckhardt の理論的研究³⁾、Kodak 649F 乾板に記録した振巾ホログラムの回折効率に関する Friesem らの実験的研究⁴⁾、さらに、各種のホログラムに適用される回折効率の近似計算法に関する Kogelnik の研究⁵⁾、振巾ホログラムの回折効率を文献³⁾と文献⁵⁾の方法に従って計算し、相互に比較検討した Kaspar の研究⁶⁾、最近では、文献⁵⁾の研究を発展させ、グレーティングモジュレーションが厚さ方向に指数関数的に変化する場合を取扱った内田の研究⁷⁾が挙げられる。

筆者はすでに、ホログラムの断面を観察し、干渉縞のコントラストが厚さ方向に変化していることを見出し、回折効率との関係を考察した⁸⁾。この報告は、He-Ne レーザー光を用い Kodak 649F 乾板に記録した6種類のホログラムグレーティングについて、断面の観察例を示し、厚さ方向への指数関数的なモジュレーションの変化を仮定して相対回折効率を計算し、測定値との比較を行ないそれらのグレーティングの特性を調べたものである。

2. ホログラムグレーティングの作成

Fig. 1 はグレーティング作成の光学配置を示す。光源には He-Ne レーザー (6328Å), 感光材には高解像力 Kodak 649 F 乾板, 現像処理にはハイコントラスト現像剤 D-19, 20°C, 5分を使用する。

* 精密工学教室助手

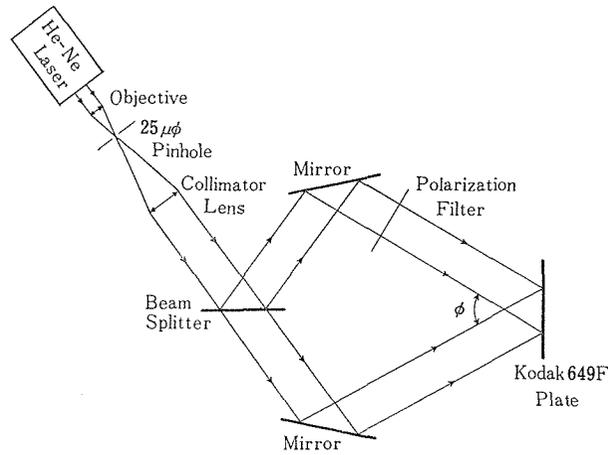


Fig. 1 Construction of unslanted hologram gratings

2つの平面波は電気ベクトルが入射面に垂直な直線偏光で、必要に応じ強度は偏光フィルターで調整され、乾板に対称に入射して干渉する。対称入射の場合には、アンズランテッドグレーティングが作成され、写真処理後に生ずる乳剤の収縮は問題とならない。

説明の便宜のため、2つの平面波をそれぞれ信号波、参照波と呼び、乳剤内における複素振幅を S 、 R とし、写真処理後のホログラムの振幅透過率は次式の I に比例するものとする⁹⁾。

$$I = SS^* + RR^* + RS^* + SR^* = |S|^2 + |R|^2 + 2|S||R| \cos\left(\frac{2\pi}{A}x\right), \quad (1)$$

ここで、 $*$ は複素共役、 x は2つの平面波面の交線に垂直な乳剤表面上の距離、 $A = \lambda / (2 \sin \frac{\phi}{2})$ は格子定数を示す。ただし、 λ はレーザー光の波長、 ϕ は2つの平面波の交叉角である。干渉縞のコントラストは強度比 $\gamma = |S|^2 / |R|^2$ によって変わる。Table 1 は、 γ

Table 1 Construction data of six hologram gratings. γ is the intensity ratio of signal to reference wave. ϕ is the angle between the two beams. The grating constant A is obtained from $\lambda / 2 \sin(\phi/2)$, where λ is the wavelength of He-Ne laser (6328Å).

	γ	ϕ	A
Holo. 1	1	11°	3.30μ
Holo. 2	1/5		
Holo. 3	1	22°	1.66μ
Holo. 4	1/4		
Holo. 5	1	33°	1.11μ
Holo. 6	1/5		

と ϕ の異なる 6 種類のグレーティングの作成データを示す。 ϕ は測定値で、 A は ϕ の値から求めたもので、グレーティング平面部の測定からは、Holo. 1 では 3.37μ 、Holo. 3 では 1.69μ 、Holo. 5 では 1.14μ の値を得た。

3. 断面の観察

Fig. 2 は Holo. 2, Holo. 4, Holo. 6 の顕微鏡による断面観察例を示す。観察用試料はグレーティングの乳剤を硬膜した後、9% NaOH 溶液を用いて剝離し、それをアラルダイト接着剤で包埋し、乳剤表面と干渉縞の層に対して直角に数 μ の厚さに切ったものである。

Fig. 2 (a) は断面の顕微鏡写真で、いずれも乳剤表面と直角な方向に干渉縞のコントラストが変化していることを示している。また Fig. 2 (b) はフィルムに撮影した断面の拡大像をマイクロデンストメーターによって、干渉縞と直角な方向に表面から深さの異なる 3 個所でトレースしたものであるが、明らかに 3 個所における平均的な濃度の振巾が異なっていることを示している。Holo. 6 の場合には、現像銀は格子定数 A と同程度の大きさになり、正弦波形状のみだれの大きいことが観察される。また、Holo. 1, Holo. 3, Holo. 5 の試料についても同様な現象が観察された。

この様な干渉縞のコントラストの変化は主として、感光材によるレーザー光の吸収と散乱によって生じ、平面波の振巾が乳剤表面から内部に向かって減衰し、散乱によって、2つの光波間の空間的な位相相関が減少するためと考えられる。この他に厚い乳剤では、現像効果の影響も挙げられるが²⁾、感光材を含まない 28μ ゼラチン層に対する D-11 現像剤の透過時間は 20°C で約 2 分という報告もあり¹⁰⁾、ここでは、乳剤の厚さ約 15μ 、現像時間 5 分の場合であるから、現像は厚さ方向に殆んど一様に行き渡るものと推定される。

いずれにしても、干渉縞のコントラストは乳剤表面からベース方向に減少し、その減少の仕方は散乱のため、指数関数的なものと予想される。立体ホログラムにおいては、この様な現象は好ましいものでなく、回折効率の低下を招き、方向感度を悪くして多重記録の障害となる。

4. 回折効率

振巾透過率が (1) 式の I に比例するホログラムを平面波 R と R^* で照明すると、それぞれ直接像 $(RR^*)S$ と共役像 $(R^*R)S^*$ が再生される。この場合、回折波の強度は最大となり、入射角、回折角は格子方程式と Bragg の反射条件を同時に満す。

一般に、Maxwell の方程式からホログラム内における電場 \mathbf{E} は次式を満足する。

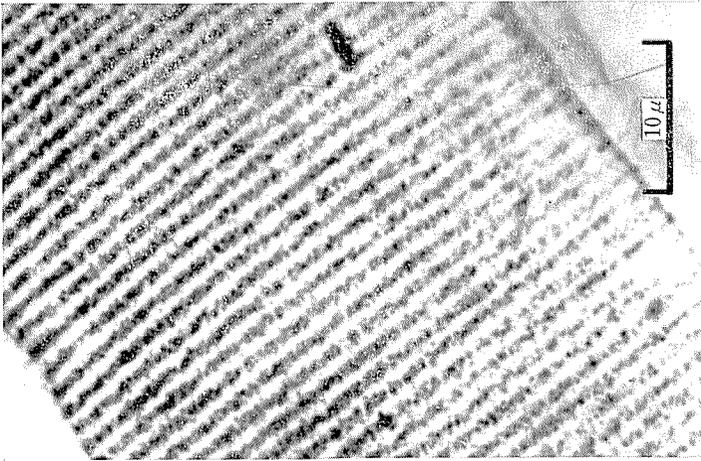
$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mu \left(\epsilon + \frac{4\pi\sigma}{\omega} i \right) \mathbf{E} = 0, \quad (2)$$

ここで、 k は真空中における伝播定数、 ω は角周波数、 μ は透磁率、 ϵ は誘電率、 σ は電気伝導度である。

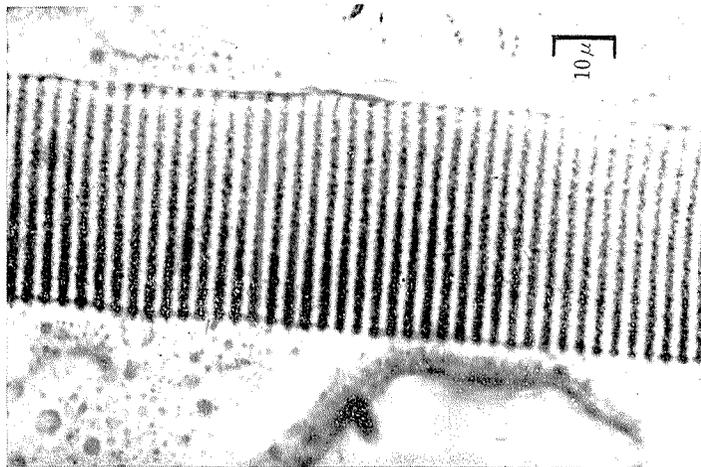
Fig. 3 は厚さ L のホログラムグレーティングの断面を示す。グレーティングベクター



Holo. 6

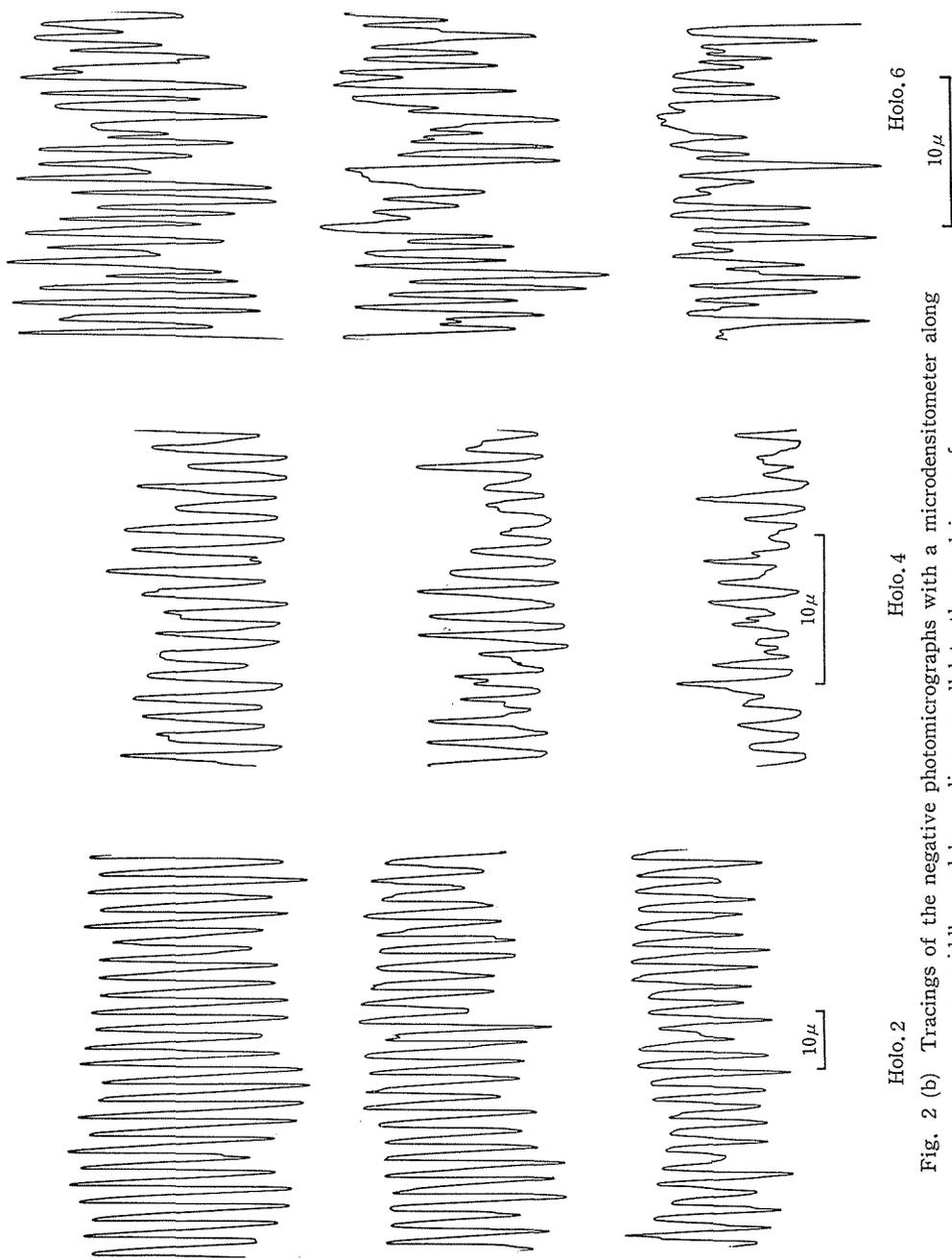


Holo. 4



Holo. 2

Fig. 2 (a) Photomicrographs of the cross sections of the hologram gratings.



Holo. 6

Holo. 4

Holo. 2

Fig. 2 (b) Tracings of the negative photomicrographs with a microdensitometer along upper, middle, and lower lines parallel to the emulsion surface.

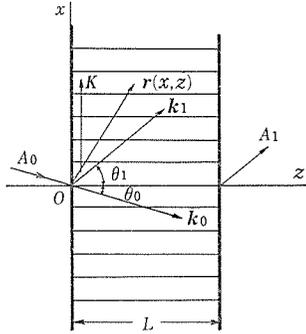


Fig. 3 Geometry of the grating cross section for calculating the diffraction efficiency. k_0 and k_1 are the propagation vectors of the direct and first diffracted waves, respectively and K is the grating vector. L is the grating thickness.

K は x 軸に平行, グレーティングの表面は z 軸に垂直である. グレーティングの誘電率 ϵ と電気伝導度 σ は, 次式のように, z 方向にそのモジュレーションを減じながら x 方向に周期的に変動するものとする.

$$\begin{aligned}\epsilon &= \epsilon_0 + \epsilon_1 e^{-\alpha_g z} \cos(Kx), \\ \sigma &= \sigma_0 + \sigma_1 e^{-\alpha_g z} \cos(Kx),\end{aligned}\quad (3)$$

ここで, α_g はモジュレーションが指数関数的に変化する場合の減衰係数であり, $K = 2\pi/L$ はグレーティングベクトルの大きさ, ϵ_0, σ_0 はそれぞれ, 平均の誘電率, 電気伝導度, ϵ_1, σ_1 は $z = 0$ におけるモジュレーションである.

このグレーティングに角 θ_0 で平面波が入射する場合の回折波の振巾を計算する. 簡単に, 計算に関係するすべての平面波は電気ベクトルが入射面 ($x-z$ 平面) に垂直な直線偏光とする. また, グレーティング内の点 $r(x, z)$ における電場 E は, 次式のように直接光と 1 次回折光との和のみで近似できるものと仮定する.

$$E(x, z) = A_0(z) e^{ik_0 \cdot r} + A_1(z) e^{ik_1 \cdot r}, \quad (4)$$

ここで, k_0, k_1 はそれぞれ直接光, 1 次回折光の伝播ベクトルで, その大きさは $|k_0| = |k_1| = n_0 k$ であり, n_0 はグレーティングの平均屈折率で, 同時にグレーティング外部の屈折率を示す.

(2), (3), (4) 式から, $A_0''(z), A_1''(z), A_0 e^{-i(K-k_0) \cdot r}, A_1 e^{i(K+k_1) \cdot r}$ などの 2 次微分や高次の項を省略して次式を得る.

$$\begin{aligned}c_0 \frac{dA_0(z)}{dz} + \alpha A_0(z) &= i\kappa_0 A_1(z) e^{-\alpha_g z} e^{-i\Delta k \cdot z}, \\ c_1 \frac{dA_1(z)}{dz} + \alpha A_1(z) &= i\kappa_0 A_0(z) e^{-\alpha_g z} e^{i\Delta k \cdot z},\end{aligned}\quad (5)$$

ここで,

$$\begin{aligned}\kappa_0 &= \frac{1}{2} (k \Delta n + i \Delta \alpha), \quad \alpha = \frac{2\pi \mu \sigma_0}{n_0 \omega} k, \quad \Delta n = \frac{1}{2} \epsilon_1 / \sqrt{\epsilon_0}, \\ \Delta \alpha &= \frac{2\pi \mu \sigma_1}{n_0 \omega} k, \quad c_0 = \cos \theta_0, \quad c_1 = \cos \theta_1,\end{aligned}$$

α は光波の振巾に対する吸収係数, $\Delta n, \Delta \alpha$ はそれぞれ $z = 0$ における屈折率と吸収係数のモジュレーションである. θ_0, θ_1 はそれぞれ, 直接光, 1 次回折光の z 軸となす角である. (5) 式の Δk は次式を満す z 軸に平行なベクトル Δk の大きさである.

$$k_1 - k_0 = K - \Delta k. \quad (6)$$

Fig. 4 は k_0 , k_1 , Δk , K の関係を示す. Δk は (6) 式の z 軸への投影から次式で与えられる.

$$kn_0(\cos\theta_0 - \cos\theta_1) = \Delta k. \quad (7)$$

また, (6) 式の x 軸への投影は次式となる.

$$kn_0(\sin\theta_0 + \sin\theta_1) = K. \quad (8)$$

明らかに, θ_0 , θ_1 は格子方程式を満し, $\theta_1 = \theta_0$ の場合には, Bragg の反射条件 $2kn_0 \sin\theta_0 = K$ が得られる. 文献 6) の研究と異なる点は, (7) 式の Δk と (8) 式の回折角 θ_1 の決め方であり, 相対効率の計算値を比較すると, 大きな入射角 θ_0 に対してはその差が顕著に現われ, 後に Fig. 6 で示すように, 副極大の横位置は (7), (8) 式を使用した方が実測とよく合う.

さて, (5) 式から $A_1(z)$ に関する Bessel の微分方程式が得られ, 透過形グレーティングに対しては, $A_0(0) = 1$, $A_1(0) = 0$ の境界条件から回折波の振巾 $A_1(z)$ が求まる. 回折波の振巾が小さい即ち κ_0 が小さい場合には次式となる.

$$A_1(z) = i(c_0/c_1)^{1/2} bz e^{-(\alpha_g+d)z/2} \frac{\sinh\alpha_g \nu z}{\alpha_g \nu z}, \quad (9)$$

ここで,

$$b = \kappa_0 / (c_0 c_1)^{1/2}, \quad d = (1/c_0 + 1/c_1)\alpha - i\Delta k, \\ g = (1/c_0 - 1/c_1)\alpha - i\Delta k, \quad \nu = -(\alpha_g + g)/2\alpha_g.$$

従って, 回折効率 η は次式で与えられる.

$$\eta = (c_1/c_0) A_1(L) A_1^*(L) \\ = bb^* L^2 \exp\{-[\alpha_g + (1/c_0 + 1/c_1)\alpha]L\} \\ \times \frac{\sinh^2\{[\alpha_g \pm (1/c_0 - 1/c_1)\alpha]L/2\} + \sin^2(\Delta k \cdot L/2)}{\{[\alpha_g \pm (1/c_0 - 1/c_1)\alpha]L/2\}^2 + (\Delta k \cdot L/2)^2}, \quad (10)$$

ここで, z 軸の正の向きにモジュレーションが減少するときは+符号, 増加するときは一符号を用い, モジュレーションの変化がない場合には, $\alpha_g = 0$ とすればよい. (10) 式には b または κ_0 が含まれ, このままでは実験との比較がむづかしく, ここでは Bragg 角における効率 η_0 で規格化した相対効率 η/η_0 を計算する.

計算に必要なパラメーターは次の様にきめる. αL の値は平均強度透過率 T_0 から $e^{-\alpha L} = T_0^{1/2}$ の関係を使って求める. $\alpha_g L$ の値は実験から直接求めるのは容易でないので相対効率の計算値が測定値に全体として一致するようにして決定する. モジュレーションは乳剤の表面からベースに向かって減少するものとし, 直接像の再生配置に対しては+符号, 共役

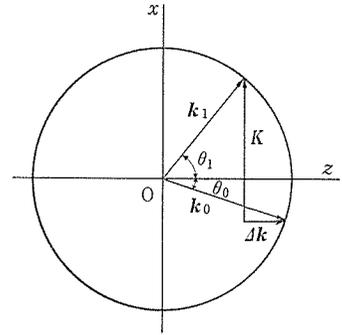


Fig. 4 A vector diagram for k_0 , k_1 , Δk , and K . Δk is a vector parallel to the z -axis. The relation among these vectors is given by Eq. (6).

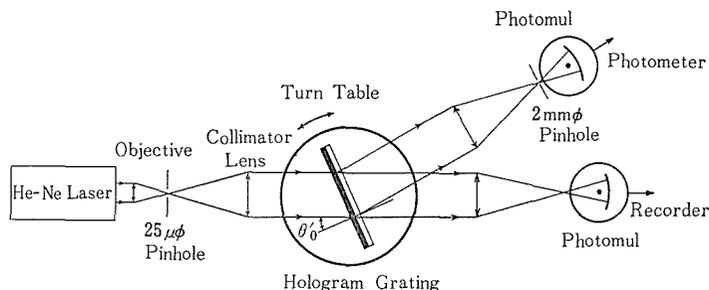


Fig. 5 Measurement of the relative diffraction efficiency.

像に対しては一符号を用いる。乳剤の厚さ L は効率に大きな影響を与え、正確な値が必要であるので、タリサーフ表面あらさ計を用いて測定した。グレーティングの平均屈折率は $n_0 = 1.52$ とする。

Fig. 5 は相対効率を測定するための実験配置を示す。入射平面波は電気ベクトルが入射面に垂直な直線偏光である。いま、空気中の入射角 θ_0' において、入射光と回折光をレンズで集光し、フォトメーターで受け、それぞれ記録計と露出計から、強度に比例した値を読みとり、それを I_i , I_d とする。同様に、Bragg 角における読みの値を I_{i0} , I_{d0} とすると、相対効率は次式で与えられる。

$$\eta/\eta_0 = (I_d/I_i)/(I_{d0}/I_{i0}). \quad (11)$$

ただし、入射光はレーザー光の時間的変動の影響をさけるため、回折光を測定した直後グレーティングを開口から除去して測定する。平均透過率 T_0 は $\theta_0' = 0$ において、グレーティングが開口に存在する場合としない場合の記録計の読みの比から求める。開口の大きさは $21 \times 18\text{mm}$ (巾) である。計算との比較では角度の換算 $\sin\theta_0' = n_0 \sin\theta_0$ を用いる。

Fig. 6 は直接像の再生配置の場合における入射角 θ_0' に対する相対効率 η/η_0 を与える図で、○印は測定値を示し、実線は $\alpha_g \neq 0$ 、点線は $\alpha_g = 0$ の場合の計算値を示す。この図は測定値と計算値の主極大を中心としたほぼ対称な部分を合致させて比較したものである。実線と点線の比較から分かるように、 α_g の値は主極大の巾を広くし、方向感度を悪くしている。また、測定値と計算値(実線)はいずれの場合も可成り良く合致しているが、Bragg 角を離れた左部分での両者の相違は大きく、測定値の方に強い非対称が現われる。これは乳剤表面や乾板ベースの反射損失の非対称に起因しているものと考えられる。計算では、 α と α_g が共存するとき非対称が現われ、 $\alpha > \alpha_g$ の場合にそれが強くなる。図示した値から分かるように、 α と α_g は殆んど同程度の大きさと考えてよく、Bragg 角近傍では(10)式の $1/c_0 - 1/c_1$ は相当小さい値をもつため、主極大の巾を広くするのは、主に α_g の値であると云える。さらに、これは効率そのものを低下させ、例えば Bragg 角における効率は、 $\exp(-\alpha_g L) \frac{\sinh^2(\alpha_g L/2)}{(\alpha_g L/2)^2}$ の因子だけ減少する。従って、この α_g の値を小さくすることが望ましい。

$\alpha_g L$ の値について、Holo. 1 は Holo. 2 より小さく、Holo. 3, Holo. 4 では同程度

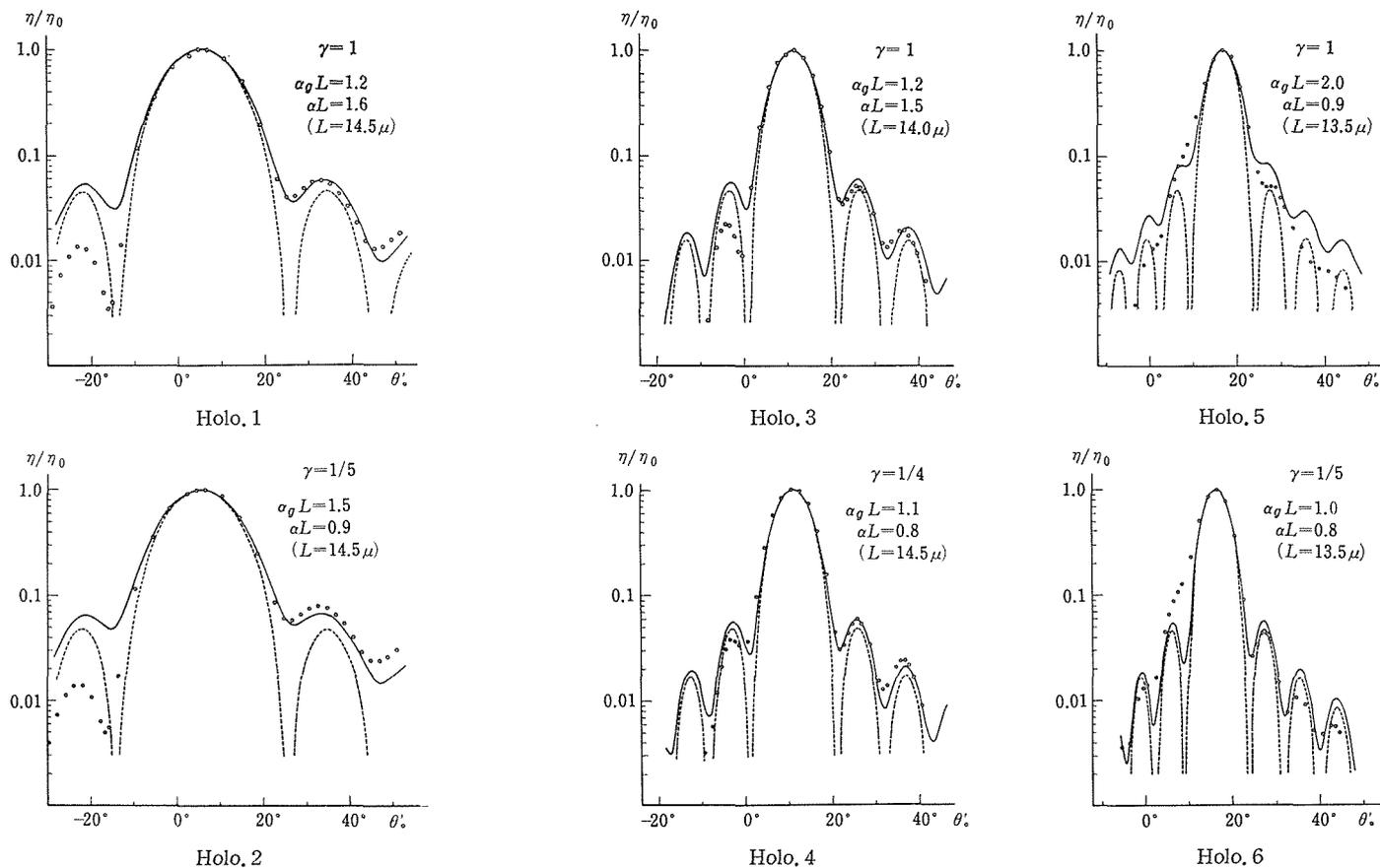


Fig. 6 The relative diffraction efficiency η/η_0 versus the incident angle θ_0' in the reconstruction of the direct image, η_0 is the efficiency in Bragg's angle. The open circles show the measured results. The solid lines and dotted ones show the calculated results in the cases of $\alpha_g \neq 0$ and $\alpha_g = 0$, respectively.

であり, Holo. 5 は Holo. 6 より大きい. この事は強度比 γ と格子定数 A に密接に関係し, モジュレーションの減少を少なくするためには, A が現像銀より大きい場合には, γ を大きくして1程度にし, 現像銀と同程度の大きさの A では, γ を比較的小さくし, 1/5程度が適当の様に思われる. ただし, γ を小さくした場合 $\kappa_0\kappa_0^*$ が減少するので, 効率そのものの低下に注意しなければならない⁴⁾. この様な α_0L , γ , A 間の関係は次のように解釈される. グレーティング作成時において, A が大きいときには, 強度最小の部分は散乱光の影響を受けにくく, 散乱光は参照光との和で初めて効果を示すので, γ が小さい場合の方が α_0L は大きな値をもち, 逆に A が小さい程, 散乱光の影響を受け易いため, γ が小さい場合には, 散乱光の効果が目立ちにくく, α_0L は小さな値となる.

α_0L の値を断面の観察から直接求めるためには, 切片の厚さや, 顕微鏡, デンシトメーター, フィルム等の測定光学系のレスポンス関数が必要となる. 従って, この測定は相当むずかしく, 測定できても, 得られた結果は局所的な部分の一微小切片に対する値にすぎない. 実際には, グレーティング作成の際, 一樣な光束は得にくく, 各場所で強度, 強度比が異っているため多数の切片の測定が必要となる. むしろ, この値は相対効率についての測定値と計算値とのほど妥当と思われる合致度において, 両者の比較から平均的な値として求めるのが便利である.

Holo. 5 と Holo. 6 では, 左部分に副極大が生じないが, これは現像銀粒子の荒れによる周期構造のみだれと同時にモジュレーションの減少に関連している. しかし, Bragg角近傍では殆んど良く一致し, Holo. 6 では, さらに右部分での合致もよく, この事は(3)式がグレーティングのモデルとして使用されうことを示している. 実際には, (3)式において高周波成分も考慮しなければならないが, 1次回折光のみを対象にし, その相対効率を問題にする限り(3)式で十分である.

モジュレーションの減少する向きについて, 3. の予想を確認するため, Holo. 2 のグレーティングについて共役像の再生配置で相対効率の測定を行った. この配置はグレーティングを裏返えただけで他は直接像の再生配置と同一である. この測定で得られる回折効率を示す曲線の形は, 直接像の場合を Bragg 角を中心に左右入れ替えた様な形になった. これは(10)式の一符号に対応し, モジュレーションが乳剤表面からベースに向かって減少していることを示している.

回折効率の近似計算法については, $\alpha, \kappa_0 \ll k$ の関係を満し, c_0, c_1 が極端に小さくない, さらに $Q = 2\pi\lambda L/n_0A^2 > 10$ という条件があれば, 正確な計算とよく合致し⁵⁾, モジュレーション自身が小さいとか, その変化が大きい場合には, $Q < 10$ でも, この計算法は相当正しい結果を与えることが指摘されている^{6), 7)}. ここで, Q の値はホログラムの厚さの目安を与えるパラメーターで, Holo. 1, Holo. 2 では $Q \approx 4$, Holo. 3, Holo. 4 では $Q \approx 14$, Holo. 5, Holo. 6 では $Q \approx 29$ で, どの場合も $Q > 1$ の値をもち比較的厚いものに属している.

5. 結 論

He-Ne レーザー (6328Å) を使い, Kodak 649F 乾板に記録したアンスランテッドホロ

グラムグレーティングについて、次の様な知見が得られた。

グレーティング断面の観察から、モジュレーションが乳剤表面からベース方向に減少していることが分り、さらに、回折効率に関する計算値と測定値との比較から、その減少の仕方は指数関数的なものと考えて良く、それによって、その減衰係数が推定された。この係数の値を小さくするためには、現像銀粒子より相当大きい格子定数の場合には、信号波と参照波の強度比を1程度にし、現像銀と同程度の大きさの格子定数の場合には、その強度比を小さくし、1/5程度が適当と思われる。この辺の状況をもっと明確にするためには、より小さな強度比、格子定数の場合の検討も必要と思われる。また、Kogelnikの手法に基いて得た相対効率の近似計算値は、測定結果によく一致し、モジュレーションの変化が存在する場合には、 Q が4程度の小さい値であっても相当よく合致することが確かめられた。

以上の様な研究は、実用的見地から、さらに、スランテッド形、反射形、位相形ホログラムグレーティングに対しても行い必要があり、それは今後の課題として残されている。

最後に、この研究に対して多くの御援助をいただいた本学部 後藤克也教授に謹んで感謝の意を表します。

文 献

- 1) E. N. Leith and J. Upatnieks, J. Opt. Soc. Amer., 52, 1123 (1962)
- 2) E. N. Leith, A. Kozma, J. Upatnieks, J. Marks and N. Massey, Appl. Opt., 5, 1303 (1966).
- 3) C. B. Burckhardt, J. Opt. Soc. Amer., 56, 1502 (1966).
- 4) A. A. Friesem, A. Kozma and G. F. Adams, Appl. Opt., 6, 851 (1967).
- 5) H. Kogelnik, Bell Syst. Tech. J., 48, 2909 (1969).
- 6) F. G. Kaspar, J. Opt. Soc. Amer., 63, 37 (1973).
- 7) N. Uchida, J. Opt. Soc. Amer., 63, 280 (1973).
- 8) 両角修四郎, 第34回応用物理学会学術講演会予稿集 I, P. 76 (1973).
- 9) A. Kozma, J. Opt. Soc. Amer., 56, 428 (1966).
- 10) 坂口富弥, 千葉大学工業短期大学部研究報告, 9巻9号, p. 55 (1970).

SUMMARY**Diffraction Efficiency of Hologram Gratings with Modulation Changing
in the Direction Perpendicular to the Grating Surface**

Shushiro MOROZUMI

(Department of Precision Engineering, Faculty of Engineering)

From the cross sections of hologram gratings recorded on Kodak 649F plates by the use of He-Ne laser, the decrease of the grating modulation from the emulsion surface to the base is observed.

On the assumption of the exponential decrease, the coupled wave theory is applied to the calculation of the diffraction efficiency of the gratings. The comparisons between the calculation and the measurement are described about the relative diffraction efficiency and a condition to reduce the decrease of the grating modulation is discussed in terms of the recording parameters.