

# 複素応力函数による平面応力の数値解法について

(有限領域を占める弾性体の場合)

佐々木三郎\*

(昭和48年5月31日受理)

## 1. ま え が き

任意の形をした二次元弾性体に、任意の面内荷重が作用したとき生ずる応力・変位を計算することは、古来よりの課題であるが、簡潔で有力な決定的方法は未だに発見されていないようである。

ほとんどの研究は、境界条件を満足するような応力函数を求める方向で進められ、問題に応じて適切な座標系を導入し、既知の応力函数を組合せる方法がとられている。しかし弾性体の形状によっては座標系や応力函数の選択に問題が生じ、計算方法もまた複雑困難を極めるのが通常である。

複素応力函数を用いる、より普遍的な解法は Goursát に初まり、Muskhelishvili<sup>(1)</sup>らの研究により、一応理論的には見通しのよい結果が得られているけれども、実際に具体的な問題の数値計算を行うと種々の困難に出あい、解かれている問題もある制約をうけているようである。たとえば種々の形状の孔のある無限板<sup>(2)</sup>などは計算例も豊富ではあるが、有限領域については比較的少なく、正方形・長方形・正多角形内部の応力・変位<sup>(3)</sup>とか、形状の変化する部分の応力集中の計算には無限領域<sup>(4)(5)</sup>を対象にしているなどである。とくに孔のある有限領域については、特別な場合の外、計算例はあまり見当たらない。

この報告は比較的研究の少ない、形状の変化している単連結有限領域について、写像函数を多項式にとった場合の計算上の難点をあげ、それを避けるための若干の工夫を述べている。数値計算例として“引張りを受ける長方形出張りのある有限帯板”について計算し、実験結果と比較しその妥当性を論じたものである。

## 2. 複素応力函数 $\varphi(z)$ , $\psi(z)$ を定める条件式 と応力・変位式 (要約)

≈平面上にある弾性体領域Dの境界Cにそって外力が作用したとき、その応力状態を定める Airy の応力函数  $F(x, y)$  は  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  を用いてつぎのように表わされる。

$$F(x, y) = \operatorname{Re} \left[ \bar{z}\varphi(z) + \int^z \psi(z)dz \right], \quad (1)$$

---

\* 機械工学教室 助教授

ただし  $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$  で,

$\varphi(z), \psi(z)$  は  $z$  の解析関数である.

原点を含む単一連結領域  $D$  を  $\zeta$  平面上の単位円  $\gamma$  の内部に等角写像し, かつ  $\omega(0) = 0, \omega'(0) > 0$  を満足する解析関数

$$z = \omega(\zeta) \tag{2}$$

がただ一つ存在することは Riemann の写像定理により保証されている.

$\varphi(z), \psi(z)$  に(2)式を代入した関数を  $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$  とおけば, これらは境界上でつぎの関係を満足しなければならない.

$$\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = f(\sigma), \tag{3\cdot a}$$

または, 共軛をとって

$$\overline{\varphi(\sigma)} + \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \varphi'(\sigma) + \psi(\sigma) = \overline{f(\sigma)}. \tag{3\cdot b}$$

ただし  $\sigma$  は  $\zeta$  平面上の単位円  $\gamma$  上の点で  $\sigma = e^{i\theta}$  で表わされ, bar は共軛を示す. 両式の右辺第1項  $f(\sigma), \overline{f(\sigma)}$  は荷重項で, 境界  $C$  にそうて作用する外力から, つぎのように計算されるものである

$$i \int_0^s (p_x + ip_y) ds = f_1(s) + if_2(s) \xrightarrow{(2)\text{式}} f_1(\sigma) + if_2(\sigma) = f(\sigma). \tag{4}$$

ただし  $s$  は  $C$  にそう境界の長さ,  $p_x, p_y$  は単位長さ当りの外力の  $x, y$  成分である.

(3\cdot a), (3\cdot b) 式の両辺に  $\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$  を乗じ, 単位円  $\gamma$  にそうて積分すれば,  $\zeta$  は  $\gamma$  内部の点であるから Cauchy 積分定理を用いて,  $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$  を定めるつぎの微積分方程式が得られる

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma, \tag{5\cdot a}$$

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{f(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma. \tag{5\cdot b}$$

応力・変位式は曲線座標  $(\rho, \theta)$  で表わされ

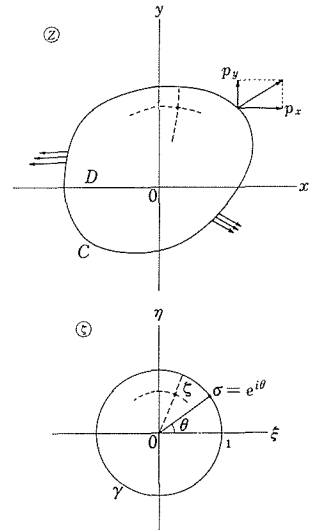


図1 弾性体領域  $D$  の写像

$$\begin{cases} \sigma_{\theta} + \sigma_{\rho} &= 2 \left\{ \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\overline{\varphi'(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}} \right\}, \end{cases} \quad (6 \cdot a)$$

$$\begin{cases} \sigma_{\theta} - \sigma_{\rho} + 2i\tau_{\theta\rho} &= \frac{2\zeta}{\omega'(\zeta)} \left[ \overline{\omega(\zeta)} \left\{ \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right\}' + \varphi'(\zeta) \right], \end{cases} \quad (6 \cdot b)$$

$$2G(u_{\theta} + iu_{\rho}) = \frac{\bar{\zeta}}{|\zeta|} \cdot \frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{|\omega'(\zeta)|} \left\{ \kappa\varphi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} \right\}. \quad (6 \cdot c)$$

たゞし  $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$  (平面応力),  $3-4\nu$  (平面ひずみ),

$\nu$  はポアソン比,  $G$  は横弾性係数.

応力集中に関係のある縁応力  $(\sigma_{\theta})_c$  は, 自由縁では  $\sigma_{\rho} = 0$  であるから (6・a) 式より計算され

$$(\sigma_{\theta})_c = 2 \left\{ \frac{\varphi'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} + \frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}} \right\}. \quad (7)$$

以上の諸式にもとづいて計算の手順を示すと

- (1)  $z$  平面上に弾性体領域  $D$  (境界  $C$ ) が与えられたとき,  $D$  を  $\zeta$  平面上の単位円内部に写像する函数  $z = \omega(\zeta)$  を求め,
- (2) 境界  $C$  にそうて作用する外力  $(p_x, p_y)$  から, (4) 式を用いて  $f(\sigma)$  を計算し,
- (3)  $f(\sigma)$ ,  $\omega(\sigma)$  などを (5・a) 式に代入し, 同式を満足する  $\varphi(\zeta)$  を定める.
- (4) 応力集中に関係のある縁応力  $(\sigma_{\theta})_c$  は (7) 式から計算する.
- (5) 領域内部の応力・変位を求めるには (5・b) 式から  $\psi(\zeta)$  を求め, (6) 式より計算する.

### 3. 数値計算上の問題点とその処理

簡単のため弾性体領域  $D$  および外力は,  $x$  軸に関して対称であると仮定する. (このことは一般の場合に比べて本質的な差異はないが計算が繁雑になるからである.)

#### 3.1 写像函数 $z = \omega(\zeta)$ について

(2) 式は正規化条件のもとに,  $|\zeta| < 1$  で正則な無限級数  $\omega(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\sigma}_n \zeta^n$  で表わされることが, 実際の計算には有限級数 (項数を  $m$  とおく)

$$z = \omega(\zeta) = \sum_{n=1}^m \bar{\sigma}_n \zeta^n \quad (8)$$

を用いなければならない. 係数  $\bar{\sigma}_n$  は対称性の仮定より実数である. (対称性がふえるごとにとびとびの値をとることは自明)

有限級数であるため,  $\zeta$  平面上の単位円  $r$  上の点  $\sigma$  に対応する  $z$  平面上の図形は  $C$  とは若干異なり, 写像曲線は凸角部で丸められ, 凹角 (隅角) 部は比較的忠実に写像される.

また  $C$  が円形に近いほど項数  $m$  は少なくてすみ、円形から遠ざかるほど  $m$  を多くとる必要がある。

上記のように項数が多いほど  $C$  に近づくことは当然であるが、後述の連立一次方程式の未知数が多くなり、解法はますます困難になるという相反する性質を考慮して、項数  $m$  を選択しなければならない。一般に任意の形状  $C$  に対する  $b_n$  の計算は容易ではないが、直線部分および隅角部を丸めた領域については、Schwarz-Christoffel の変換（以下  $SC$  変換と略記する）を応用して計算し (8) 式に展開するのが普通である。すなわち

図 2(a) の如き  $z$  平面上の  $n$  角形の内部領域を  $\zeta$  平面上の単位円  $\gamma$  の内部に写像する函数は

$$\frac{dz}{d\zeta} = K_1 \prod_{i=1}^n (\zeta - \sigma_i)^{\alpha_i - 1}. \quad (9)$$

ただし  $K_1$  : 多角形の大いさを定める定数

$\alpha_i$  :  $i$  番目の頂角  $\alpha_i \pi$  の係数

$\sigma_i$  : 多角形の頂点に対応する単位円上の点.

(9) 式をつぎのように級数に展開する

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\zeta} &= K_1 \exp \left\{ \sum_{i=1}^n (\alpha_i - 1) \ln(\zeta - \sigma_i) \right\} \\ &= K \exp \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{j} \sum_{i=1}^n \frac{1 - \alpha_i}{\sigma_i^j} \right) \zeta^j \right\} \\ &= K \exp \{ a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + \dots + a_j \zeta^j + \dots \} \end{aligned}$$

$$\text{ただし } a_j = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^n \frac{1 - \alpha_i}{\sigma_i^j} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &= K \left( 1 + a_1 \zeta + \frac{a_1^2}{2!} \zeta^2 + \frac{a_1^3}{3!} \zeta^3 + \dots \right) \left( 1 + a_2 \zeta^2 + \frac{a_2^2}{2!} \zeta^4 + \dots \right) \left( 1 + a_3 \zeta^3 + \dots \right) \dots \\ &= K (1 + a_1 \zeta + c_2 \zeta^2 + c_3 \zeta^3 + \dots). \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{積分して} \quad z = \theta_1 \zeta + \theta_2 \zeta^2 + \theta_3 \zeta^3 + \dots + \theta_i \zeta^i + \dots \quad (12)$$

たとえば、 $A_n A_1$ ,  $A_1 A_2$  上の二点  $P$ ,  $Q$  で丸めたい場合は (9) 式を変形した

$$\frac{d}{d\zeta} \left( \ln \frac{dz}{d\zeta} \right) = - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\zeta - \sigma_i} \quad (13)$$

の  $\frac{\lambda_i}{\zeta - \sigma_i}$  の項の代りに  $\int^{\lambda_i} \frac{d\lambda}{\zeta - \sigma(\lambda)}$  を代入し、 $dz/d\zeta$  にもどして (10) 式に相当する  $a_j$  を計算し、以下上述の手続きにより (12) 式を計算する。 $\sigma(\lambda)$ 、積分計算などは省略する<sup>(6)(5)</sup>。

(9) 式に戻って、多角形の形状を与えて、頂点に対応する  $\zeta$  平面上の単位円上の点  $\sigma_i$  を定

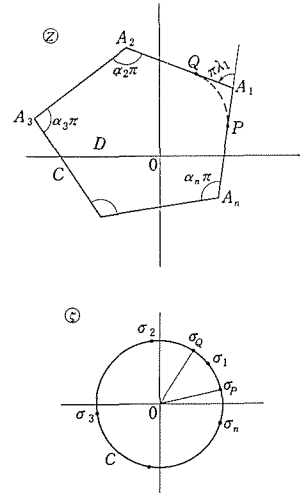


図 2 多角形領域の写像

める方法は、Kantorovich-Krylov の著書<sup>(7)</sup>に示されているが、この方法は非常に面倒なため、逆に  $\sigma_i$  すなわち  $\theta_i$  に種々の値を与えて図形をえがき、希望の図形に適合する  $\theta_i$  を内挿などにより求めるのが通例である。

### 3.2 荷重項 $f(\sigma)$ について

$f(\sigma)$  は(4)式より計算される。数個の集中荷重が作用している場合、 $f(\sigma)$  は単位円  $\gamma$  の偏角  $\theta(0 \sim 2\pi)$  に対して階段状曲線で表わされ、 $\theta$  の部分区間で定数であるため、後述の  $E_n$  が(19)式により容易に計算されるのであるが、分布荷重の場合は、(4)式よりの  $f$  が周長  $s$  の函数となり、この  $s$  を  $z$  でおきかえ、(2)式を用いて  $\theta$  の函数で表わさなければならぬ。これは厄介な計算で有限領域を扱うときの欠点となる。

従来応力集中などの計算に無限帯板がとりあげられている一つの理由と考えられよう。

後述の数値例では分布荷重を数個の集中荷重の和におきかえて計算している。この方法により計算される応力の値は、荷重辺附近では誤差が現われるが、少しはなれると正しいことは Saint-Venant の原理で保証されているからである。

### 3.3 $\varphi(\zeta)$ の決定

(5)式から定められる  $\varphi(\zeta)$ 、 $\psi(\zeta)$  は  $|\zeta| < 1$  で正則で、次式のように表わすことができる

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n, \quad \psi(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n' \zeta^n. \quad (14)$$

(5・a)式の右辺第2項の積分を計算するには、まず(8)式を用いて次式を計算する。

$$\begin{aligned} \overline{\omega'(\zeta)} &= \sum_{n=1}^m n \bar{\sigma}_n / \zeta^{n-1}, \\ \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} &= d_m \zeta^m + d_{m-1} \zeta^{m-1} + \dots + d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_{-n} \zeta^{-n}. \end{aligned} \quad (15)$$

仮定により  $\bar{\sigma}_n$  は実数であるから、 $d_n$  も実数で  $d_m, d_{m-1}, \dots, d_1$  は次式により順次求められる

$$\begin{aligned} d_m &= \bar{\sigma}_m, & d_{m-1} &= \bar{\sigma}_{m-1} - 2\bar{\sigma}_2 d_m, & d_{m-2} &= \bar{\sigma}_{m-2} - 2\bar{\sigma}_2 d_{m-1} - 3\bar{\sigma}_3 d_m, \dots \\ \text{一般に} & & d_i &= \bar{\sigma}_i - 2\bar{\sigma}_2 d_{i+1} - 3\bar{\sigma}_3 d_{i+2} - \dots - (m-i+1)\bar{\sigma}_{m-i+1} d_m. \\ & & & & & (i = m, m-1, \dots, 2, 1) \end{aligned}$$

また(14)式より

$$\overline{\varphi'(\zeta)} = \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{a}_n / \zeta^{n-1}. \quad (16)$$

(15)(16)式を(5・a)式右辺第2項に代入して積分を行えば

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = \sum_{n=0}^m K_n \zeta^n \tag{17}$$

たゞし  $K_m = d_m \bar{a}_1, K_{m-1} = d_{m-1} \bar{a}_1 + 2d_m \bar{a}_2, \dots, K_1 = \dots$

一般に  $K_i = d_i \bar{a}_1 + 2d_{i+1} \bar{a}_2 + \dots + (m - i + 1)d_m \bar{a}_{m-i+1}. \tag{18}$

( $i = m, m - 1, \dots, 2, 1$ )

( $K_0$  は応力に無関係故省く)

(5・a) 式右辺第 1 項については、 $f(s) = i \int^s (p_x + ip_y) ds$  から導いた  $f(\sigma)$  を複素フーリエ級数に展開して

$$f(\sigma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n \sigma^n, \text{ たゞし } E_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f e^{-in\theta} d\theta. \quad (n = 0, 1, 2 \dots) \tag{19}$$

Cauchy 積分定理により

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \zeta^n. \tag{20}$$

(9) (17) (20) 式を (5・a) 式に代入し、整理すると

$$\left. \begin{aligned} a_1 + d_1 \bar{a}_1 + 2d_2 \bar{a}_2 + 3d_3 \bar{a}_3 + \dots + md_m \bar{a}_m &= E_1, \\ d_2 \bar{a}_1 + a_2 + 2d_3 \bar{a}_2 + 3d_4 \bar{a}_3 + \dots + (m-1)d_m \bar{a}_{m-1} &= E_2, \\ d_3 \bar{a}_1 + 2d_4 \bar{a}_2 + a_3 + 3d_5 \bar{a}_3 + \dots + (m-2)d_m \bar{a}_{m-2} &= E_3, \\ \dots & \\ d_{m-1} \bar{a}_1 + 2d_m \bar{a}_2 + 0 + \dots &\dots + 0 + a_{m-1} = E_{m-1}, \\ d_m \bar{a}_1 + 0 + \dots &\dots + 0 + a_m = E_m, \end{aligned} \right\} \tag{21_1}$$

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= E_{m+1}, \\ a_{m+2} &= E_{m+2}, \\ \dots & \end{aligned} \tag{21_2}$$

外力も  $x$  軸に関して対称と仮定したから  $E_i$  は実数、従って (21) 式より  $a_n$  も実数となる。連立一次方程式 (21<sub>1</sub>) をマトリックス形にかけば

$$\begin{pmatrix} 1+d_1 & 2d_2 & 3d_3 & \cdots & \cdots & md_m \\ d_2 & 1+2d_3 & 3d_4 & \cdots & (m-1)d_m & 0 \\ d_3 & 2d_4 & 1+3d_5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{m-1} & 2d_m & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ d_m & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{m-1} \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ \vdots \\ E_{m-1} \\ E_m \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$a_i = E_i, \quad (i = m+1, m+2, \dots)$$

$m$ 元連立一次方程式 (22) を解くのは  $m$  が大きいほど面倒であるため、本研究では  $m/2$  元 ( $m$ : 偶数) に半減して解く工夫をした, すなわち  $m/2 = l$  とおいて次式を導いている.

$$\begin{pmatrix} 1+d_1^1 & 2d_2^2 & 3d_3^3 & \cdots & \cdots & ld_1^l \\ d_2^1 & 1+2d_3^2 & 3d_4^3 & \cdots & \cdots & ld_1^{l+1} \\ d_3^1 & 2d_4^2 & 1+3d_5^3 & \cdots & \cdots & ld_1^{l+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_1^1 & 2d_2^{l+1} & 3d_3^{l+2} & \cdots & \cdots & 1+ld_1^{2l-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1' \\ E_2' \\ E_3' \\ \vdots \\ E_l' \end{pmatrix} \quad (23)$$

ただし 
$$d_j^i = d_j - \sum_{k=0}^{l-1-j+i} (2l-j+i-k)d_{2l-j+2i-1-k}d_{2l-k} = d_j^{1+j-i},$$

$$(i = 1, 2, \dots, l. \quad j = 1, 2, \dots, (2l-1). \quad j \geq 2i-1)$$

$$E_j' = E_j - \sum_{k=0}^{l-j} (2l-j+1-k)E_{2l-j+1-k}d_{2l-k}. \quad (j=1, 2, \dots, l)$$

(23) 式左辺のマトリックスの各要素の係数を除いた項は対角線に関して対称であるため, 比較的容易にプログラム化ができ, 解を求めることができる.  $a_1, a_2, \dots, a_l$  が求められれば残りの  $a_{l+1}, \dots, a_m$  は容易に計算される.

### 3.4 $\varphi(\zeta)$ 式と縁応力

第 3.3 項より  $a_n$  が定まれば  $\varphi(\zeta)$  が決定されるが, 有限の形にするため (9), (20), (21<sub>2</sub>) 式を用いて

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{f(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma + \sum_{n=1}^m (a_n - E_n)\zeta^n. \quad (24)$$

$\varphi(\sigma), \omega(\sigma)$  を用い, (7) 式より縁応力  $(\sigma\theta)_c$  を計算する際, 最も応力集中に関係のある隅角部や, 甚だしい凹角部分では  $\omega'(\sigma)$  の値は 0 に近く, また周上では  $\varphi(\sigma)$  の正則性が保証されないためか  $|\varphi'(\sigma)/\omega'(\sigma)|$  の値は周上で滑らかな連続的な値が得られない恐れがある.

幸い境界  $C$  の内部では,  $n$  が大きいほど  $|\zeta^n|$  は速やかに 0 に収束することから,

$\varphi'(\zeta)/\omega'(\zeta)$  の値が容易に計算される。以上の考察より後述の数値例では  $\theta$  曲線に沿って、1に近い  $\rho$  の値に依ずる  $2\text{Re}[\varphi'(\zeta)/\omega'(\zeta)]$  の値をグラフにとり、周上 ( $\rho = 1$ ) の値を外挿して縁応力を計算している。

3.5  $\psi(\zeta)$  式と領域内部の応力

領域内部の応力などを計算するには、 $\psi(\zeta)$  を求めておかねばならない。(24) 式を (5・b) 式に代入し整理すると

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{f(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma - \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)} \varphi'(\zeta) + \sum_{n=1}^m \frac{1}{\zeta^n} \left( \sum_{i=1}^{m+1-n} ia_i d_{n+i-1} \right). \tag{25}$$

右辺第2・3項には  $1/\zeta^n$  の項があるため、 $|\zeta|$  が小さいと計算できない。渋谷・中原<sup>(3)</sup> の計算式を変形して次式を導いた

$$\begin{aligned} \psi(\zeta) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{f(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma + \varphi'(\zeta) \frac{\sum_{n=1}^{m-1} e_n \zeta^{m-n-1}}{\sum_{n=1}^m n b_n \zeta^{n-1}} - \sum_{k=1}^{m-2} d_k \sum_{n=k+2}^m n a_n \zeta^{n-(k+1)} \\ & - \frac{1}{\zeta^{m-1}} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\sigma)}{(\sigma - \zeta)^2} d\sigma - \sum_{n=1}^m n E_n \zeta^{n-1} \right\} \sum_{k=1}^{m-1} d_k \zeta^{(m-1)-k} \\ & - \frac{1}{\zeta^m} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\sigma)}{(\sigma - \zeta)^2} d\sigma - \sum_{n=1}^{m+1} n E_n \zeta^{n-1} \right\} d_m. \end{aligned} \tag{26}$$

ただし 
$$e_r = - \sum_{n=1}^r (m - r + n) b_{m-r+n} \cdot d_n. \tag{27}$$

応力、変位は (6) 式から計算される。

4. 計 算 例

4.1 長方形出張りのある有限帯板の引張り

図3 (a) の如き長方形出張りのある有限帯板の左右両端面に引張り荷重が作用したときの、周縁に生ずる応力と対称軸上の応力を計算する。

[1] 写像函数

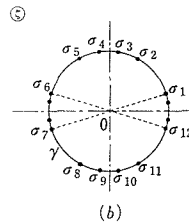
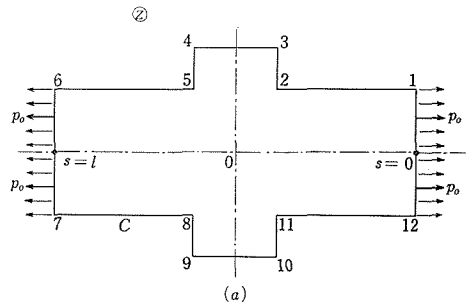


図3 出張りのある有限帯板の写像



S・C変換により 
$$\frac{dz}{d\zeta} = K_1 \left\{ \frac{(\zeta - \sigma_2)(\zeta - \sigma_3)(\zeta - \sigma_8)(\zeta - \sigma_{11})}{(\zeta - \sigma_1)(\zeta - \sigma_3)(\zeta - \sigma_4) \cdots (\zeta - \sigma_{12})} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (28)$$

ただし  $\sigma_1 = e^{i\theta_1}$ ,  $\sigma_2 = e^{i\theta_2}$ ,  $\sigma_3 = e^{i\theta_3}$

他は図 2 (b) のように実、虚軸に対称な  $\gamma$  円上の点.

図 2 (a) は  $\theta_1 = 5^\circ$ ,  $\theta_2 = 60^\circ$ ,  $\theta_3 = 80^\circ$  に対する帯板である. (10) 式に対応する  $a_j$  は

$$a_j = \begin{cases} 0, & (j: \text{奇数}) \\ \frac{2}{j}(\cos j\theta_1 - \cos j\theta_2 + \cos j\theta_3), & (j: \text{偶数}) \end{cases} \quad (29)$$

本計算では写像函数を80項とって計算を進めた. 2軸対称のため  $\theta_n$  の偶数項は0で

$$z = \omega(\zeta) = \sum_{n=1,3,\dots}^{159} \theta_n \zeta^n = \theta_1 \zeta + \theta_3 \zeta^3 + \cdots + \theta_{159} \zeta^{159}. \quad (30)$$

$\theta_n$  の値を表 1 に示した. 図 4 は単位円内部の点

$$\zeta = \rho e^{i\theta} (\rho = 0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1.0; \theta = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, \dots, 85^\circ, 90^\circ)$$

に対応する座標曲線と、隅角部附近の詳細を示している. 隅角部は比較的忠実に写像され, 凸角部では丸められていることが分る. 項数を増すと図 3 (a) の形に近接することは第 3・1 項に述べた通りである.

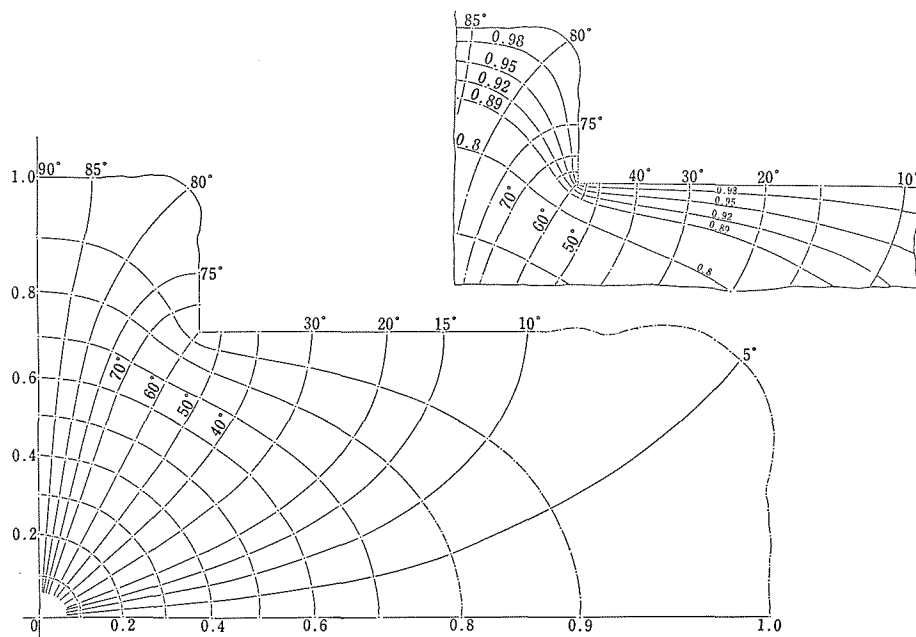


図 4 帯板の座標曲線と隅角部の詳細

表1 係 数 値

$n$	$b_n$	$d_n$	$E_n$	$a_n$	$e_{n+1}$
1	1.000000	0.7020634	19.9719548	10.2246731	0.1285434
3	0.1817050	0.0671167	6.5828132	3.3699398	0.1422666
5	0.2502887	0.1361069	3.8611794	1.5715272	0.1474366
7	0.0595517	-0.0133086	2.6647422	1.6457049	0.2058254
9	0.1133804	0.0578491	1.9781525	0.8000317	0.1311436
11	0.0506106	0.0057452	1.5248479	0.9746595	0.2323074
13	0.0488370	0.0168604	1.1987243	0.6536995	0.1112058
15	0.0403588	0.0117201	0.9504651	0.6385576	0.2089507
17	0.0202529	0.0073270	0.7541044	0.4930950	0.0964718
19	0.0275780	0.0073410	0.5947054	0.4916778	0.1405635
21	0.0048182	0.0026966	0.4630781	0.3739875	0.0830433
23	0.0168496	0.0076359	0.3532517	0.3363951	0.0430886
25	-0.0029336	-0.0022071	0.2611602	0.3189543	0.0617690
27	0.0058890	0.0060142	0.1839125	0.2127535	-0.0582762
29	-0.0045423	-0.0012459	0.1193656	0.2320441	0.0193311
31	-0.0037094	0.0013416	0.0658646	0.1506635	-0.1371320
33	-0.0045106	0.0002914	0.0220783	0.1438551	-0.0486427
35	-0.0094047	-0.0004271	-0.0131058	0.0860737	-0.1805633
37	-0.0046526	-0.0002709	-0.0406516	0.0866887	-0.1321125
39	-0.0117692	-0.0012420	-0.0614190	0.0340717	-0.1877654
41	-0.0048366	0.0003542	-0.0761943	0.0221788	-0.2130685
43	-0.0113173	-0.0026457	-0.0857096	0.0129173	-0.1685766
45	-0.0055706	0.0006308	-0.0906546	-0.0303475	-0.2655021
47	-0.0085228	-0.0020729	-0.0916833	-0.0160166	-0.1423522
49	-0.0063459	-0.0006691	-0.0894172	-0.0485280	-0.2664489
51	-0.0050672	-0.0008715	-0.0844462	-0.0432850	-0.1212605
53	-0.0061314	-0.0010524	-0.0773278	-0.0626125	-0.2118292
55	-0.0020781	-0.0007221	-0.0685847	-0.0499519	-0.1049516
57	-0.0048948	-0.0009129	-0.0587030	-0.0680573	-0.1120397
59	0.0001328	-0.0000864	-0.0481290	-0.0595298	-0.0871630
61	-0.0027876	-0.0013577	-0.0372669	-0.0524207	0.0098802
63	0.0012476	0.0005318	-0.0264766	-0.0648734	-0.0522099
65	-0.0000689	-0.0009121	-0.0160720	-0.0419328	0.1196762
67	0.0015319	0.0000340	-0.0063196	-0.0499032	0.0138712
69	0.0024154	0.0000302	0.0025618	-0.0353548	0.1935285
71	0.0016312	-0.0001207	0.0104009	-0.0358738	0.1059849
73	0.0040410	0.0001632	0.0170729	-0.0185272	0.2247412
75	0.0017846	0.0001170	0.0224976	-0.0230445	0.2079043
77	0.0046476	0.0004922	0.0266371	-0.0090983	0.2160108
79	0.0021010	-0.0002374	0.0294930	0.0000564	0.2943153
81	0.0041792	0.0009483	0.0311021	-0.0049358	0.1863925
83	0.0025794	-0.0001277	0.0315332	0.0143024	0.3304453

85	0.0029631	0.0004941	0.0308817	0.0090060	0.1586694
87	0.0028540	0.0004625	0.0292654	0.0184317	0.2983736
89	0.0015808	0.0001875	0.0268194	0.0176115	0.1370905
91	0.0026396	0.0003638	0.0236912	0.0267339	0.2034135
93	0.0003805	0.0003048	0.0200357	0.0194137	0.1179798
95	0.0019102	0.0003743	0.0160105	0.0266114	0.0616573
97	-0.0004245	-0.0001361	0.0117713	0.0275328	0.0897686
99	0.0007127	0.0006752	0.0074681	0.0184279	-0.0896725
101	-0.0007629	-0.0002653	0.0032410	0.0283435	0.0269352
103	-0.0006743	0.0002008	-0.0007823	0.0181438	-0.2083310
105	-0.0008561	0.0001716	-0.0044901	0.0195610	-0.0775414
107	-0.0018272	-0.0001747	-0.0077880	0.0149351	-0.2786271
109	-0.0009328	-0.0000062	-0.0106004	0.0163886	-0.2065131
111	-0.0024996	-0.0000185	-0.0128718	0.0061203	-0.2956607
113	-0.0010831	-0.0000918	-0.0145671	0.0092978	-0.3393314
115	-0.0025830	-0.0004124	-0.0156705	0.0058907	-0.2673038
117	-0.0013522	0.0002791	-0.0161857	-0.0036680	-0.4327518
119	-0.0021105	-0.0005696	-0.0161341	0.0034288	-0.2300879
121	-0.0016271	-0.0000922	-0.0155528	-0.0064466	-0.4393485
123	-0.0013438	-0.0000423	-0.0144933	-0.0059525	-0.2020347
125	-0.0016878	-0.0004097	-0.0130184	-0.0081578	-0.3547939
127	-0.0005638	-0.0001584	-0.0112000	-0.0070637	-0.1741829
129	-0.0014285	-0.0000679	-0.0091164	-0.0143703	-0.1865341
131	0.0000562	-0.0002267	-0.0068497	-0.0084908	-0.1474842
133	-0.0008383	-0.0003768	-0.0044830	-0.0105865	0.0450173
135	0.0004071	0.0003402	-0.0020978	-0.0159472	-0.0882726
137	-0.0000030	-0.0005441	0.0002281	-0.0064894	0.2643446
139	0.0005297	0.0000408	0.0024234	-0.0131865	0.0566089
141	0.0008402	0.0001702	0.0044242	-0.0106074	0.4261913
143	0.0005780	-0.0003108	0.0061761	-0.0083445	0.2660577
145	0.0014600	0.0000522	0.0076355	-0.0067655	0.5383788
147	0.0006534	0.0002644	0.0087701	-0.0115001	0.5267053
149	0.0017306	-0.0001349	0.0095593	-0.0020808	0.5486158
151	0.0008034	-0.0001425	0.0099945	-0.0058884	0.8600152
153	0.0016062	0.0008340	0.0100786	-0.0086675	0.4792470
155	0.0010116	-0.0007300	0.0098256	0.0026661	1.0978036
157	0.0011792	0.0005514	0.0092594	-0.0080212	0.5663068
159	0.0011515	0.0011515	0.0084126	-0.0033613	

[2] 荷重項  $f(\sigma)$ ,  $E_n$  の計算

第3.2項に述べたように左右両端面に作用する分布荷重を有限個の和におきかえて荷重項を計算する。図3(a)の太字で示した二対の集中荷重  $p_0$  に対する  $f(s)$  は

$$f(s) = i \int_0^s (p_x + ip_y) ds = i \int_0^s p_0 ds$$

$$= \begin{cases} ip_0, & (s_1 < s < l - s_1) \\ -ip_0, & (l - s_1 < s < 2l - s_1) \\ 0, & \end{cases}$$

$$\text{従って } f(\theta) = \begin{cases} ip_0, & (\theta_0 < \theta < \pi - \theta_0) \\ -ip_0, & (\pi + \theta_0 < \theta < 2\pi - \theta_0) \\ 0, & \end{cases} \quad (31)$$

図5は  $f(s)$  もしくは  $f(\theta)$  を図に示したものである。(19)式に  $f$  を代入して

$$E_n = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{\theta_0}^{\pi - \theta_0} ip_0 e^{-in\theta} d\theta + \int_{\pi + \theta_0}^{2\pi - \theta_0} (-ip_0) e^{-in\theta} d\theta \right\} = \begin{cases} \frac{2p_0}{n\pi} \cos n\theta_0, & (n : \text{奇数}) \\ 0, & (n : \text{偶数}) \end{cases} \quad (32)$$

なお  $\varphi(\zeta)$ ,  $\varphi'(\zeta)$ ,  $\varphi''(\zeta)$  は(24)式をもとに計算するため、右辺第1項より導いた次式などが使用される

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0} \frac{f(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\sigma_0}^{-\sigma_0} \frac{ip_0}{\sigma - \zeta} d\sigma + \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} \frac{-ip_0}{\sigma - \zeta} d\sigma \right\} = \frac{p_0}{2\pi} \left\{ \ln \frac{-\bar{\sigma}_0 - \zeta}{\sigma_0 - \zeta} - \ln \frac{\bar{\sigma}_0 - \zeta}{-\sigma_0 - \zeta} \right\},$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0} \frac{f(\sigma)}{(\sigma - \zeta)^2} d\sigma = \frac{p_0}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\bar{\sigma}_0 + \zeta} + \frac{1}{\sigma_0 - \zeta} + \frac{1}{\bar{\sigma}_0 - \zeta} + \frac{1}{\sigma_0 + \zeta} \right\},$$

.....

本計算では分布荷重を、各端面に20個の集中荷重の和でおきかえて計算している。 $E_n$  の値を表1にかゝげた。

[3]  $\varphi(\zeta)$  と縁応力

(30)式の  $\sigma_i$  から導いた  $d_i$ , (32)式よりの  $E_i$  を(23)式に代入し、反復法を用いて  $a_i$  を求めた(表1)。縁応力とくに隅角部附近の応力状態を計算するために第3.4項に述べたように、それぞれの  $\theta$  に対して、 $\theta$  曲線にそうて

$$\rho = 0.86, 0.89, 0.92, 0.95, 0.965, 0.98$$

における  $(\sigma_0)_c$ —(7)式—を計算し、それをグラフに示したものが図6である。本図より  $\rho = 1$  における  $(\sigma_0)_c$  を外挿し図7に示した。

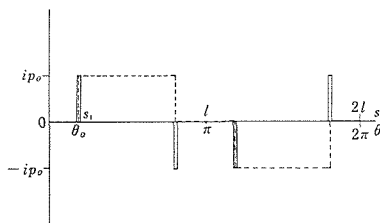


図5 二対の集中荷重に対する  $f(s)$

当然隅角部では  $(\sigma_\theta)_c$  は無限大になり、少しはなれると急速に減少する、荷重辺近くで  $p_0=1$  より減少しているのは集中荷重におきかえたための影響が現われたものと思はれる。

[4]  $\phi(\zeta)$  と対称軸上の応力

$\varphi(\zeta)$  は (24) 式,  $\psi(\zeta)$  は (26) 式を用い (6) 式によって, 対称軸上 ( $\theta = 0^\circ, 90^\circ$ ) の応力を計算し図7に示した.  $x$  軸上の  $\sigma_y$  は極めて小さく, 荷重辺近くなると前記と同様の影響が現われている。

[5] 実験値との比較

隅角部が直角の場合と円形の丸みをつけた場合を, 同時に実験するための試験片の形状とゲージの貼付位置を図8に示した。

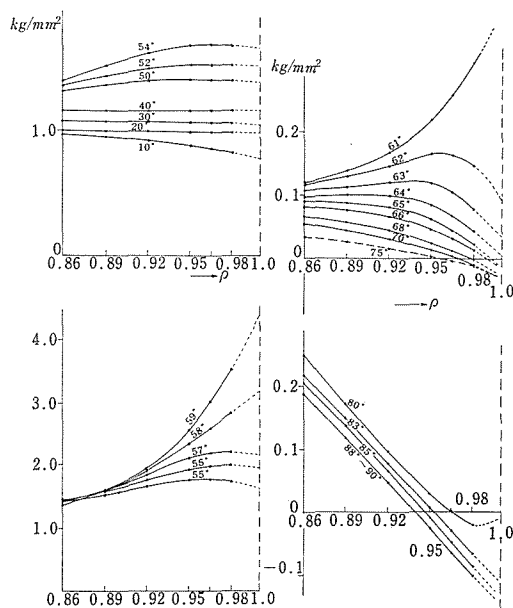


図6 縁応力の計算用グラフ

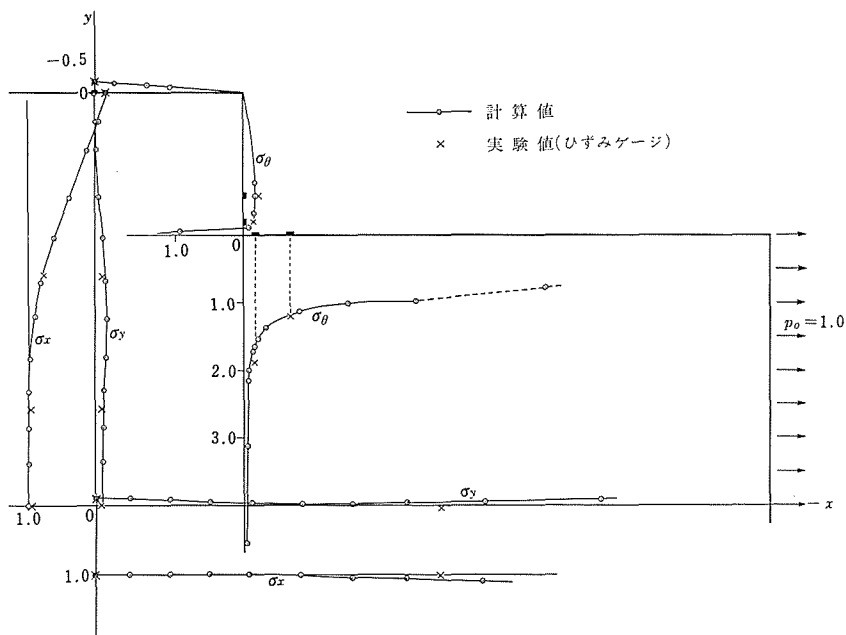


図7 縁応力と対称軸上の応力

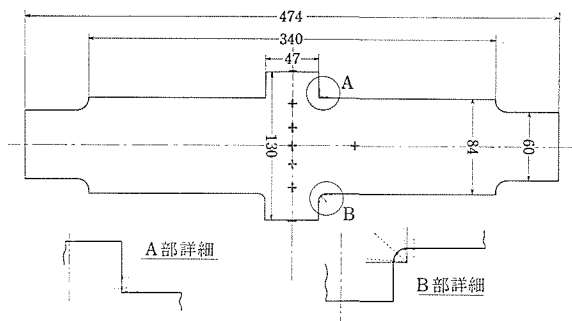


図8 試験片形状

この程度の丸みではほとんど対称性を損なわないことを、予備実験でたしかめてから測定を始めている。

実験値は図7に×印をつけて示した。それによると理論による数値計算は、実験値とよく一致していて数値計算の妥当なことが確かめられた。

#### 4.2 隅角部を丸めた上記帯板の引張り

第3.1項の隅を丸める手法を用いて、隅角 ( $\theta = 60^\circ$ ) の前後  $\theta = 50^\circ \sim 70^\circ$  の間を丸めた。写像函数は前記帯板の場合と同じく、項数80にとり、 $\zeta$  平面上の単位円に対応する  $z$  平面上の図形を、隅角部の詳細と共に図9に示した。

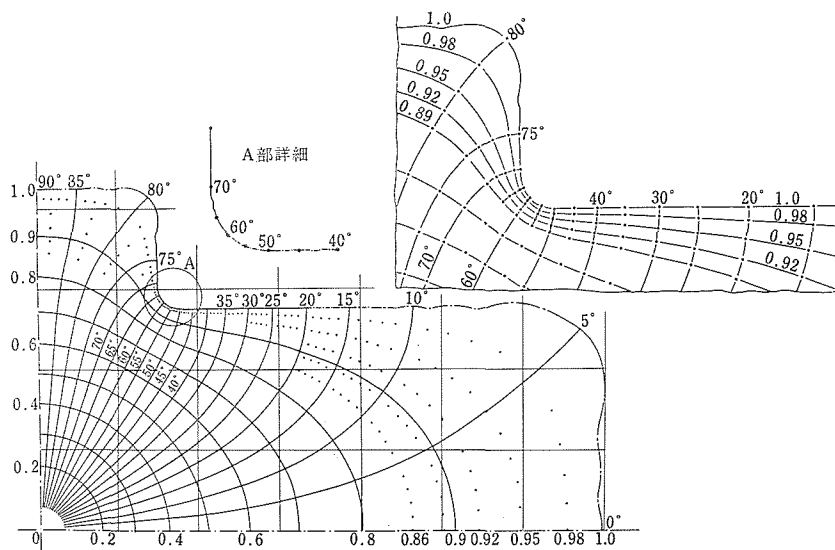


図9 隅角部を丸めた帯板の座標曲線

縁応力, 対称軸上の応力を求める手法は第 4.1 項と全く同じであるため省略し, 結果のみをかゝげることとする.

図10: 縁応力を求めるため, 縁より内側の応力から外挿するためのグラフ.

図11: 数値計算による縁応力の分布. ×印はひずみゲージによる実験値で参考のため記入したもので, 数値計算とのくいちがいは写像曲線の丸みが円形でないためである. 対称軸上の応力は第 4.1 項図7と同じであるため省略した.

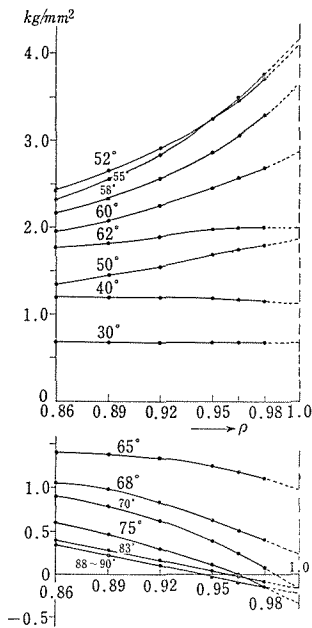


図10 縁応力の計算用グラフ

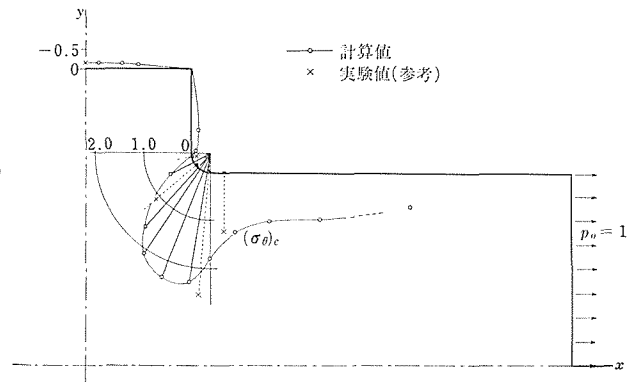


図11 縁応力分布 (実験値は参考)

## 5. あとがき

有限領域を占める弾性体の平面応力問題を解くために, 複素応力函数  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  を用い, 写像函数が多項式で表わされた場合について検討した. 問題点には若干の工夫を加え, 直線部分で囲まれた領域および隅を丸めたときの, 平面応力を計算するためのプログラムを作成し“引張りをうける長方形出張りのある有限帯板”に適用し, つぎの事項についていくつかの結論を得た.

- (1) 写像函数を多項式に変形し, その係数を計算するためのプログラムを作成した. これを用いて多項式の項数の多少と写像曲線の形状についてしらべた.
- (2) 分布荷重を集中荷重の重ね合せにおきかえて計算した結果, 荷重辺附近を除いては応力計算に差支えないことが分った.
- (3)  $\varphi(z)$  を定めるには  $m$  元連立一次方程式を解かねばならないが, 元数を半減した  $m/2$  元連立一次方程式を誘導して計算時間を短縮することができた.

(4) 応力集中に関係のある縁応力を, (7) 式から直接計算すると変動する値が得られるので, 境界に近い内部の値から外挿して求めた. (この方法は誤差が免れないため, 応力分布の概要を知るには差支えないが, 精度の高い応力集中係数などを求めるには不適当である. そのためには応力集中部で滑らかな境界が得られるよう, 写像函数を改善する<sup>(4)</sup>必要がある)

(5) (24), (26) 式による  $\phi(\zeta)$ ,  $\psi(\zeta)$  を用いて, 領域内部の応力を計算することができた.

(6) 上記の応力の計算値は, ひずみゲージによる実験値と殆んど一致し, この計算法の妥当さが確かめられた.

本研究は, 表題について, より簡潔な解法への一つの過程として得られた幾つかの結果を報告したもので, 参考文献中とくに論文 (3) の記号, 計算を参考にしたこと, 上記のプログラム作成と計算例について数値計算をされた岸下晴亮君 (奈良工高専)<sup>(8)</sup>, 資料の整理実験に協力された志摩政幸君 (修士2年) に深く感謝するものである.

計算には京都大学大型電子計算機を使用した.

## 参 考 文 献

- (1) N. I. Muskhelishvili: Some basic problems of the math. theory of elasticity.  
P. Noordhoff (1953). ZAMM, Bd. 13. Aug. (1933) 264.
- (2) G. N. Savin: Stress concentration around holes, Pergamon Press (1961).
- (3) 渋谷成一・中原一郎: 中央集中荷重をうける短い単純支持はり.  
機械学会論文集 第32巻237号 (1967) 700.  
斉藤秀雄: 周辺に荷重をうける正多角形板内の応力分布について.  
機械学会論文集 第18巻48号 (1952) 15.  
CA. M. Gray: Polynomial Approximations in Plane Elastic Problems,  
Quart. J. Mech. and Appl. Math. Vol. V (1951) 444.
- (4) M. KIKUKAWA: On Plane-Stress Problems in Domains of Arbitrary Profiles.  
1<sup>st</sup> report, Proc. 3rd Japan Nat. Congr. Appl. Mech. (1953) 5.  
2<sup>nd</sup> report, Proc. 4th Japan Nat. Congr. Appl. Mech. (1954) 149.
- (5) 野村恭雄: 不連続個所を有する平板の平面応力  
(第1報) 機械学会論文集. 第25巻159号 (1959) 1075.  
(第2報) // // . 第25巻159号 (1959) 1084.
- (6) 中原一郎・笹野浩: Schwarz 変換によってかどに円弧で丸みをつけた正多角形断面棒のねじり.  
第32期定時総会講演会前刷 講演番号117 (1955)
- (7) L. V. Kantorovich and V. I. Krylov: Approximate methods of higher analysis,  
P. Noordhoff (1964) 523.
- (8) 佐々木三郎・岸下晴亮: 出張りのある帯板などの平面応力.  
第230回関西支部講演会前刷 講演番号302 (1973)



### Summary

#### **On the Numerical Analysis of Plane Elastic Problems using the Functions of Complex Variables**

—In the case of a finite and simply connected region—

Saburo SASAKI

(Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering)

Many papers have been published on the method to solve the plane elastic problems using the functions of complex variables, but there are few papers on the numerical treatments to the problems in the case of a finite and simply connected region.

This report deals with the difficulties of the method to solve the above problems and proposed the improvements of some points, such as reducing the number of the unknown quantities of simultaneous equations to half and extrapolating the circumferential stresses at the edge of the area from the state of stress in the neighbourhood of it.

Then the above numerical methods are applied to the example of “the stresses of the finite strip having the rectangular projection on both sides in tension” and the results of the numerical solutions themselves to be in good agreement with the experimental results obtained by the strain gage method.