

厚み水晶板における純粋平面波と擬似平面波

中 沢 光 男*

(昭和48年5月31日受理)

§1. ま え が き

一般的に、異方性単結晶体内に発生する平面弾性波は三種ある。一つはたて波で、他の二つはよこ波である。これら三つの波の変位は互いに直交することが古く Green によって証明されている。しかし、これら各々の波の伝播方向と変位方向は、必ずしも一致したり、あるいは直交したりするようないわゆる純粋平面波とは限らない。このような純粋平面波に関する研究は Koga^{1)~3)} により初めて行なわれた。特に、 X 板ならびに R_1 板系統の水晶振動子内に発生する純粋波の研究は注目された。後 Sakadi⁴⁾ は、各種の結晶群中を伝播する純粋平面波について抽象的、包括的に研究した。また Borgnis⁵⁾ は Koga の理論を発展させた形で、水晶板内の純粋波に関する具体的研究を進めた。しかし、これらの研究はいずれも、圧電性弾性物質特有の圧電項の影響を考慮していない。これがために、従来圧電性弾性物質において発生する平面波の温度特性に関する厳密な取り扱いに不便を生じてきた。

本研究は以上の点を考慮して、圧電性弾性結晶板の圧電項の影響を厳密に考え、任意の方位における純粋平面波と擬似平面波（純粋平面波でない）の固有値ならびに変位の方向を求める一般方程式を導く。次に応用的に重要な純粋平面波を発生させ得る一般条件式⁶⁾を求める。これらを用いて、特に厚み水晶板に例をとり、純粋平面波を発生させ得る切り出し角度を具体的に、体系的に検討する。さらに、切り出し角度をパラメータにして、純粋ならびに擬似両平面波の変位の傾きを詳しく調べる。要するに、以上のことを総合的に応用して、効果的な厚み水晶板の温度係数⁷⁾が計算出来ることを示そうとするのが本研究の狙いである。

§2. 永年方程式

Fig. 1 のような薄板状圧電性弾性結晶板を考える。この中を平面波が \mathbf{K} 方向（板の主面に垂直方向）に進んでいる場合も考える。 t を時刻、 ρ を質量密度、 x_k を直角座標の k 成分、 u_k は変位ベクトルの k 成

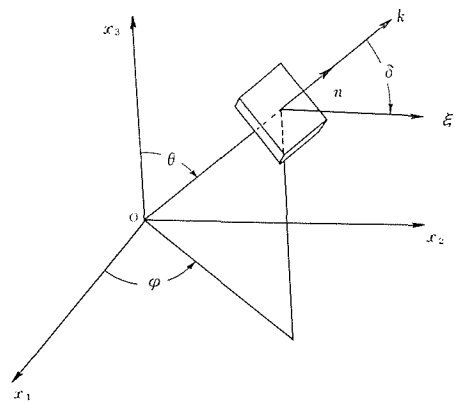


Fig. 1 結晶板の方位と \mathbf{K} , ξ の関係

* 電子工学教室 助教授

分とすれば、満足すべき弾性波動方程式は、

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{1}{2} c^*_{ijkl} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (1)$$

となる。ただし、 c^*_{ijkl} は圧電効果をくりこんだ等価弾性定数で

$$c^*_{ijkl} = c^E_{ijkl} + 4\pi\gamma_n(\varepsilon_{hi}n_h)(n_h\varepsilon_{hkl}) \quad (2)$$

で与えられる。また、式(1)、(2)あるいは以下の式中で、同じ接尾がくり返し続いた場合は1から3までの和をとるものと定義する。

さて、式(2)の c^E_{ijkl} は電場一定での純弾性定数であり、 ε_{hij} は圧電定数、 n_h は単位法線ベクトル n の成分である。また γ_n は歪み一定のときの板の厚み方向の逆電気感受率で

$$\gamma_n = n_q \tilde{\gamma}_{qj} n_j = (n_q k_{qj} n_j)^{-1} \quad (3)$$

で与えられる。ただし、 k_{qj} は歪み一定のときの誘電率テンソル成分である。

式(1)において、 k と l の対称性により、波動方程式は結局、

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c^*_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} \quad (4)$$

となる。式(4)の平面波の解として、変位成分 u_i を

$$u_i = u_i^0 \exp\{j(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\} \quad (5)$$

のように仮定する。ここで、 u_i^0 は変位振巾の i 成分、 \mathbf{K} は波数ベクトル、 \mathbf{r} は座標系の原点から結晶板内の任意の一点までの位置ベクトル、 ω は角周波数、 j は虚数単位 ($\equiv \sqrt{-1}$)。

Fig. 1 より、単位法線ベクトル \mathbf{n} の各成分は、

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \sin\theta \cos\varphi, \\ n_2 &= \sin\theta \sin\varphi, \\ n_3 &= \cos\theta \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

となる。また、結晶板内の任意の点における粒子の変位ベクトル ξ は、

$$|\xi| = \mu_i u_i, \quad \mu_i \mu_i = 1 \quad (7)$$

である。ここに μ_i は、座標軸 x_i に対する ξ の方向余弦である。

式(5)、(7)を式(4)に代入して、 $\mathbf{K} = |\mathbf{K}| \mathbf{n}$ を考えて整理すれば、

$$(c^*_{ijkl} n_j n_k - c \delta_{il}) u_l = 0 \quad (8)$$

となる。ここで c は固有値で、

$$c = \rho v^2 = \rho \left(\frac{\omega}{|\mathbf{K}|} \right)^2, \quad (v \text{ は波の速さ}). \quad (9)$$

また, δ_{il} は Kronecker のデルタ.

式 (8) が u_i について零でない解をもつためには, 次の永年方程式

$$|c^*_{ijkl} n_j n_k - c \delta_{il}| = 0 \quad (10)$$

が成立しなければならない.

一方, 式 (8) は, 式 (7) を考えて.

$$\mu_i = \frac{c^*_{ijkl} n_j n_k}{c} \mu_l \quad (11)$$

と変形される. すなわち, Fig. 1 の \mathbf{K} 方向へ進む平面波の変位ベクトルの成分が, 必ず満足しなければならない条件式を式 (11) は意味している.

いま, 平面弾性波の伝播方向 \mathbf{K} を指定すれば, \mathbf{n} が決定する. したがって, 式 (8) から固有値 c が決定する. この c を式 (11) に代入すれば μ_i が求まる. 結局, ξ と \mathbf{n} との間のなす角度 δ は,

$$\delta = \cos^{-1} \left(\frac{\xi \cdot \mathbf{n}}{|\xi|} \right) = \cos^{-1}(\mu_i n_i) \quad (12)$$

となる.

この式 (12) において, $\delta = 90^\circ$ の場合, 平面波の伝播方向 \mathbf{K} とその変位方向 ξ が直交する. つまり, このとき板内には純粋なよこ波が発生していることになる. すなわち

$$\mu_i n_i = 0. \quad (13)$$

また式 (11) の両辺に n_i を掛けて i について加えれば,

$$\mu_i n_i = \frac{c^*_{ijkl} n_j n_k \mu_l n_i}{c} \quad (14)$$

となる. したがって, 式 (13), (14) から K を任意定数として,

$$n_i = \frac{n_l c^*_{ijkl} n_j n_k}{K} \quad (15)$$

を得る. 式 (15) で与えられる三つの方程式から, 純粋なよこ波を発生させ得る圧電結晶板の切り出し方位が決定される.

次に式 (12) において, $\delta = 0^\circ$ の場合, \mathbf{K} と ξ は平行となり, 純粋なたて波が板内に発生する. これは,

$$\xi \times \mathbf{K} = 0 \quad (16)$$

の場合に相当し,

$$\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = n_1 : n_2 : n_3 \quad (17)$$

なる関係式が得られる. したがって, 式(11)の μ_i , μ_l の代わりに n_i , n_l を代入して, 結局

$$n_i = \frac{c^*_{ijkl} n_j n_k n_l}{c} \quad (18)$$

が得られる. この式(18)の三つの方程式は, 板内に純粋なたて波を発生させる条件式となる.

以上のことより, 純粋なよこ波, 純粋なたて波を発生させる条件式は全く相似なる方程式にしたがうものと云える.

$90^\circ > \delta > 0^\circ$ のときには, 発生している平面波はいわゆる擬似波となる. 式(15), (18)で決定される方位以外はすべてこの範疇に分類される.

§ 3. 純粋平面波を発生し得る厚み水晶板

Fig. 1 のように, 主面に垂直な \mathbf{K} 方向に平面波が伝播している厚み水晶板を考える. このとき, 式(11), (15), (18)を用い, さらに, Table 1 の水晶に関する定数値を用いれば, 純粋平面波を発生させ得る厚み水晶板の切り出し方位を求めることが出来る. いま, 純粋平面波の固有値を c とすれば, その速度 v は $v = \sqrt{c/\rho}$ で与えられる. また, 変位 ξ を規格化し, その成分を (ξ_1, ξ_2, ξ_3) とする. さらに, ξ と \mathbf{n} とのなす角度を δ とする. 純粋平面波に対して, 結局 Table 2 が得られる. φ は 0° から 30° までであるが, 水晶の対称性を考慮すれば, これによって全方位の値が計算出来るのである. なお, $\theta = 0^\circ$, 180° の場合には, 水晶の結晶構造上励振不可能である.

Table 1 水晶の各種定数値^{6~7)}

弾性定数 c_{mn} [$\times 10^{10}$ dyne/cm ²] (at 20°C)						誘電率 k_{mn} [e. s. u.] (at 20°C)											
$(c_{mn}) = \begin{pmatrix} 86.834 & 7.080 & 11.953 & -18.069 & 0 & 0 \\ 7.080 & 86.834 & 11.953 & 18.069 & 0 & 0 \\ 11.953 & 11.953 & 105.922 & 0 & 0 & 0 \\ -18.069 & 18.069 & 0 & 58.256 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 58.256 & -18.069 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -18.069 & 39.877 \end{pmatrix}$						$(k_{mn}) = \begin{pmatrix} 4.5 & 0 & 0 \\ 0 & 4.5 & 0 \\ 0 & 0 & 4.6 \end{pmatrix}$											
									圧電定数 ε_{mn} [$\times 10^4$ e. s. u.] (at 20°C)						質量密度 ρ [gr./cm ³]		
									$(\varepsilon_{mn}) = \begin{pmatrix} -5.2 & 5.2 & 0 & 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.2 & 5.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$						$\rho = 2.6487$ (at 20°C).		

§ 4. 厚み水晶板と擬似平面波

Fig. 2～9 は、任意の方位 (φ, θ) における厚み水晶板内で、生起し得る三つの平面波の変位角に関する計算結果である。曲線 (1), (2) はよこ波系統の平面波を示し, (3) はたて波系統の平面波を示す。また図中に丸を記してある点は純粋平面波である。ただし, Fig. 9 の曲線 (1) はすべての θ ($\varphi = 30^\circ$) にわたって純粋よこ波を与える。このモードは、特に Koga モード (純粋厚みすべり) と呼ばれている。

さて、純粋平面波を除けば、残りの他の平面波はいわゆる擬似平面波である。Fig. 2～9 を観察すれば、曲線 (1), (2) および (3) の δ の最大、最小の値は次のようになる。すなわち

$$\begin{aligned} \text{曲線 (1), (2) に対して} \quad & 90^\circ - 27^\circ \leq \delta \leq 90^\circ + 24^\circ, \\ \text{曲線 (3) に対して} \quad & 0^\circ \leq \delta \leq 27^\circ. \end{aligned}$$

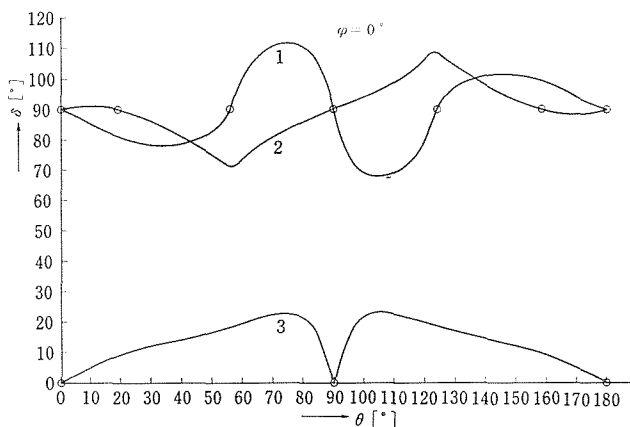


Fig. 2 厚み水晶板における $\theta \sim \delta$ 曲線 ($\varphi = 0^\circ$)

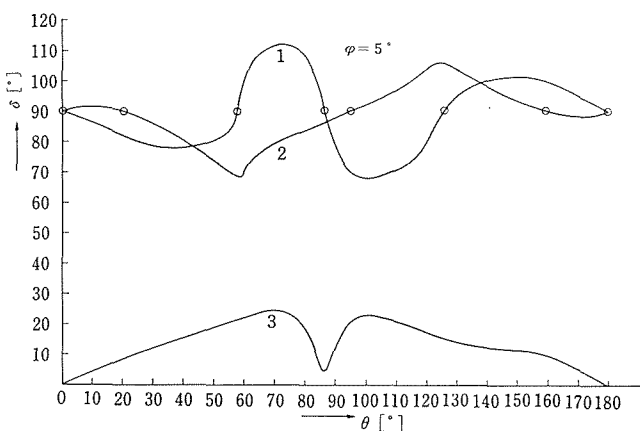


Fig. 3 厚み水晶板における $\theta \sim \delta$ 曲線 ($\varphi = 5^\circ$)

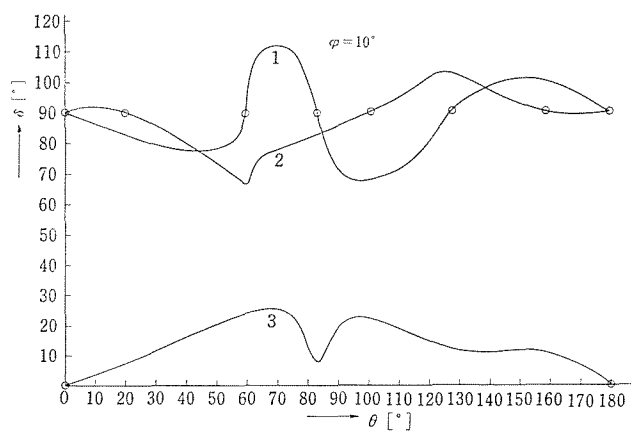
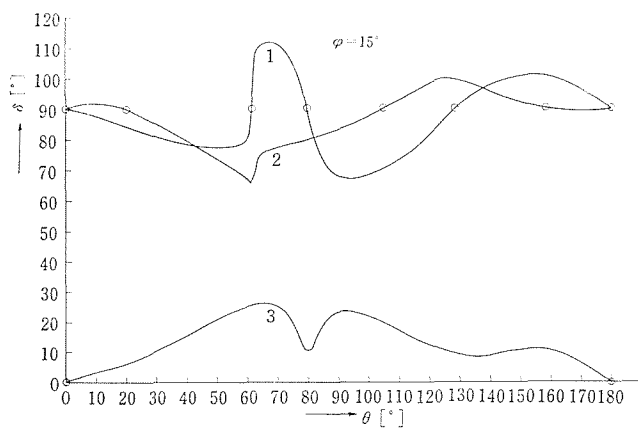
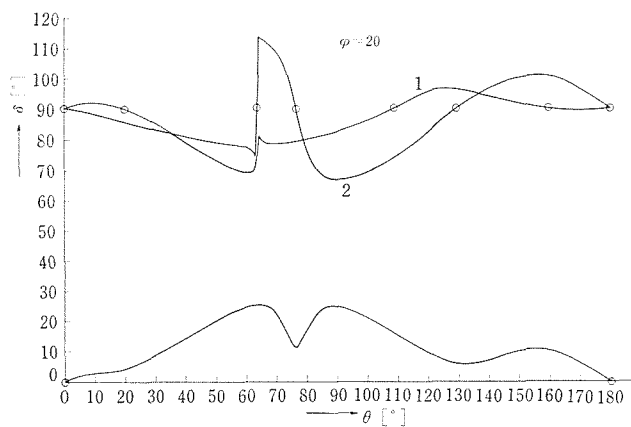
Table 2 純粋平面波の

 $\varphi [^\circ]$, $\theta [^\circ]$, $\delta [^\circ]$, $v [\times 10^2 \text{cm/s}]$

$\varphi [^\circ]$	モード	純粋よこ波 (1)				純粋		
		θ	δ	v	ξ_1	ξ_2	ξ_3	
0	θ	0, 180.00	20.000	90.000	159.90	0	55.770	
	δ	90.000	90.028	90.000	90.000	90.000	90.003	
	v	4689.8	4049.5	3297.2	4046.2	4689.8	4082.6	
	ξ_1	0	0.73214	0	0.73204	0	-0.50978	
	ξ_2	1.0000	0.62664	0.85244	-0.62638	1.0000	0.42293	
	ξ_3	0	-0.26705	0.52282	0.26789	0	0.74917	
5	θ	0, 180.00	19.720	95.935	159.48	0	57.507	
	δ	90.000	89.998	89.987	90.002	90.000	90.005	
	v	4689.8	4048.8	3305.5	4043.5	4689.8	4165.4	
	ξ_1	0	0.75042	-0.02081	0.71021	0	-0.51274	
	ξ_2	1.00000	0.59563	0.85619	-0.66062	1.0000	0.43022	
	ξ_3	0	-0.28653	0.51624	0.24330	0	0.74297	
10	θ	0, 180.00	19.390	101.38	159.02	0	59.406	
	δ	90.000	89.999	90.004	90.000	90.000	89.998	
	v	4689.8	4051.1	3327.6	4039.9	4689.8	4259.3	
	ξ_1	0	0.76643	-0.05225	-0.68350	0	-0.51763	
	ξ_2	1.0000	0.56780	0.86809	0.69861	1.0000	0.44255	
	ξ_3	0	-0.30033	0.49365	-0.21159	0	0.73226	
15	θ	0, 180.00	19.120	105.78	158.59	0	61.470	
	δ	90.000	90.002	89.992	90.000	90.000	89.999	
	v	4689.8	4053.2	3352.3	4036.8	4689.8	4361.0	
	ξ_1	0	0.78087	-0.10725	-0.65024	0	-0.52554	
	ξ_2	1.0000	0.54425	0.88831	0.74020	1.0000	0.46512	
	ξ_3	0	-0.31017	0.44655	-0.17116	0	0.71237	
20	θ	0, 180.00	18.940	109.01	158.12	0	63.660	
	δ	90.000	89.999	90.012	90.013	90.000	89.982	
	v	4689.8	4054.2	3374.1	4030.8	4689.8	4465.4	
	ξ_1	0	0.79428	-0.20108	-0.60882	0	-0.53853	
	ξ_2	1.0000	0.51833	0.91201	0.78389	1.0000	0.51305	
	ξ_3	0	-0.31694	0.35750	-0.12185	0	0.66841	
25	θ	0, 180.00	18.820	110.89	157.84	0	65.795	
	δ	90.000	90.001	89.999	90.008	90.000	90.016	
	v	4689.8	4055.2	3388.1	4028.1	4689.8	4562.1	
	ξ_1	0	0.80719	-0.34019	-0.55837	0	-0.56060	
	ξ_2	1.0000	0.49557	0.91714	0.82715	1.0000	0.63055	
	ξ_3	0	-0.32073	0.20765	-0.06357	0	0.53678	
29	θ	0, 180.00	18.770	111.37	157.20	0	66.905	
	δ	90.000	90.006	89.989	90.009	90.000	90.033	
	v	4689.8	4055.8	3394.4	4009.8	4689.8	4610.5	
	ξ_1	0	0.81740	-0.46885	-0.51221	0	-0.53735	
	ξ_2	1.0000	0.47781	0.88216	0.85876	1.0000	0.82824	
	ξ_3	0	-0.32179	0.04445	-0.01313	0	0.15901	
30	θ	0, 180.00	0 < θ < 180.00				0	18.786
	δ	90.000	90.000				90.000	90.000
	v	4689.8					4689.8	4055.3
	ξ_1	0	-0.50000				0	0.81989
	ξ_2	1.0000	0.86603				1.0000	0.47337
	ξ_3	0	0				0	-0.32203

$\varphi, \theta \sim \delta, v, \xi$ の関係

よこ波 (2)			純粋たて波 (3)			
90.000	124.23	180.00	0, 180.00		90.000	
90.000	90.001	90.000	0		0	
5116.5	4082.6	4689.8	6323.8		5750.9	
0	0.50969	0	0		1.0000	
-0.52282	0.42310	1.0000	0		0	
0.85244	0.74913	0	1.0000		0	
86.452	125.82	180.00	0, 180.00			
90.001	90.002	90.000	0			
5104.1	4013.2	4689.8	6323.8			
-0.00762	0.50890	1.0000	0			
-0.52054	0.41726	0	0			
0.85381	0.75294	0	1.0000			
82.961	127.25	180.00	0, 180.00			
89.999	89.999	90.000	0			
5068.1	3958.7	4689.8	6323.8			
-0.01716	0.51110	1.0000	0			
-0.51285	0.40996	0	0			
0.85831	0.75545	0	1.0000			
79.587	128.52	180.00	0, 180.00			
90.001	90.000	90.000	0			
5010.9	3919.5	4689.8	6323.8			
-0.03202	0.51731	1.0000	0			
-0.49649	0.39870	0	0			
0.86745	0.75726	0	1.0000			
76.426	129.55	180.00	0, 180.00			
89.984	89.989	90.000	0			
4937.7	3894.2	4689.8	6323.8			
-0.05897	0.52859	1.0000	0			
-0.46188	0.38053	0	0			
0.88498	0.75881	0	1.0000			
73.684	130.26	180.00	0, 180.00			
90.000	89.997	90.000	0			
4859.4	3881.2	4689.8	6323.8			
-0.12077	0.54434	1.0000	0			
-0.37705	0.35542	0	0			
0.91828	0.75985	0	1.0000			
72.371	130.50	180.00	0, 180.00			
90.000	90.000	90.000	0			
4817.1	3877.5	4689.8	6323.8			
-0.22870	0.55890	1.0000	0			
-0.21041	0.33116	0	0			
0.95049	0.76024	0	1.0000			
72.304	130.52	180.00	0, 180.00	18.786	72.304	130.52
90.000	90.002	90.000	0	0	0	0.00200
4814.9	3877.4	4689.8	6323.8	6374.3	5320.7	7037.3
-0.26325	0.56260	1.0000	0	0.27889	0.82505	0.65839
-0.15197	0.32482	0	0	0.16101	0.47634	0.38012
0.95268	0.76025	0	1.0000	0.94673	0.30397	-0.64964

Fig. 4 厚み水晶板における $\theta \sim \delta$ 曲線 ($\varphi = 10^\circ$)Fig. 5 厚み水晶板における $\theta \sim \delta$ 曲線 ($\varphi = 15^\circ$)Fig. 6 厚み水晶板における $\theta \sim \delta$ 曲線 ($\varphi = 20^\circ$)

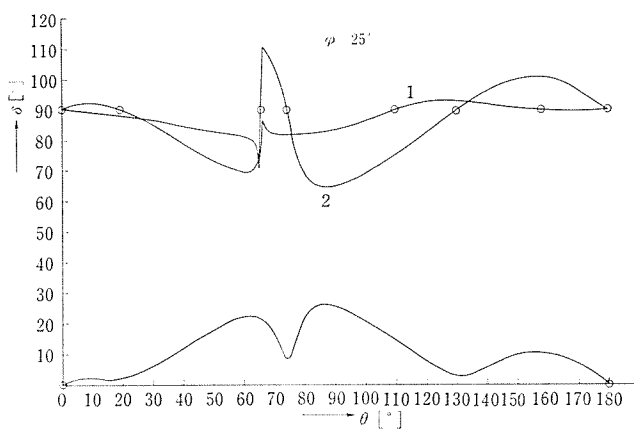


Fig. 7 厚み水晶板における $\theta \sim \delta$ 曲線 ($\varphi = 25^\circ$)

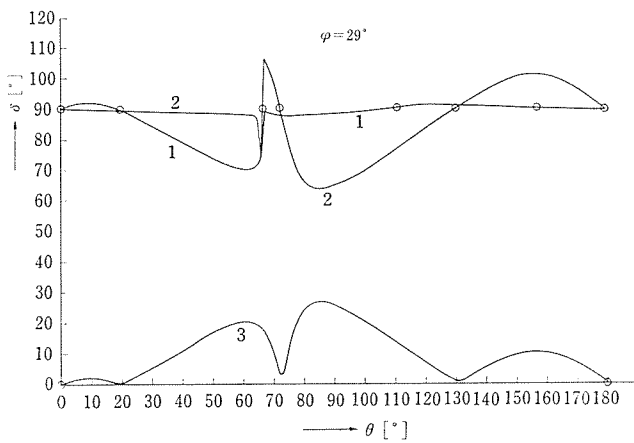


Fig. 8 厚み水晶板における $\theta \sim \delta$ 曲線 ($\varphi = 29^\circ$)

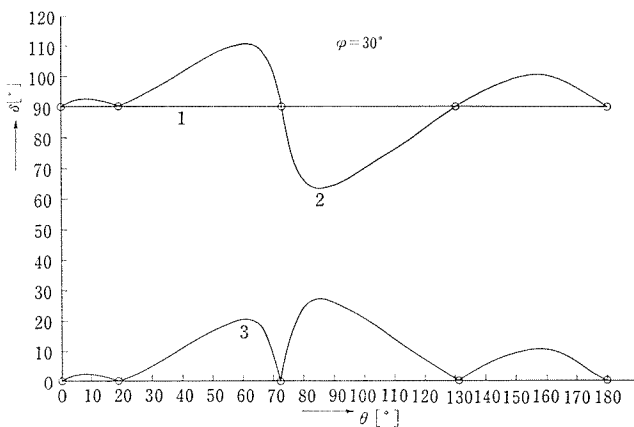


Fig. 9 厚み水晶板における $\theta \sim \delta$ 曲線 ($\varphi = 30^\circ$)

Table 3 $\varphi = 30^\circ$ における純粋モードの
 $\theta \sim \alpha, f$ の関係

θ	記号	$\alpha [\times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}]$	$f [\times 10^6 \text{ Hz}]$
18.78°	a_1	-4.36	2.522040
	a_2	-8.22	2.027635
	a_3	-8.95	3.187167
72.30°	b_1	6.46	2.231589
	b_2	-4.91	2.407452
	b_3	-6.15	2.660329
130.51°	c_1	-2.54	1.681419
	c_2	-2.82	1.938675
	c_3	-5.51	3.518665

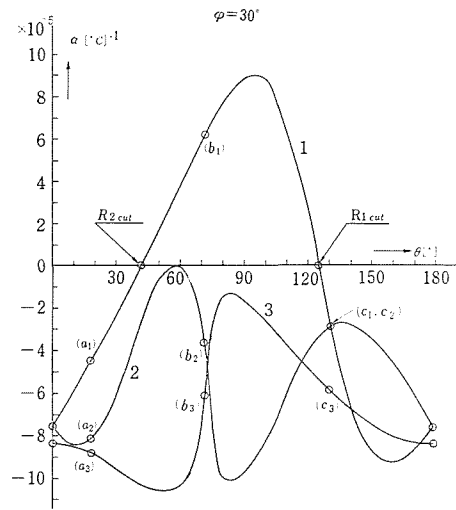


Fig. 10 厚み水晶板に発生する平面波の一次周波数温度係数 α と方位 θ の関係 ($\varphi = 30^\circ$)

したがって、上記の範囲で、任意の変位傾角 δ を有する擬似平面波を発生したいときには Fig. 2 ~ 9 で決定される (φ, θ) の厚み水晶板を用いればよいことが分る。

§5. 平面波の純粋度と周波数温度係数との関連

一般的に、振動モードが純粋で、その周波数温度係数が非常に小さい場合、このような素子の安定性は極めて高いと云える。現在、高信頼度部品の立場から、このような素子の開発の緊要度が高まっていると云える。前節までの議論は、特に圧電素子の純粋性に関するものであったが、本節では、これと密接に関連する周波数温度係数について検討して、高安定素子の実現の可能性を占ってみる。

さて、厚み水晶板に発生する平面波モードの周波数温度係数に関する理論⁹⁾を用いれば、周波数一次温度係数 α と方位 θ の関係は Fig. 10 のように計算される。図の中で、曲線 (1), (2), (3) は前述の平面波に夫々対応する。また、丸を記した点は純粋平面波を示す。

(ただし、曲線 1 はすべての θ に対して全面的純粋平面波。)

例えば、曲線 (1) で、 $\alpha = 0$ を示す二つの点は、現在最もよく使用されている R_1 板と R_2 板水晶振動子の切り出し角に相当する。しかも、Fig. 9 より明らかなように、これらの振動は純粋モード (Koga モード) である。したがって、これは前述の高安定、高信頼度の要請に十分合致する理想的な素子と云える。

次に Fig. 10 の曲線 (3) について考えてみる。 $(a_3), (b_3), (c_3)$ と記したところは、純粋な波を発生させ得る方位である。この点で α も極めて微小となれば理想的であるが、実際はそうはいかない。これらに対応する曲線 (1), (2) の各点 $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2)$ 等は、純粋よこ波となることは云うまでもない。これらの α を詳しく計算すると、Table. 3 のよ

うになる。注目すべきことは、 (c_1) 、 (c_2) 、 (c_3) の方位が R_1 板の方位と接近していることである。さらに、 (c_1) と (c_2) の α の値が殆んど等しいということが分る。また、これらの振動の変位は Table 2 によって求まる。前述のことを考えて、 $\varphi = 30^\circ$ のところでは、結局 R_1 板、 R_2 板の水晶振動子の優秀性が再確認されたと云うことに結論される。他の φ についても全く同様にして議論することが出来る。一方、擬似波についても同様な方法論で検討出来る。しかし、高安定素子は望めない。これは他の発展的応用——例えば、遅延素子など——へと期待されるだろう。

§6. む す び

以上を要約すれば次の通りである。

- 1) 圧電効果を厳密に考慮して、厚み振動板に発生する平面波の固有値、変位、さらに純粋平面波発生条件式を求めたこと。
- 2) 純粋平面波を発生させ得る厚み水晶板の切り出し角の決定と、それに伴う速度、規格化された変位成分を求めたこと。
- 3) 厚み水晶板における擬似平面波の変位の傾角を求めたこと。
- 4) 厚み水晶板における平面波の純粋度と周波数温度係数との関連について検討し、高安定素子の実現へ見通しを述べたこと。

以上である。

終りに、本研究を推進するに当ってコンピュータを手伝ってくれた高木道明君（現在、諏訪精工舎勤務）に謝意を表す。

参 考 文 献

- 1) I. Koga: Physics, **3** (1932) 70.
- 2) 古賀：電気学会誌，(1932) 736.
- 3) 古賀：電気学会誌，(1935) 822.
- 4) Z. Sakadi: Proc. Phys. Math. Soc. Japan, **23** (1941) 539.
- 5) F. E. Borgnis: Phys. Rev., **98** (1955) 1000.
- 6) 有賀：東京工業大学学報，No. 2 (1956).
- 7) 福与：「通信と圧電気」，共立出版 K.K.，(1955).
- 8) 中沢，高木：電子通信学会信越支部大会，(1972).
- 9) 中沢，松坂：信州大学工学部紀要，**30** (1971) 67.

Summary

Pure-and Quasi-Plane Elastic Waves in Thickness Quartz Crystal Plate

Mitsuo NAKAZAWA

(Department of Electronics Engineering, Faculty of Engineering)

This paper is described on the eigen-value equation and the secular equation for plane elastic waves in single crystals about which the piezoelectric repulsion stress is strictly considered. Also the conditions are shown under which pure plane elastic waves, that is, pure modes in crystals must be satisfied.

Applying this theory to the thickness quartz crystal plate, the following main points are shown.

- 1) All the cutting angles of the crystal plate with pure modes.
- 2) All the inclined angles of the displacement vector for the wave vector of quasi-modes in the crystal plate.
- 3) The relation between the purity of modes and its frequency temperature coefficient in the crystal plate.