微視的にみた粒状体のせん断過程*

小西純 -**

(昭和48年5月31日受理)

1. 序 論

砂・れきのような粒状体の力学的性質を本質的に解明するには, Rowe が述べているように, 粒状体が, 文字どおり, ばらばらの粒子の集合体であるという原点に立帰って考察 を進める必要がある.

粒子間の接触面に働く力とその方向接触面の方向,粒子間まさつ角などの関係から粒状体の強度・変形を論じた諸論文,たとえば Caquot³⁾, Dantu⁴⁾ Rowe⁵⁾, Horne⁶⁾,村山⁷⁾ 村山・松岡^{8),9)},小田^{10),11),12)}など,また最上^{13),14),15),16)}の論文もこのような考えに基づいた研究である.

粒状体の強度・変形特性を支配する要因としては、粒子そのものの性質と粒子の集合体 の性質それに外的な諸条件の3点が考えられるが、本論文では第2の集合体の性質に注目 している.すなわち、粒状体の構造を表わす、粒子接触面の角度の分布とそれらの面を通 して伝達される力の大きさと方向の変化が粒状体のせん断強度と本質的なかかわりを持っ ているのではないかと考え、これらを適確にとらえることのできるモデルとして、光弾性 材料で作製した円柱の2次元的な集合体を使用して実験を行なうとともに、上に述べたよ うな徴視量とせん断強さとの関係について若干の考察を行なった.

なお粒子間伝達力を直接測定した例は、きわめて少く、 Dantu⁴⁾ および村山・松岡^{8),9)} によるものがあるのみであり、ここで、簡単な2次元モデルを使用してではあるが、光弾 性によって、伝達力を測定することにした.

2. 実験の概要

前節に述べたような、粒状体内部の微視的な量、とくに粒子間伝達力を直接にとらえる ために、光弾性を応用することにした.すなわち光弾性材料であるエポキシ樹脂円柱の2 次元的な集合体について、単純せん断試験を行ない、せん断の各段階における光弾性等色 線縞写真より粒子間伝達力その他の微視量を求めた.

2.1 用いた粒子

直径が φ6.0mm, φ8.0mm および φ10.0mm, 長さが 19,0mm の円柱を, それぞれ 20:15:8 個の割合で混合したもので, これらは 光弾性材料である エポキシ樹脂板 (19

^{*} 土木学会中部支部研究発表会,第8回土質工学研究発表会において一部を発表1).2)

^{**} 土木工学教室 助手

mm厚)*から,特殊中空カッターを用いて削り出した.なお直径にくらべて,長さを大き く定めた理由は,円柱の積み上げ時および載荷時の安定を期するためであるが,大きな間 げきの付近では,粒子の平行が保たれない場合が見られ,そのような部分では応力状態が 必ずしも2次元的になっていないものと思われるが,全体数にくらべてごく少数であるこ とから,許し得ると判断した.

粒子表面の物理まさつ角∂は,円柱 表面と同じ程度のあらさに仕上げたエ ポキシ板と円柱とのまさつを測定する ことにより,18°~25°の値を得た.

なお実験時には、粒子を十分にアニ ールして、縁応力を除去したものを使 用することは言うまでもない.

2.2 粒子間伝達力の測定法

円柱の直径の両端に作用する接触力 により接触点直下の点Aに生じる応力 は、図-1(*a*)の記号を用いて



(a) 力が直径の両端に作用する場合
 (b) 力が直径上にない場合
 図-1 接触力 P が作用する円板

$$\sigma_x = \frac{2P}{\pi dt}, \ \sigma_y = -\frac{2P}{\pi t} \Big(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \Big) + \frac{2P}{\pi dt}, \ \tau_{xy} = 0$$

である. ここに t は円柱の長さ. $\tau_{xy} = 0$ であるから, σ_x , σ_y は主応力となる. これらを それぞれ $\sigma_1 \sigma_2$ と書き直して主応力差を求めると,

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{2P}{\pi t} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \tag{1}$$

一方,光弾性学の教えるところにより,等色線縞次数Nは光弾性感度を αとするとき

 $2\alpha/1$

$$N = \alpha (\sigma_1 - \sigma_2) t \tag{2}$$

と表わせる. したがって

$$N = \frac{2\pi}{\pi} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \cdot P$$

it to $P = \frac{\pi}{2\alpha} \left(\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right) \cdot N$ (3)

1 \

すなわち,接触力Pは,接触力直下の点Aにおける縞次数Nと比例関係にある.

次に直径上にない2点接触(図-1(b))によって生じる縞次数は馬場¹⁷⁾によると、円柱の中心からその半径の4/5点上の最大値すなわち、接触力方向の縞次数をとると、2つの

^{*} Ciba 社製 Araldite B プレポリマーと Hardner 901 を重量比10:3 で混合し、均一な液体として 型枠に注入後、125°Cで14時間加熱して作製する.

接触点に位置によらず,ほぼ一定となる.

また,数個の接触力が考えている点の縞次数に及ばす影響は,円柱中心から半径の4/5 点上では,考えている点と他のかく乱を起させる接触点とのなす中心角が60°の場合に約 4%であるが,90°の場合にはほとんど変化しないことが同じく馬場によって確められて いる.

著者は半径の 4/5 点よりさらに外側の,半径の9/10点における縞次数を読みとることに よって,その絶対値を大きくし,精度を上げることにした.

すなわち,接触力の大きさは、円柱の中心から半径の9/10点上の縞次数の最大値を読み とることによって測定することとし、その方向は最大値の方向から求めることにした.

なお以下の解析では、粒子間伝達力(接触力)を縞次数のままで、表わしてある. 伝達 力が等しい場合、生ずる縞次数は、円柱の直径 d に反比例するので、 φ6、 φ10 粒子の縞次 数もすべて φ8 粒子の縞次数に換算した.

2.3 二次元単純せん断試験装置

試験装置を写真-1に示す. せん断枠は鋼製で,幅156mm,高さ156mm±20mm(いずれも内寸)*,側材bの上端は取付板eに,下端は底材cにそれぞれヒンジ結合され,底材を押すことによってせん断変形を生じさせる. 上材dはガイドfによって上下方向にのみ変位することができ,またてこhにより垂直荷重を粒状体aに与える. ひずみ制御方式でせん断ひずみを生じさせるが,底材の水平変位をダイヤルゲージにより,またせん断力を荷重計gにより測定する. 高さ変化は,上材の変位量(ダイヤルゲージによって測定)



 写真-1
 二次元単純せん断試験装置

 a) 二次元粒状体
 b) 側材
 c) 底材
 d) 上材
 e) 取付板

 f) 上材ガイド
 g) 荷重計
 h) 垂直載荷用てこ

^{*} 参考文献 1), 2) に記した数値はこのように訂正する.

小西純一

No. 34



(a) L2 ($\gamma = 0\%$)



(b) L9 ($\gamma = 5\%$)



(c) L12 ($\gamma = 8.8\%$)



(d) L16 (r = 15%) 写真 2 各せん断段階における光弾性等色線編写真 (e₀ = 0.26 の場合)

小西純一

No. 34



(a) D2 (r = 0%)



(b) D8 $(\gamma = 3.8\%)$



(c) D12 $(\gamma = 8.8\%)$



(d) D16 (r = 15%) 写真一3 各せん断段階における等色線縞写真 (e₀ = 0.22 の場合)

から底材の上下変位量(水平変位から計算)を差し引くことによって求める.

以上のような装置を光弾性実験載荷枠内に取付けて試験を行なう.

2.4 光弹性実験装置

本学土木工学科所属の ϕ 300mm の偏光板を有する,理研計器製のものを使用した. 等色線撮影には水銀灯を用い,G-1フィルターを併用して,緑色(波長5461Å)の単 色光光源とした.フジナーf=300mm レンズ付のキャビネ判暗箱によって写真撮影を行 なった.

2.5 実験方法

2.1 に述べた3種の径の円柱を, せん断枠内にランダムに積み上げ, 所定の高さとした. 詰め方を変えて, 初期間げき比 $e_0 = 0.22$ および0.26の二種類について試験を行なった.

ひずみ制御方式でせん断を行ない,一定のせん断ひずみ各段階ごとに,せん断を中断し, 2分経過後,ひずみおよび光弾性縞の落ちついた状態で写真撮影と各種計器による測定を 行なった.

これらの操作をせん断ひずみ $\gamma =$ 15%に達するまで繰返した.

せん断力 $S \sim t$ ん断ひずみ $\gamma \sim \bar{a}$ さ変化 $\Delta h/h$ の関係は図-2に示し たようになる. $e_0 = 0.26$ の場合に $\gamma = 0 \sim 4\%$ でSが過大となってい る点を除けば,傾向的には,砂の単 純せん断試験結果によく似ている. S曲線上に,L2,L9,…;D2,D8, …のような記号で示した各点は,次 章において解析を行なって点であっ て,Lはゆるづめ ($e_0 = 0.26$),Dは 密づめ ($e_0 = 0.22$)を意味している.

これらの各点における光弾性等色 線縞写真を、写真-2($e_0 = 0.26$) と写真-3($e_0 = 0.22$)に示す、大 きく引伸したこれらの写真から、各 接触点における粒子間伝達力の大き さおよび方向、接触点における接線 の方向などを測定する.



3. せん断に伴う粒子接触角および粒子間伝達力の変化

3.1 粒子接触角

粒状体はせん断変形を行なうときに、外からの荷重増分に対して安定となるように、自 らの構造を変化させる.円柱の集合体の構造を支配するパラメーターは間げき比と粒子接

186

No. 34

触角であるが、本文では、強度と粒子間伝達力の関係を 中心に考察するので、伝達力の大きさ・方向に対してよ り密接な関係のある、粒子接触角で代表させることにす る.

ある粒子接触点 j における,粒子接触角 θ_j ,粒子間伝 達力 f_j およびその方向 β_j を図一3のように定義する.

まず, せん断の進行にともなって, 粒状体の構造がど のように変化するかを, 粒子接触角の頻度を測定するこ とにより調べてみることにする.

せん断過程における重要なひずみ段階としてせん断前 の状態はん断ひずみ増分に対する高さ変化の増分の比= 0の状態およびそれが最大の状態,および実験の最終状 態(γ = 15%)を考える.これらの段階の光弾性写真に ついて粒状体の中心部に面積が全体の1/2の相似な四辺



図-3 接触点 *j*に作用す る粒子間伝達力 *f*_j

形を考え、その内部に中心をもつ粒子に関する接触角を測定し、その頻度を求めた.ただ し ϕ 8 換算縞次数が 0.5次以上の伝達力を分担している接触点のみを対象とした.その結 果を図ー4、5の(*a*)に示す*.1/2の面積について解析した結果が全粒状体全体の性質を 代表しているかどうかを調べるため、全面積解析および 1/2 面積解析で得られた L9 にお ける θ_j および β_i の頻度分布の相関をとって示したのが図ー6 である.全体としては両者 はほぼ対応しているとみなせよう.

さて、粒状体に直応力のみが加えられている状態 (L2, D2) では、粒状体の構造は、直 応力軸に関して、対称となっていることが期待されるので、図ー4(a)のL2、図ー5(a)の D2 は $\theta = 0$ 軸に関し対称な図形となると予測される。図ー4、5 では多少偏りがみられ るものの、せん断ひずみが増加した段階に比較すると対称に近いと言えよう. せん断応力 が加えられると、分布の対称軸が負の側に偏るが、特に図一5(a)の $e_0 = 0.22$ の場合に特 徴的である. このように、粒状体がせん断変形を受けると、それに応じて接触面の平均的 な方向が変化してゆくことがわかる.

3.2 粒子間伝達力の方向

前節で述べたような接触面群を通して、力が伝達される場合、ある接触点jにおける力 の方向 β_i と接触角 θ_i との差、すなわち図-3の($\beta_i - \theta_i$)は高々、物理まさつ角程度で あるから、粒子間に伝達される力の方向は接触角の分布と密接な関係があるはずである. 図-4、5の(b)には、伝達力の方向 β_i の頻度分布を示した.これを(a)の接触角分布と比 較すると、両者はかなりよく対応しており、分布の形状、頻度とも両者に顕著な差異はな い、このことは、各接触点において発揮されている粒子間まさつ角

$$\delta_i = \beta_i - \theta_i \tag{4}$$

^{*} $\theta_j = \theta_k$ での θ_j の頻度 n_k は、 $\theta_k \pm 5^\circ$ の区間の θ_j の頻度の重みつき移動平均値である. すなわち $n_k = 0.5\bar{n}_k + 0.25 (\bar{n}_{k-1} + \bar{n}_{k-1})$ ここに、 \bar{n}_k , n_{k-1} , n_{k+1} は平均操作前の頻度値. 後出の β_k および F_{θ} についても同様の操作を施してある.



(c) sum of the interparticle forces in the angle β_j

図-4 粒子接触角 θ_j, 伝達力の方向 β_j の頻度分布および伝達力の 和 F_β の β に対する関係 (e₀ = 0.26 の場合)





(C) sum of the interparticle forces in the aogle β_j

図-5 粒子接触角 θ_j , 伝達力の方向 β_j の頻度分布および伝達力の 和 F_{β} の β に対する関係 ($e_0 = 0.22$ の場合)

小西純一

No. 34











の頻度分布(図-7)が0°に集中した形状となって,正負いずれにも偏っていないことと 矛盾しない.

3.3 粒子間伝達力の大きさ

図―4, 5 (*a*) のような接触角の構造中を (*b*) のような方向の分布で力が伝達される訳で あるが、いかなる方向にどの程度の力が伝達されているかを知るために、ある角度の区間 $\beta_k \pm 5^\circ$ の範囲の方向をなして伝達される力 (図―4, 5 (*b*) で示したように n_{β} 個ある) の和 $F_{\beta}(\beta_k) = \sum f_j(\beta_k - 5^\circ < \beta_j < \beta_k + 5^\circ)$ を β_k に対して図示したのが図-4, 5 (*c*) である. ただし F_{β} は縞次数のままで表わしてある. $n_{\beta} \ge F_{\beta}$ の間に強い相関関係がある ことは明らかであり、 n_{β} の大きいところで F_{β} は著しく大きくなっている. この関係を図 示したのが図-8 である $n_{\beta} > 10$ ではおよそ $F_{\beta} \propto n_{\beta}^2$ の関係にあることがわかる. この ようにして、粒子間伝達力の和はある方向に大きく、ある方向で小さくなっており、せん 断中にその方向が変化することがわかった. また最大の方向と最小の方向を注意して観察 すると、多少の凹凸無視すれば. それらは互に直交していることがわかる.

せん断強度発揮の機構

前章で求めた,粒子間伝達力分布や,接触角分布のせん断にともなう変化とせん断強度 との関係を考察する.

粒状体内部では、力を伝達している接触点(図-3)が図-4、5 に示したような頻度 分布の方向に分布しており、したがって伝達力の方向・大きさも、接触点の方向に支配さ れている. 粒状体内部に生じている伝達力は、外部からの荷重とつり合っているはずであ るから、図-4、5(c)に示した伝達力の和を水平方向と鉛直方向に分けて、それぞれを合 計し、その比をとると外から加えたせん断力*S*と垂直力*P*との比に等しい. すなわち

$$\frac{S}{P} = \tan\varphi_{mo} = \frac{-\sum_{j=1}^{M} f_j \cdot \sin\beta_j}{\sum_{j=1}^{M} f_j \cdot \cos\beta_j} = \frac{-\sum_{k=1}^{m} F_{\beta}(\beta_k) \cdot \sin\beta_k}{\sum_{k=1}^{m} F_{\beta}(\beta_k) \cdot \cos\beta_k}$$
(5)

ここに φ_{mo} : 発揮された内部まさつ角, M: 有効な接触点数, m: 角度の分割区間数, $F_{\beta}(\beta_k)$: 角度 β_k の方向の伝達力の和.

また $\beta_i = \theta_i + \delta_i$ (δ_i :発揮された粒子間まさつ角)の関係があるから (5) 式は

$$\tan\varphi_{mo} = \frac{-\sum_{j=1}^{M} f_j \cdot \sin(\theta_j + \tilde{\delta}_j)}{\sum_{j=1}^{M} f_j \cdot \cos(\theta_j + \tilde{\delta}_j)}$$
(6)

となる. ここで δ_j の値は図-7に示したように分布している. しかし f_j , θ_j との組合せ がわからないので、このままでは (6) 式は計算できない. 村山ら^{8),9)}は、 θ に対する f_j の 和の分布と $\delta_j = \delta$:一定の仮定を用いて計算している. しかし図-7に示したように δ_j

は一定値ではなく,またその値は 0°に集中 しており,粒子間の物理まさつ角近くまで発 揮されている接点は少ないので,必ずしも実 情に合わないのではないかと考えられる.

図-9には式 (5) と式 (6) による計算値と 実験値を示した.式 (6) による値は、 δ_j はせん断前に0でせん断が始まると一定値 $\delta = -20^\circ$ に発揮されるとした場合(∇ , **マ**印)と上述のように δ_j は0°付近に集中している点を考慮して $\delta = 0^\circ$ (一定値)と仮定した場合(Δ , **△**印)を示してある.

実験値と計算値とは必ずしもよい一致を示 しているとは言い難いが、二種類の間げき比 の場合とも比較的近い値を示しているのは式 (5)による値であり、式(6)で $\delta = 0^\circ$ とし



たときの値も同程度である. $\delta = -20^{\circ}$ とした場合には $e_0 = 0.22$ の場合にかなり過小な 値が得られた.

0.5 次以下の縞次数を読みとり, さらに全接触点について解析を行なえば, 式(5) による値はさらに実験値に近づくものと考えられる.

式(6) で $\delta = 0^{\circ}$ と仮定することは、粒子間まさつ角を考慮しないことであるが、もし θ_i および β_i の頻度分布を等しいとみなせるならば、式(5) と式(6) による値は一致する. 図-4,5の(a) と(b) を比較すると両者は大局的には等しいとみなせるので、上記の結果 は不自然ではない.このことは徴視的な粒子間のずれの機構を全体のせん断と結びつける 場合、従来よく用いられてきたモデルのように、粒子間まさつ角 δ_i の発揮される向きを 一方向に限定するのが実情に合っていないことを示している.

5. 結 論

光弾性材料で作製した円柱形粒子の2次元的集合体の単純せん断試験を行なって,次のような結果を得た.

- 1. 粒状体はせん断にともなって、その構造を変える.それは粒子接触角の方向が変化す ることによるものである.
- 2. 粒子接触点における伝達力は,接触面に垂直に最も多く伝達される. すなわち,せん 断により発揮される粒子間まさつ角 δ_j は,高々, $\pm \delta$ (物理まさつ角)の範囲に分布 しているが,平均的には $\delta_j = 0$ と考えてよい.
- 3. ある方向の伝達力の大きさの和は、その方向の頻度が大きいところでは大きく、せん 断にともなって、その分布が変化する.
- 粒状体のせん断抵抗は、粒子間伝達力の方向と大きさが変化することに基づくものである。

- 5. 粒子間まさつ角の発揮に関して、これを同じ向きのみに働くとする従来の局所的なモ デルは再検討の要がある.
 - なお,引続き,主応力の回転を基にしたモデルについての考察を進めている.

本研究を進めるに当り,終始,適切なご助言・ご討議をいただいた川上浩教授,実験・ 解析に多大の労をおしまなかった,檜山義光,湯沢栄次,室伏優,柳沢洋一の各氏に感謝 の意を表します.また,光弾性円柱の作製方法などについては,京都大学工学部丹羽義次 教授,小林昭一助教授,中川浩二助手(現山口大学助教授)のご教示を得た.なお科学研 究費総合研究A(代表者:京都大学後藤尚男教授)および奨励研究A(昭46)の補助を受 けたことを付記する.

- 参考文献
- 1)小西純一:粒状体の変形機構,昭和47年度研究発表会講演概要集,243~246,昭48.2,土木学会 中部支部
- 2)小西純一:せん断変形中の 粒状体に生じる 粒子間伝達力,第8回 土質工学研究発表会 講演集, 181~184,昭48.6
- Caquot, A.: Équilibre des massifs à frottement interne. Gauthier Villars, 1934 Etit Caquot et Kerisel: Traité de mécanique des sols, 3 ed. Gauthier Villars, 1956
- Dantu, P.: Étude statistique des forces intergranulaires dans un milieu pulvérulent, Géotechnique, 18, 1968
- 5) Rowe, P.W.: Stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, Vol. 269, 1962
- 6) Horne, M.R.: The behaviour of an assembly of rotund, rigid, cohesionless particles, Parts I~III, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, Vols. 286 & 310
- 7) Murayama, S: A theoretical consideration on a behaviour of sand, Rheology and soil mecanics, Symposium Grenoble, Springer, 1966
- 8) 村山朔郎・松岡 元:2次元モデルによる粒状体のせん断現象の徴視的考察,京大防災研究所年 報,13B,昭45
- 9) 村山朔郎・松岡 元:砂と粘土のせん断特性の類似性とそのメカニズムについて,京大防災研究 所年報,14B,昭46
- Oda, M.: Initial fabrics and their relations to mechanical properties of granular material, Soils and Foundations, Vol. 12, 1972
- 11) Oda, M.: The mechanism of fabric changes during compressional deformation of sand, Soils and Foundations, Vol. 12, 1972
- 12) Oda, M.: Deformation mechanism of sand in triaxial compression tests, Soils and Foundations, Vol. 12. 1972
- 13) Mogami, T.: A statistical approach to the mechanics of granular materials, Soil and Foundation, Vol. V, 1965
- Mogami, T.: Angle of internal friction and a simple transient phenomenon of granular material, Trans. of JSCE, No. 128, 1966
- 15) Mogami, T.: On the deformation of granular material, Trans. of JSCE, No. 129, 1966

194

17) 馬場賢三:粒状体問題への光弾性実験法の適用に関する基礎的研究,京都大学大学院修士論文, 土木工学専攻,修402号,昭44.3

Summary

A Microscopic Study on Granular Materials during Shearing Processes

Junichi KONISHI (Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering)

The two-dimensional assemblies of the circular rods made of epoxy resin are tested in a two-dimensional simple shear apparatus. Magnitudes and directions of interparticle forces and directions of effective contact planes are measured by using the photoelastic method. Relationships between the variations of distribution of these microscopic quantities and macroscopic behaviour of the assemblies are inevestigated.

The distribution of directions of contact planes varies with the shear strain. But the direction of the interparticle force depends on the direction of the contact plane. Because the angles of mobilized inter particle friction concentrated at zero degree, the distribution of directions of contact planes are not so different from that of directions of interparticle forces. Relationships between the sum of interparticle forces and directions of them vary with the distribution of directions of contact planes during the shear. It is to be considered that the shearing resistance of the granular materials results from these variations of magnitude and direction of the interparticle force.