

相関関数による歪率のデジタル測定

柳沢武三郎*・降旗建治**

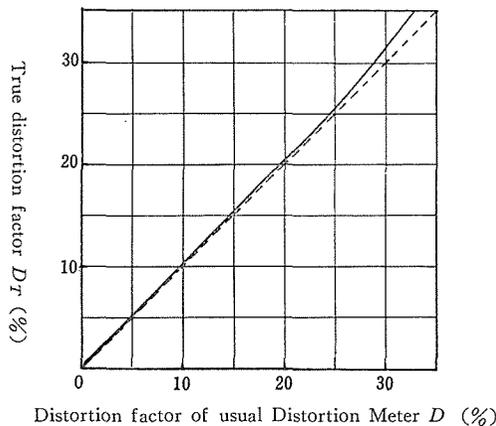
(昭和48年5月4日受理)

1. 緒 言

現在、歪率の測定はウィーンブリッジ等による基本波除去方式で行なわれている。この種のアナログ式歪率計では、非正弦周期波形の実効値とその高調波だけの実効値との百分率を歪率 D として指示するので真の歪率が測定できない。すなわち、図1に示すように真の歪率 D_T に対して必然的に測定誤差が含まれている。さらに、ブリッジを用いるために、周波数微同調とバランス微調整、および測定中に指示値が変動してしまふ不安定さなどが問題となり、測定精度の確認が困難である。

歪率のアナログ測定に関連した測定精度や諸問題を解決する方法として、歪率のデジタル測定が考えられる。歪率をデジタル測定するためには、フーリエ級数または相関関数に基づく二通りの方法が考えられる。

フーリエ級数を用いる方法では、非正弦周期波形の基本波および高調波の実効値を求めるのに、その基本波と高調波次数に相当する回数だけ同様のデジタル演算を繰返す必要



$$D = \frac{\sqrt{E_2^2 + E_3^2 + \dots}}{\sqrt{E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 + \dots}} \times 100 (\%) \quad D_T = \frac{\sqrt{E_2^2 + E_3^2 + \dots}}{E_1} \times 100 (\%)$$

図1 $D-D_T$ 曲線

* 電子工学教室 教授

** 電子工学教室 助手

がある。また、被測定波に雑音が含まれていれば、測定誤差の原因となる。

これに対して、相関関数を用いる方法では、非正弦周期波形の基本波および高調波の実効値が相互相関関数と自己相関関数との二回のデジタル演算ですみ、さらに、被測定波に雑音が含まれていても、相関関数の性質によってその雑音の影響が除去でき、逆に雑音の性質を利用することによって丸めの誤差を少なくすることができるなどの大きな利点がある。

本論文は、相関関数による歪率のデジタル測定を可能にするために、相関関数によって歪率を定義し、それに基づく測定法を考察し、その測定精度を検討したものである。

2. 相関関数による歪率の定義

一般に真の歪率 D_T は非正弦周期波形の高調波成分 $E_n(n = 2, 3, \dots)$ の二乗和の平方根と基本波成分 E_1 との百分率、すなわち

$$D_T = \frac{\sqrt{E_2^2 + E_3^2 + \dots + E_n^2 + \dots}}{E_1} \times 100 (\%), \quad (1)$$

で与えられる。

したがって、(1) 式を得るためには非正弦周期波形の実効値と基本波実効値を抽出しなければならない。

2-1 非正弦周期波形の実効値

一般に、ランダム雑音 $N_1(t)$ の含まれた正弦波入力

$$e_i(t) = \sqrt{2} \cdot E_i \sin(\omega t - \theta_i) + N_1(t), \quad (2)$$

に対する、非直線特性を有する伝送系の出力波形は

$$e_0(t) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin(n\omega t - \theta_{0n}) + N_2(t), \quad (3)$$

なる非正弦周期波形とランダム雑音 $N_2(t)$ の和で表わされる。

出力波形 $e_0(t)$ の自己相関関数は、三角関数の直交性より

$$\varphi_{00}(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n^2 \cos(n\omega\tau) + \varphi_{N_2}(\tau), \quad (4)$$

で与えられる。ここで、 $\varphi_{N_2}(\tau)$ はランダム雑音 $N_2(t)$ の自己相関関数である。ランダム雑音の性質から $\varphi_{N_2}(\tau)$ は、図2に示すように遅延時間 $\tau = 0$ の近傍で高い相関値を持つだけである。

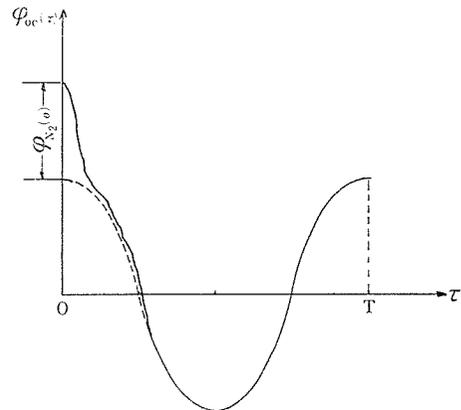


図2 ランダム雑音を含む非正弦周期波形の自己相関関数

したがって、出力 $e_0(t)$ の非正弦周期波形の周期を T とおき、遅延時間を $\tau = mT$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) とすると、(4) 式の自己相関関数は

$$\varphi_{00}(mT) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n^2, \quad (5)$$

ここで、 $T = 2\pi/\omega$

となる。

(5) 式から、出力波形 $e_0(t)$ の自己相関関数 $\varphi_{00}(mT)$ を求めれば、ランダム雑音成分が除かれた非正弦周期波形の実効値の二乗が抽出できる。

2-2 基本波の実効値

伝送系の出力 $e_0(t)$ と入力 $e_i(t)$ との相互相関関数は

$$\varphi_{0i}(\tau) = E_i \cdot E_1 \cos(\omega\tau + \theta_i - \theta_{01}) + \varphi_{N_1N_2}(\tau), \quad (6)$$

で与えられる。ここで、 $\varphi_{N_1N_2}(\tau)$ はランダム雑音 $N_1(t)$ と $N_2(t)$ との相互相関関数である。相互相関関数 $\varphi_{N_1N_2}(\tau)$ は、遅延時間 τ を考慮すれば、ランダム雑音 $N_1(t)$ と $N_2(t)$ とが独立とみなせるので、相関関数の性質より零となる。

(6) 式から明らかなように、相対位相差 $(\theta_i - \theta_{01})$ がわからなければ、基本波実効値 E_1 は抽出できない。しかし

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \quad (7)$$

なる関係を用いれば基本波が抽出できる。

そのために、(6) 式の相互相関関数 $\varphi_{0i}(\tau)$ の遅延時間 τ を $T/4$ だけかえた相互相関関数

$$\varphi_{0i}\left(\tau - \frac{T}{4}\right) = E_i \cdot E_1 \sin(\omega\tau + \theta_i - \theta_{01}), \quad (8)$$

を求める。

(6) 式と (8) 式は (7) 式の関係より

$$\varphi_{0i}^2(\tau) + \varphi_{0i}^2\left(\tau - \frac{T}{4}\right) = E_i^2 \cdot E_1^2, \quad (9)$$

となる。

(9) 式から、ランダム雑音の影響が除去された非正弦周期波形の基本波実効値 E_1 が抽出できる。

2-3 歪率の定義

一般に、伝送系の正弦波入力 $e_i(t)$ と出力 $e_0(t)$ にランダム雑音が含まれている場合、2-1 節でのべた (5) 式の出力波形 $e_0(t)$ の自己相関関数と 2-2 節でのべた (9) 式の伝送系入出力の相互相関関数とによって、(1) 式の歪率は

$$D_T = \sqrt{\frac{\varphi_{00}(mT) \cdot E_i^2}{\varphi_{0i}^2(\tau) + \varphi_{0i}^2\left(\tau - \frac{T}{4}\right)}} - 1 \times 100 (\%), \quad (10)$$

と定義し直される。

3. 相関関数による歪率の測定方法

2-3 節で相関関数によって定義し直された (10) 式の歪率を求めるためには、図 3 に示す測定原理に基づいて演算を行なう必要がある。特に、相関関数の性質を利用してランダム雑音の影響を除去するために、遅延時間装置が必要となる。

相関関数による歪率の測定方法として、アナログ方式による場合も可能であるが、測定

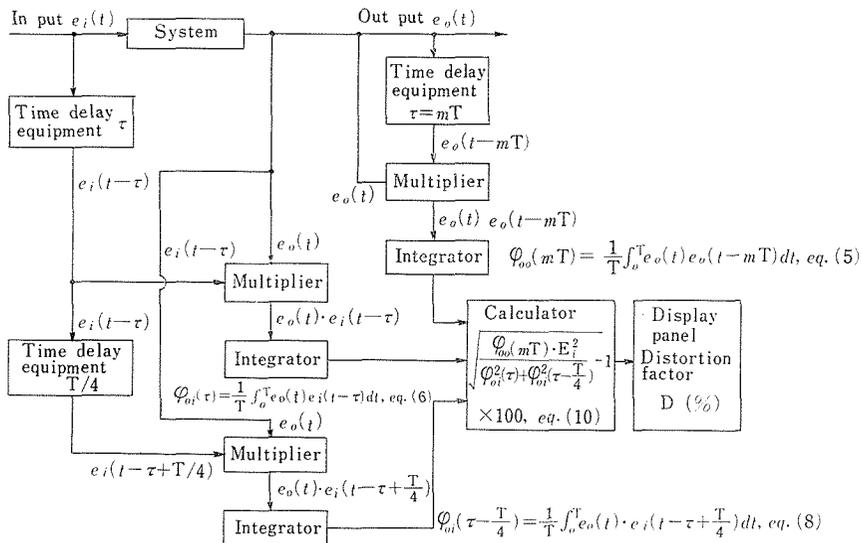


図 3 相関関数による歪率の測定原理

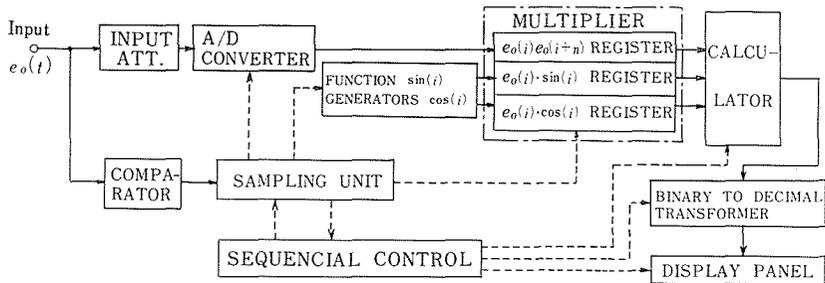


図 4 デジタル歪率計のブロック図

精度の安定性、相関関数の演算の容易さから考えて、本論文ではデジタル方式による場合について検討する。

3-1 専用計算機による場合

図3の測定原理に基づくデジタル歪率計として、図4に示すような専用計算機構成が考えられる。

この専用計算機では、正弦波入力 $e_i(t)$ に相当する正・余弦波の関数発生器が必要である。

なお、図4に示す歪率の専用計算機に相当する構成は、ミニ・コンピュータ等を利用することによっても可能となる。

この場合は、伝送系の出力波形 $e_o(t)$ を何らかの方法で読み取り、そのデータを紙テープ等に穿孔して汎用の電子計算機によって、(10)式の相関関数によって定義された歪率を演算する方法である。

われわれは、この方法により、X-Yレコーダに記録された波形 $e_o(t)$ を人為的に読み取り、そのデータを紙テープに穿孔して図5に示すフローチャートにより電子計算機(FACOM231)で演算を行なった(5節の実測例)。

以上検討してきた相関関数による歪率のデジタル測定法の分析精度は、伝送系出力 $e_o(t)$ の横軸 t の分割数と縦軸の分割程度、すなわち、非正弦周期波形の周期内の等分点数と丸めの誤差によって一義的に決定される。

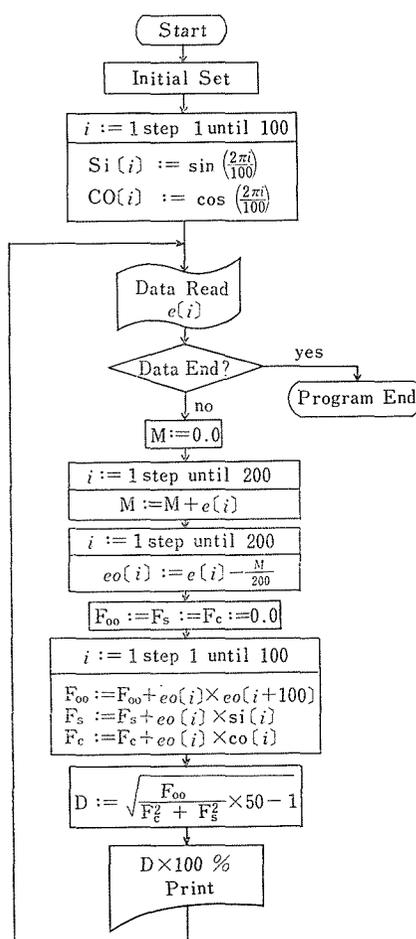


図5 歪率のデジタル測定のためのフローチャート

4. 相関関数による歪率のデジタル演算精度

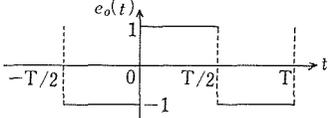
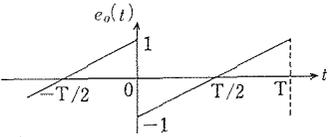
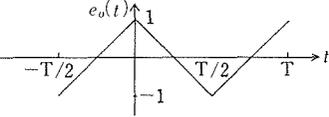
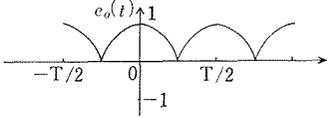
2節でのべた、(5)式の伝送系出力 $e_o(t)$ の自己相関関数 $\varphi_{oo}(mT)$ および(6)式の伝送系入出力の相互相関関数 $\varphi_{oi}(\tau)$ は、数値積分法に基づく台形公式あるいはシンプソンの第一公式による近似式で与えられる。

実際の伝送系の非直線特性から推定して、フーリエ級数展開したとき無限級数で表わされるような、表1に示す極端な非正弦周期波形(矩形波、鋸歯状波、三角波、全波整流波)をモデル波形として、相関関数による歪率のデジタル演算精度を検討すれば、実際の歪波にも演繹できるものと考えられる。

4-1 非正弦周期波形の周期内の等分点数

モデル波形の周期内の等分点数と(10)式の相関関数によって定義された歪率の数値

表1 モデル波形

| Equations of model waves | Wave forms and expansion equations |
|---|---|
| Rectangular wave $e_0(t) = +1$ $(0 < t < T/2)$ $= -1$ $(T/2 < t < T)$ |  $e_0(t) = \frac{4}{\pi} \left[\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3 \omega t + \frac{1}{5} \sin 5 \omega t + \dots + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{2n-1} \sin (2n-1) \omega t + \dots \right]$ |
| Saw-toothed wave $e_0(t) = \frac{1}{\pi} \omega t - 1$ $(0 < t < T)$ |  $e_0(t) = -\frac{2}{\pi} \left[\sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2 \omega t + \frac{1}{3} \sin 3 \omega t + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{n} \sin n \omega t + \dots \right]$ |
| Triangular wave $e_0(t) = 1 - \frac{2}{\pi} \omega t$ $(0 < t < T/2)$ |  $e_0(t) = \frac{8}{\pi^2} \left[\cos \omega t + \frac{1}{9} \cos 3 \omega t + \frac{1}{25} \cos 5 \omega t + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{(2n-1)^2} \cos (2n-1) \omega t + \dots \right]$ |
| Full wave rectified wave $e_0(t) = \cos \omega t $ |  $e_0(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{3} \cos 2 \omega t - \frac{1}{15} \cos 4 \omega t \right. \\ \left. + \frac{1}{35} \cos 6 \omega t + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} \cos 2n \omega t + \dots \right]$ |

積分に基づく計算誤差との関係を求めた。そのデジタル演算過程において、丸めの誤差が無視できるように、有効数字を10桁として行なった。図6に台形公式に基づく結果を示し、図7にシンプソンの第一公式に基づく結果を示す。ここで、以下計算誤差は真の歪率と計算された歪率との差の絶対値で示す。

その結果、モデル波形の周期内の等分点数の増加にともなう歪率の計算誤差は、図6と図7から明らかのように、周期内に不連続点を持たない鋸歯状波だけが単調に収斂し、他の不連続点を持つモデル波形（矩形波、三角波、全波整流波）では減衰振動しながら収斂

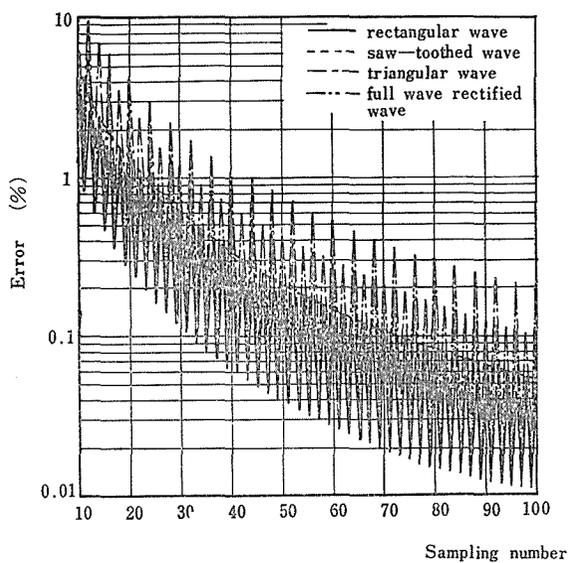


図6 モデル波形に対する，台形公式に基づく周期内の等分点数と歪率の計算誤差との関係

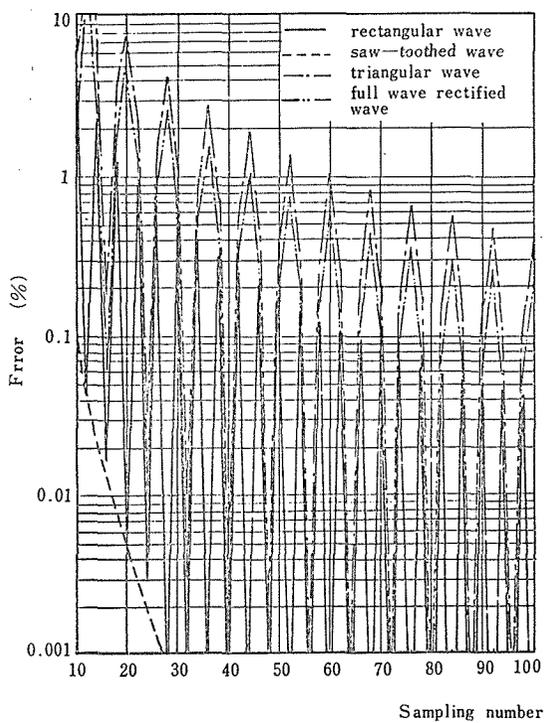


図7 モデル波形に対する，シンプソンの第一公式に基づく周期内の等分点数と歪率の計算誤差との関係

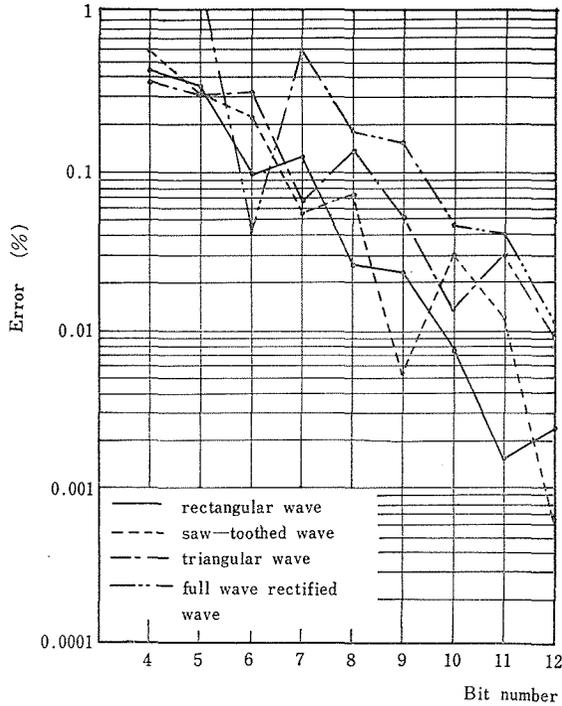


図8 モデル波形に対する歪率の量子化誤差

している。それらの歪率の計算誤差が減衰振動する原因は、図6の台形公式の場合、周期内の等分点が不連続点を含むか含まないかによって、それらのモデル波形の自己相関関数の計算誤差が変動するためである。図7のシンプソンの第一公式の場合、不連続点を持つモデル波形の自己相関関数の計算誤差が不連続点でのシンプソンの乗係数が2か4かによって変動するためである。

たとえば、歪率を0.1%程度の精度で分析するためには、図6の台形公式の場合、周期内の等分点数が100点必要となり、図7のシンプソンの第一公式の場合、周期内の等分点数が100点以上必要になる。このことから、実際の非直線特性を有する伝送系出力の非正弦周期波形に対して、相関関数による歪率のデジタル演算を0.1%以下の分析精度で行なうためには、相関関数を数値積分に基づく台形公式で演算を行ない、周期内の等分点数を100点とればよいであろう。

4-2 丸めの誤差

モデル波形について、相関関数による歪率のデジタル演算を台形公式に基づいて、周期内の等分点数を100点として行ない、その演算過程における丸めの誤差、すなわち正負の極性弁別を含めない量子化のビット数に対する歪率の計算誤差を求めた。その結果を図8に示す。図8から明らかなように、歪率の分析精度を0.1%以下とするためには、量子化を10ビットとる必要がある。

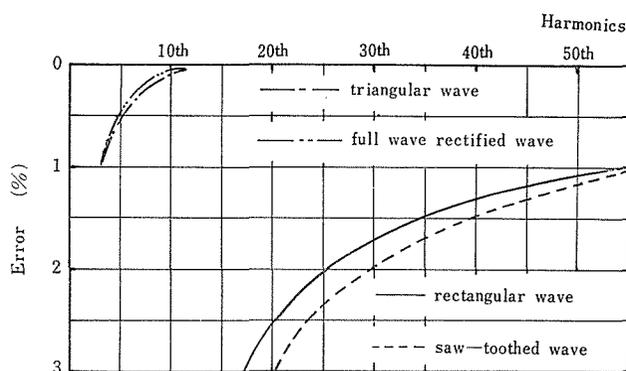


図9 モデル波形に対する高調波次数と歪率の計算誤差との関係

この場合、10ビットもの量子化が必要になる原因は、正弦波などの振幅分布の特性関数が収斂しないことにある。それゆえ、伝送系の入出力波にそれぞれ独立な雑音を重畳させ、それらの振幅分布の特性関数を収斂させれば量子化が少なくてすむ。特に、量子の大きさに等しい矩形振幅分布をもつ雑音が信号に重畳された場合は、ある程度の量子化を行なえば量子化に起因する相関関数の演算誤差がまったく除去されることが理論的に明らかにされている¹⁾。

このことから、相関関数による歪率のデジタル測定の際には、被測定波および計算機内で関数発生させる正・余弦波のそれぞれに独立なランダム雑音を重畳させて演算を行なえば、量子化が少なくても丸めの誤差を小さくすることが可能である。

4-3 モデル波形の高調波次数と(1)式による歪率の計算誤差との関係

モデル波形の高調波次数と(1)式による歪率の計算誤差との関係を求めた。その結果を図9に示す。

図9から明らかなように、高調波次数の増加にともなって歪率の計算誤差は、三角波と全波整流波が急速に収斂し、矩形波と鋸歯状波が緩慢に収斂している。三角波と全波整流波の高調波成分が n^{-2} のオーダーで減少しており、歪率を0.1%の精度で求めるのに必要な高調波成分は、それぞれ第9次高調波と第7次高調波まででよい。それに対し、矩形波と鋸歯状波の高調波成分が n^{-1} のオーダーで減少しているため、歪率を0.1%の精度で求めるのに必要な高調波成分は、それぞれ第499次高調波と第600次高調波まで必要とする。

このことから、矩形波と鋸歯状波の場合、フーリエ級数を用いる方法では、かなりの等分点数が必要になる。ところが、相関関数を用いる方法では、4-1節でのべたように、モデル波形の高調波成分の収斂状態に関係なく、周期内の等分点数を100点とれば、それらの歪率が0.1%以下の精度で分析できることが明らかにされた。

5. 実 測 例

われわれは、3-2節で述べた汎用の電子計算機による方法で、表2に示す正弦波の両波頭および片波頭がクリップされた非正弦周期波形について実測した。正弦波の両波頭お

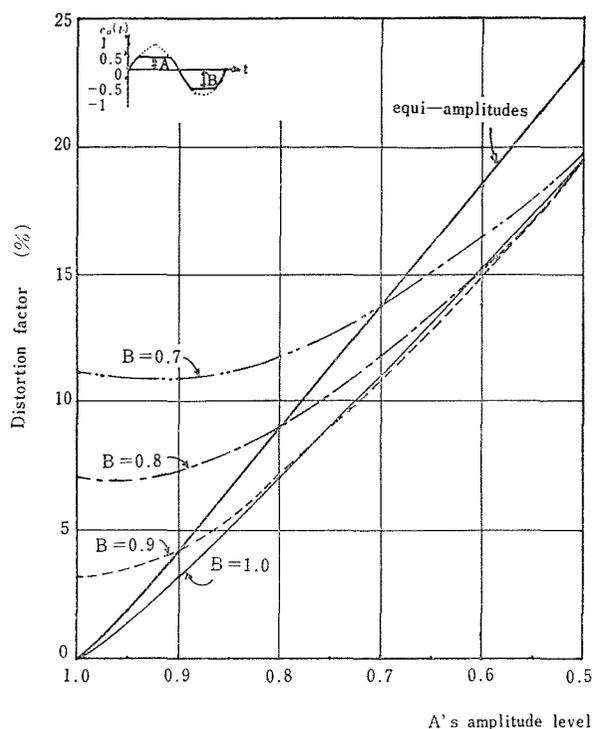


図10 正弦波のクリッピング波形の理論的歪率

よび片波頭のクリッピング波形の真の歪率は、(1)式に示す従来の歪率の定義より求められ図10に示すようになる。その真の歪率に対する、(10)式の相関関数による歪率の定義に基づくデジタル測定誤差と従来のアナログ式歪率計の測定誤差との比較検討を行なった。

実測に先立って、正弦波の両波頭および片波頭のクリッピング波形について、周期内の等分点数と相関関数による歪率の台形公式に基づく計算誤差を求めた。その計算誤差の最大値を図11に示す。

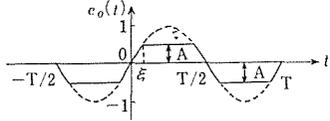
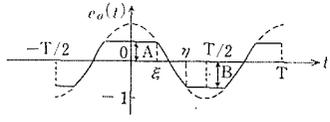
その結果、図11から明らかなように、正弦波のいかなるクリッピング波形でも、等分点数を70点とれば、歪率が0.1%以下の分析精度でデジタル測定できることが確認され、4-1節で結論された、非正弦周期波形の周期内の等分点数を100点とする正当性が検討された。

実測に際して、正弦波の両波頭および片波頭のクリッピング波形は、ダイオードによるレベル・クリッピング回路を用いてつくり、測定周波数を400Hzとした。

従来のアナログ式測定には、測定範囲が30%~0.1%で、指示誤差がフルスケールの5%以内である歪率計(NF MODEL DM-152)を用いた。同時に、そのクリッピング波形をデジタルメモリー(biomation MODEL 610)に記憶させ、X-Yレコーダで記録した。

X-Yレコーダに記録された発振器出力の正弦波について、人為的に周期内に100点の等

表2 正弦波のクリッピング波形

| Equations of clipping waves | Wave forms and expansion equations |
|--|--|
| <p>Equi-amplitudes clipping wave</p> $e_0(t) = \sin \omega t$ $(0 \leq t \leq \xi)$ $(T/2 - \xi \leq t \leq T/2 + \xi)$ $(T - \xi \leq t \leq T)$ $= A$ $(\xi \leq t \leq T/2 - \xi)$ $= -A$ $(T/2 + \xi \leq t \leq T - \xi)$ |  $e_0(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1} \sin(2n+1)\omega t$ $a_{2n+1} = \frac{\sin 2n\omega\xi}{n\pi} - \frac{\sin 2(n+1)\omega\xi}{(n+1)\pi} + \frac{4A \cos(2n+1)\omega\xi}{(2n+1)\pi}$ |
| <p>Unequal-amplitudes clipping wave</p> $e_0(t) = \cos \omega t$ $(\xi \leq t \leq \eta)$ $(T - \eta \leq t \leq T - \xi)$ $= A$ $(0 \leq t \leq \xi)$ $(T - \xi \leq t \leq T)$ $= -B$ $(\eta \leq t \leq T - \eta)$ |  $e_0(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\omega t$ $b_0 = \frac{1}{\pi} \{A(\omega\xi - 1) + B(\omega\eta - 1 - \pi)\}$ $b_n = \frac{2A}{n\pi} \sin n\omega\xi + \frac{\sin(n-1)\omega\eta - \sin(n-1)\omega\xi}{(n-1)\pi}$ $+ \frac{\sin(n+1)\omega\eta - \sin(n+1)\omega\xi}{(n+1)\pi} + \frac{2B}{n\pi} \sin n\omega\eta$ |

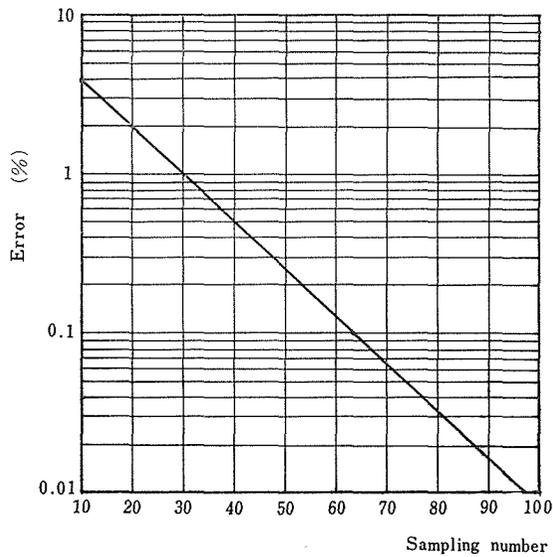


図11 正弦波のクリッピング波形に対する、台形公式に基づく周期内の等分点数と歪率の計算誤差の最大値との関係

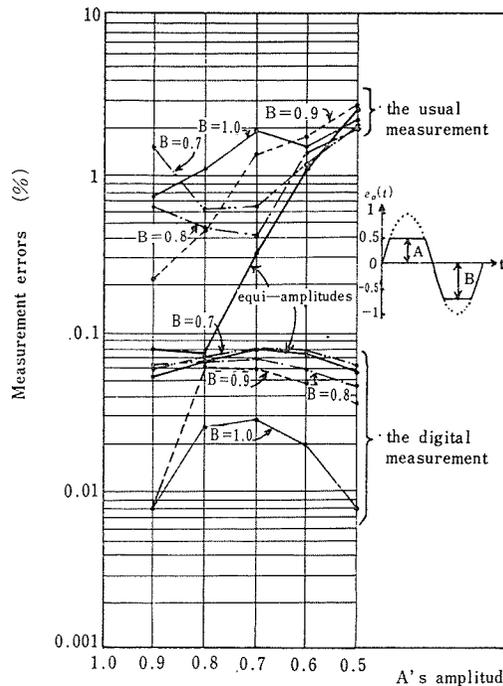


図12 正弦波のクリッピング波形に対する、本方式に基づく測定誤差と従来のアナログ式歪率計の測定誤差との比較

分点を取り、有効数字3桁で読み取りデータを得た。その正弦波について歪率を求めた結果0.29%であった。そのデータを用いて、X-Yレコーダの記録およびブラウン管オシロからクリッピングレベルを読み取り、正弦波の両波頭および片波頭のクリッピング波形の歪率を汎用の電子計算機によって求めた。

それぞれの測定誤差を図12に示す。その結果、相関関数による歪率のデジタル測定では、歪率が4%~25%の範囲で、0.1%以下の精度で測定できることが実験的に検証された。それに比較して、従来のアナログ式歪率計では、同じ発振器の正弦波出力の歪率を測定しても、指示値のふれが0.2~0.6%程度もあり、どの測定値が最良値であるかの判断がむずかしい。また、他のクリッピング波形の場合も、理論値からのずれ、周波数微調整のむずかしさなどによって、慎重に行なっても1%前後の測定誤差が生じた。

6. 結 言

従来の歪率計とは異なる方式による歪率測定が可能であることを理論的に明らかにした。すなわち、相関関数によって、一般的な雑音が含まれている非正弦周期波形について歪率を定義し直した。さらに、相関関数による歪率のデジタル測定法について検討した。その際、歪率の分析精度を0.1%以下とするためには、非正弦周期波形の周期内の等分点数を100点とり、量子化を10ビットとする必要がある。しかし、量子化については、ランダム

雑音の性質を利用すると少なくできることなどについて考察した。

一例として、正弦波の両波頭および片波頭がクリップされた波形について実測した結果、理論の正当性が実験的に検証された。

最後に、この研究を進めるにあたり、電子計算機による計算に際しては米辻栄一君（信大工学部）の協力があつたことを付記する。

文 献

- 1) 磯部孝編：相関関数およびスペクトル・東京大学出版会（1968）425-427

Summary

Digital Measurement of Distortion Factor by Correlation Function

Takesaburo YANAGISAWA and Kenji FURIHATA
(Department of Electronics Engineering, Faculty of Engineering)

In this report, the distortion factor is newly derived by correlation function about the non-sinusoidal periodic waves which contain random noises, and then on the basis of the derived formulation, a digital measurement method of the distortion factor is discussed.

Thereby, it is found that the sampling number of 100 points within a period and the quantization of 10 bits for A-D conversion are necessary for measuring the distortion factor to the precision of 0.1%.

Moreover, the distortion factors of clipped sinusoidal wave forms are measured by the adaptation of this new technique.