

# 弱い一様な乱れの理論 III

大 路 通 雄\*

(昭和47年10月31日受理)

## 1. は し が き

この報告では、前報<sup>2)</sup>に引き続き、弱い Burgers 乱れの Reynolds 数展開について、初期正規分布を仮定したときの4次近似、および初期非正規分布の場合の取扱いを述べ、さらにそれらの結果を総合して Reynolds 数による摂動展開の問題点を明らかにする。文中 I, II とあるのは、それぞれ文献 1), 2) をさし、特にことわらない限り、II と同じ記号法を用いる。

## 2. 4 次近似 (初期正規分布)

初期正規分布 (II; 3 節) を仮定すれば、3 次近似は 2 次近似に一致し、4 次近似は II; (2・20) によりつぎの方程式系で与えられる：

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + 2k^2 \right) \phi_{1,4}(k; t) &= ik\phi_{1,3}(k; t) (= \lambda_{1,3}(k; t)); \\ \phi_{1,3}(k; t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{2,3}(k, l; t) al. \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 1)$$

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + 2(k^2 + kl + l^2) \right] \phi_{2,3}(k, l; t) \\ = \frac{i}{2} [(k+l)\phi_{2,2}(k, l; t) - k\phi_{2,2}(l, -k-l; t) \\ - l\phi_{2,2}(-k-l, k; t)] (= \lambda_{2,2}(k, l; t)); \\ \phi_{2,2}(k, l; t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{3,2}(k, l, m; t) dm \\ + 2[\phi_{1,0}(k; t)\phi_{1,2}(l; t) + \phi_{1,2}(k; t)\phi_{1,0}(l; t)]. \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 2)$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + 2(k^2 + kl + l^2 + km + lm + m^2) \right] \phi_{3,2}(k, l, m; t) \\ = \frac{i}{2} [(k+l+m)\phi_{3,1}(k, l, m; t) - k\phi_{3,1}(l, m, -k-l-m; t)] \end{aligned}$$

---

\* 機械工学教室 教授

$$\left. \begin{aligned} & -l\phi_{3,1}(m, -k-l-m, k; t) - m\phi_{3,1}(-k-l-m, k, l; t) \\ & \qquad \qquad \qquad (= \lambda_{3,1}(k, l, m; t)); \\ \phi_{3,1}(k, l, m; t) &= 2[\phi_{1,0}(k; t)\phi_{2,1}(l, m; t) \\ & \quad + \phi_{1,0}(l; t)\phi_{2,1}(m, k; t) + \phi_{1,0}(m; t)\phi_{2,1}(k, l; t)]. \end{aligned} \right\} \quad (2\cdot3)$$

(II; (4\cdot8)~(4\cdot10)も参照).  $\phi_{3,1}(k, l, m; t)$  に対する5次キュムラント・スペクトル  $\phi_{4,0}$  の寄与は, 初期正規分布の仮定により終始0である. これらの方程式系は, Kawahara<sup>3)</sup> が用いたものと全く同等であって, 両者の対応は付録2に示した. 2次近似の場合 (II; 4節) にならい, エネルギー・スペクトルについては,

$$\phi_1^{(4)}(k; t) = \phi_{1,0}(k; t) + R^2\phi_{1,2}(k; t) + R^4\phi_{1,4}(k; t), \quad (2\cdot4)$$

エネルギー減衰則については,

$$\frac{E^{(4)}(t)}{E(0)} = J_0(t) + R^2J_2(t) + R^4J_4(t); \quad J_4(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{1,4}(k; t)dk \quad (2\cdot5)$$

によって, それぞれ  $R^4$  までの結果が得られる.

方程式(2\cdot1)~(2\cdot3)を解くことは, 逐次項の枝分れのためにかなり繁雑ではあるが, 原理的にはむつかしくない. すなわち, (2\cdot1)と(2\cdot2)から II; 付録と全く同様に

$$\begin{aligned} \phi_{1,4}(k; t) &= \frac{1}{2} k \exp(-2k^2t) \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \int_{-\infty}^{\infty} [k\psi_{2,2}(l, -k-l; t'') \\ & \quad - 2(k+l)\psi_{2,2}(k, l; t'')] \exp(2(k^2 + kl + l^2)t'' - 2l(k+l)t') dl \end{aligned} \quad (2\cdot6)$$

をみちびくことが出来る (II; (4\cdot13) 参照). ここで便宜上(2\cdot2)の第2式に対応して  $\psi_{2,2}$  をふたつの部分に分け,

$$\psi_{2,2}(k, l; t) = \psi_{2,2}^I(k, l; t) + \psi_{2,2}^{II}(k, l; t), \quad (2\cdot7)$$

ただし

$$\psi_{2,2}^I(k, l; t) = 2[\phi_{1,0}(k; t)\phi_{1,2}(l; t) + \phi_{1,2}(k; t)\phi_{1,0}(l; t)], \quad (2\cdot8)$$

$$\psi_{2,2}^{II}(k, l; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{3,2}(k, l, m; t) dm \quad (2\cdot9)$$

とおけば  $\psi_{2,2}^I$  は4次キュムラントを無視した“準正規分布理論”に相当する項,  $\psi_{2,2}^{II}$  は4次キュムラントが0でないための寄与であって, 前者を準正規成分, 後者を4次キュムラント成分と呼ぼう. 以下この区分に応じる  $\phi_{1,4}$  等の成分にも肩符を付し, 準正規分布理論<sup>4)</sup> および Deissler 理論<sup>5)</sup> と比較するために, それぞれを別個に計算することとする.

(i) 準正規成分

0次近似解II; (4\cdot2)と2次近似解II; (4\cdot14)を(2\cdot8)に代入すれば,

$$\psi_{2,2}^I(k, l; t) = \exp(-2(k^2 + l^2)t) \int_{-\infty}^{\infty} [G(k, m; t) + G(l, m; t)] \phi_1(k)\phi_1(l)\phi_1(m)$$

$$+ H(l, m; t) \phi_1(k) \phi_1(m) \phi_1(l+m) + H(k, m; t) \phi_1(l) \phi_1(m) \phi_1(k+m)] dm \quad (2 \cdot 10)$$

を得る. ここに

$$\left. \begin{aligned} G(k, m; t) &= \frac{1}{m^2} (1 - \cosh 2kmt) \exp(-2m^2 t), \\ H(k, m; t) &= \frac{k^2}{4m^2(k+m)^2} \{1 - e^{-2m(k+m)t}\}^2 \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 11)$$

とおいた. これを (2.6) の被積分関数に用いて多少の整理を行なうと, 結局

$$\begin{aligned} \phi_{1,4^I}(k; t) &= k \exp(-2k^2 t) \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K^I(k, l, m; t'') \\ &\quad \times \exp(2(k^2 + kl + l^2)t'' - 2l(k+l)t') dldm \end{aligned} \quad (2 \cdot 12)$$

の形に書かれる. 関数  $K^I(k, l, m; t')$  は, 初期エネルギー・スペクトルに関する 5 通りの 3 重積の寄与にまとめられるが, その具体的な表式は付録 3 にゆずる.

(ii) 4 次キュムラント成分

簡単のため,

$$-(k+l) = \sigma, \quad -(k+l+m) = \tau \quad (2 \cdot 13)$$

とおくと, 方程式 (2.3) の形式解は,

$$\begin{aligned} \phi_{3,2}(k, l, m; t) &= -\epsilon \int_0^t \sum_{\mathbf{C}}^{k, l, m, \tau} \left\{ \tau \sum_{\mathbf{C}}^{k, l, m} \phi_{1,0}(m; t') \phi_{2,1}(k, l; t') \right\} \\ &\quad \exp(-2(k^2 + kl + l^2 + km + lm + m^2)(t-t')) dt' \end{aligned} \quad (2 \cdot 14)$$

である. ただし,  $\sum_{\mathbf{C}}$  記号は上辺に示した変数の円置換に関する集和を表わす. ところで, II; 付録 (9) によれば

$$\phi_{2,1}(k, l; t') = \frac{\epsilon}{2} \sum_{\mathbf{C}}^{k, l, \sigma} \frac{\sigma}{kl} F(k, l; t') \phi_1(k) \phi_1(l), \quad (2 \cdot 15)$$

また  $\phi_{1,0}(m; t') = \phi_1(m) \exp(-2m^2 t')$  (II; (4.2)) であるから, これらを (2.14) に用いると,  $\phi_{3,2}(k, l, m; t)$  もまた初期エネルギー・スペクトルの 3 重積 (全部で  $3 \times 3 \times 4 = 36$  通りある) で定められることがわかる. そこで, (2.12) にならぬ

$$\begin{aligned} \phi_{1,4^{II}}(k; t) &= k \exp(-2k^2 t) \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K^{II}(k, l, m; t'') \\ &\quad \times \exp(2(k^2 + kl + l^2)t'' - 2k(k+l)t') dldm \end{aligned} \quad (2 \cdot 16)$$

の形におくときは, (2.6) と (2.9) により

$$K^{II}(k, l, m; t'') = \frac{1}{2} [k \phi_{3,2}(l, \sigma, m; t'') + 2\sigma \phi_{3,2}(k, l, m; t'')] \quad (2 \cdot 17)$$

であって、この式は3重積の $2 \times 36 = 72$ 項から成っている。しかし、 $\phi_{1,4}^{\text{II}}(k;t)$ を求めるにはこれを $l, m$ について積分するので、そのうちの18項は重複し、実際には54項について評価すればよい。結果は付録4に示すように、最終的には24通りの3重積の寄与にまとめられる。

### 3. 4次近似解の実例と考察

前節(2.12)と(2.16)を求めれば、エネルギー・スペクトルの4次の項は

$$\phi_{1,4}(k;t) = \phi_{1,4}^{\text{I}}(k;t) + \phi_{1,4}^{\text{II}}(k;t) \quad (3.1)$$

で与えられるが、II; 例A, Bのような連続スペクトル・モデルについてこれを実行することは非常に面倒なので、ここでは線スペクトル  $\delta$ :

$$\phi_1(k) = \frac{1}{2} [\delta(k+1) + \delta(k-1)] \quad (3.2)$$

(II; (3.9)参照)の場合だけを取扱う。このとき Burgers 乱れでは連続スペクトルの部分は発生しないから、はじめ2本のスペクトル線 ( $k = \pm 1$ ) が、 $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3$  の6本に分れるだけである。実際の計算は、 $\phi_{1,4}(k;t)$  をさらに  $k$  に関して積分した減衰関数 (2.5) を直接求めることとし、 $\delta$  関数の特性を利用してまず  $k, l, m$  で積分した後、時間積分を行なった。結果はつぎの通りで、いずれも指数関数的減衰を与える。

$$\begin{aligned} J_4^{\text{I}}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{1,4}^{\text{I}}(k;t) dk = \frac{3}{64} e^{-2t} - \frac{1}{2} e^{-4t} + \left( \frac{33}{16} t - \frac{33}{64} \right) e^{-6t} \\ &\quad + \left( t + \frac{91}{120} \right) e^{-8t} + \frac{31}{128} e^{-10t} - \frac{7}{192} e^{-14t} + \frac{3}{640} e^{-18t}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} J_4^{\text{II}}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{1,4}^{\text{II}}(k;t) dk = \frac{1}{24} e^{-2t} - \frac{3}{16} e^{-4t} - \left( \frac{9}{8} t - \frac{93}{64} \right) e^{-6t} \\ &\quad - \left( \frac{1}{2} t + \frac{9}{5} \right) e^{-8t} + \frac{15}{32} e^{-10t} + \frac{3}{16} e^{-12t} - \frac{35}{192} e^{-14t} + \frac{3}{160} e^{-18t}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} J_4(t) &= J_4^{\text{I}}(t) + J_4^{\text{II}}(t) = \frac{17}{192} e^{-2t} - \frac{11}{16} e^{-4t} + \frac{15}{16} (t+1) e^{-6t} \\ &\quad + \left( \frac{1}{2} t - \frac{25}{24} \right) e^{-8t} + \frac{91}{128} e^{-10t} + \frac{3}{16} e^{-12t} - \frac{7}{32} e^{-14t} + \frac{3}{128} e^{-18t}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

これに対し、0次および2次近似は、それぞれ

$$J_0(t) = e^{-2t}, \quad (3.6)$$

$$J_2(t) = -\frac{1}{4} (1 - e^{-2t})^3 e^{-2t} \quad (3.7)$$

であった (II; (4・34), (4・35)).  $J_4^I(t)$ ,  $J_4^{II}(t)$ ,  $J_4(t)$  を図 1 に,  $R=1, 2, 3$  とするときのエネルギー減衰曲線を 2 次近似の結果と比べて図 2~4 に示す.

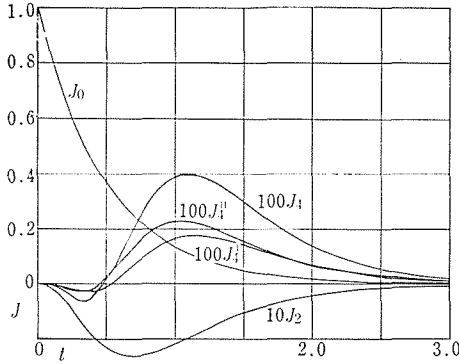


図 1 線スペクトル・モデルの減衰関数 (II; 図 15. と同じ)

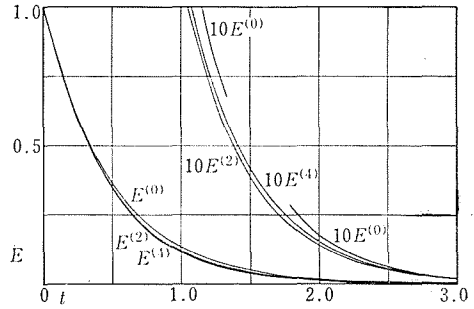


図 2 線スペクトル・モデルの減衰,  $R=1$

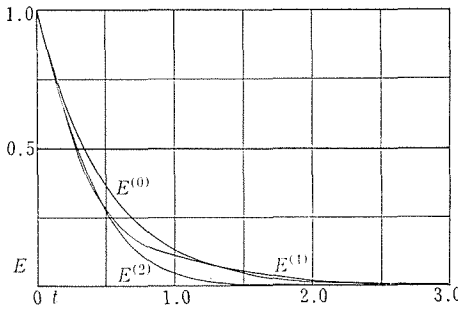


図 3 線スペクトル・モデルの減衰,  $R=2$

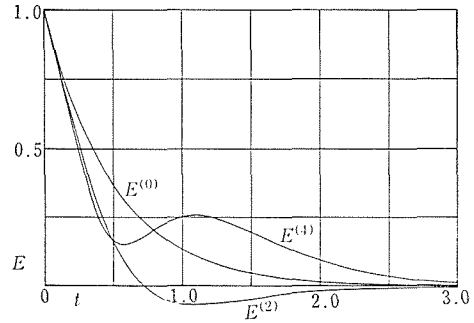


図 4 線スペクトル・モデルの減衰,  $R=3$

この実例について 4 次近似解の性格を考察してみよう.

(1)  $t \ll 1$  のとき, 上の結果を  $t$  のべき級数に展開すれば,

$$J_4^I(t) = -\frac{1}{4}t^4 + O(t^5), \quad J_4^{II}(t) = -\frac{24}{5}t^5 + O(t^6) \quad (3\cdot8)$$

であって, 準正規成分は 4 次, 4 次キュムラント成分は 5 次の項から始まる. また,  $t \rightarrow \infty$  のときは, 漸近的に

$$J_4^I(t) \sim \frac{3}{64}e^{-2t}, \quad J_4^{II}(t) \sim \frac{1}{24}e^{-2t} \quad (3\cdot9)$$

となり, 両者はほぼ等しい. 中間の  $t$  の値に対しても両者の寄与は, 図 1 に見るように, 同程度の大きさで, どちらかを無視するわけには行かないことが分る. これは, いわゆる

準正規分布理論および Deissler 理論が含む誤差を量的に示すものに他ならない。

なお、II; (4・34), (4・35) によれば、同じ例  $\delta$  に対し、

$$t \ll 1 \text{ のとき, } \quad J_0(t) = 1 - 2t + O(t^2), \quad J_2(t) = -2t^3 + O(t^4), \quad (3 \cdot 10)$$

$$t \rightarrow \infty \text{ のとき, } \quad J_0(t) \sim e^{-2t}, \quad J_2(t) \sim -\frac{1}{4} e^{-2t} \quad (3 \cdot 11)$$

が得られる。

(2)  $J_4^I(t)$ ,  $J_4^{II}(t)$  とともに、従って  $J_4(t)$  自身も、 $t$  が小さいときは負であるが、大よそ  $t \sim 0.5$  付近で正に転じ、以後正である (図 1)。このことは、2 次近似解における負エネルギーの発生 (II; 5 節 (1)) が 4 次近似では多少とも緩和される傾向にあることを示唆し、事実  $R = 1.2$  の場合に減衰曲線の改善を認めることができる (図 2, 3)。線スペクトル以外の初期分布については直接例証されていないが、2 次近似における諸例 (II; 4 節) からみて、定性的には一般になりたつ事柄と予想されよう。

(3) このように、減衰曲線が正に止まる限界は、4 次近似では 2 次近似よりも拡大される (いまの例では  $R > 2$  まで) けれども、一方  $J_4(t)$  が正の極大をもつために、 $R$  を増せば減衰曲線の単調減少性が失われて不合理となる (図 4)。結局、Reynolds 数展開による摂動方式が有効な範囲は、近似を進めてもほとんど変わらない。その意味で、弱い乱れの理論としては、2 次近似までをとれば実用上は十分であると考えられる。

(4)  $t \rightarrow \infty$  のときに  $J_0$ ,  $J_2$ ,  $J_4$  がすべて  $e^{-2t}$  に比例する ((3・9), (3・11)) ことは、II; 5 節 (4) でもふれた問題点であり、これについては初期非正規分布の簡単な場合を取扱った後、第 5 節でさらに詳しく述べる。

#### 4. 1 次近似 (初期非正規分布)

II; 3 節で述べたように、 $t = 0$  における正規確率分布からの外れは、高次の初期スペクトル関数  $\phi_2(k, l)$ ,  $\phi_3(k, l, m)$ , ... によって与えられる。それらは逐次に  $R$ ,  $R^2$ , ... の程度で  $R$  の高次の項に影響を及ぼすが、ここではその一例として初期の歪み度 (skewness) を規定する  $\phi_2(k, l)$  だけが 0 でない場合の 1 次近似を取り上げよう。

必要な方程式は II; (4・4), (4・5) であるが、これをまとめて

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + 2k^2 \right) \phi_{1,1}(k; t) &= \lambda_{1,0}(k; t) \\ &= ik \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(k, l) \exp(-2(k^2 + kl + l^2)t) dl \\ &= \exp(-2k^2 t) \int_{-\infty}^{\infty} [ik \phi_2(k, l)] \exp(-2l(k+l)t) dl \end{aligned} \quad (4 \cdot 1)$$

と書くことが出来る。ここに、 $ik \phi_2(k, l)$  は  $t = 0$  で波数  $l$  から  $k$  へのエネルギー伝達を表わす交換関数であり、これに対してつぎの諸条件がみたさなければならない (付録 1) :

$$(i) \quad \phi_2(k, l) = \phi_2(l, k) = -\phi_2^*(k, l) = -\phi_2(-k, -l). \quad (4.2)$$

$$(ii) \quad \phi_2(k, l) = \phi_2(l, \sigma) = \phi_2(\sigma, k), \quad \text{ただし } \sigma = -(k+l). \quad (4.3)$$

$$(iii) \quad |k|, |l| \rightarrow \infty \text{ のとき } |k\phi_2(k, l)| \rightarrow 0 \quad (4.4)$$

これらをみたま限り、 $\phi_2(k, l)$  は  $\phi_1(k)$  と独立な初期条件とみなされる (II; 3 節)\*.

そこで、もっとも簡単な実例として

$$\phi_2(k, l) = -2i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \beta k l \sigma \exp(-2(k^2 + kl + l^2)) \quad (4.5)$$

と仮定しよう。ただし、 $\beta$  は  $O(1)$  の実定数で、 $\beta > 0$  はカスケード、 $\beta < 0$  は逆カスケードのモデルに相当する。(4.5) が適切な関数形の一つであることは明らかであろう\*\*。これを (4.1) に代入すれば、ただちに

$$\lambda_{1,0}(k; t) = \frac{\beta}{2} [k^4(t+1)^{-1/2} - k^2(t+1)^{-3/2}] \exp\left(-\frac{3}{2} k^2(t+1)\right), \quad (4.6)$$

$$\phi_{1,1}(k; t) = \beta k^2 \left[ (t+1)^{-1/2} - \exp\left(-\frac{k^2}{2} t\right) \right] \exp\left(-\frac{3}{2} k^2(t+1)\right), \quad (4.7)$$

$$J_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{1,1}(k; t) dk = -\sqrt{2\pi} \beta \left[ \frac{1}{8} \left(t + \frac{3}{4}\right)^{-3/2} - \frac{1}{3\sqrt{3}} (t+1)^{-2} \right] \quad (4.8)$$

が得られる。それぞれのグラフを  $\beta = 1$  として図5. ~7. に示した。

この結果は0次近似と独立であって、例えばII; 例A, Bと組合せてもよいが、一般に  $\phi_{1,0} \propto \exp(-2k^2 t)$  は  $t \rightarrow \infty$  で(4.7)の  $\phi_{1,1}$  よりもはやく減衰する関数であるから、2次近似 (II; 5 節), 4次近似(前節)で指摘した所に似た摂動の破綻が予想される。かりに  $\phi_2(k, l)$  として(4.5)とちがったものを用いても、 $\phi_{2,0} \propto \exp(-2(k^2 + kl + l^2)t)$  (II; (4.5))

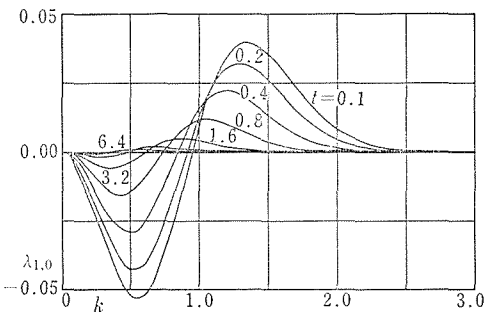


図5 1次伝達関数  $\lambda_{1,0}(k; t)$  の例 (式(4.6),  $\beta = 1$ ).

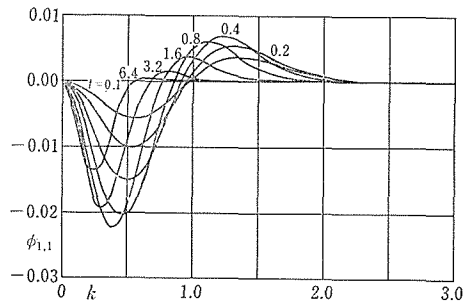


図6 1次スペクトル関数  $\phi_{1,1}(k; t)$  の例 (式(4.7),  $\beta = 1$ ).

\* 物理的には、 $t = 0$  で  $u(x)$  の Fourier-Stieltjes 成分間の位相関係を適当に設定することに相当する。

\*\*同様に、例えば  $\phi_2(k, l) \propto i k l \sigma (k^2 + kl + l^2)^n \exp(-2(k^2 + kl + l^2))$ , ( $n$  は正整数  $> 1$ ) などの形のものをとることも出来る。

の解)である以上, 1次近似解が因子  $\exp\left(-\frac{3}{2}k^2t\right)$  を含むことはさげられないのである. これらの問題について, 次節で多少の考察を加えたい.

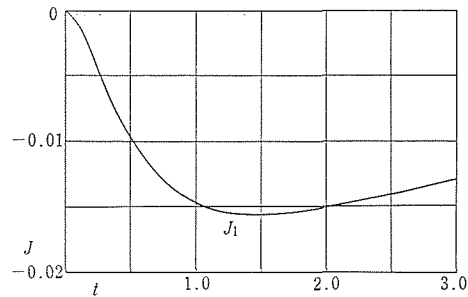


図7 1次減衰関数  $J_1(t)$  の例(式(4・8),  $\beta = 1$ ).

## 5. 弱い乱れのパラドックス

IIとそれに引続いて得た各次の近似解は, すべて解析的に求められたもので,  $R$ が小さい限り全体としては0次近似からの外れを適切に表現していると思われるが, すでに繰返し述べたように,  $k, t$ の全変域についてそうであるとはいえない. おもな問題点をまとめると,

(1) 2次近似解において,  $k, t$ が大きいときエネルギー・スペクトルの主要項は,

例Aの場合: II; (4・19), (4・20)より

$$\phi_{1,0} \sim k^2 \exp(-2k^2t), \quad \phi_{1,2} \sim k^2 t^{-1/2} \exp(-k^2t), \quad (5.1)$$

例Bの場合: II; (4・26), (4・27)より

$$\phi_{1,0} \sim k^4 \exp(-2k^2t), \quad \phi_{1,2} \sim k^6 t^{-1/2} \exp(-k^2t) \quad (5.2)$$

(数係数省略)となる. 何れも絶対値の大きさでは問題にならないが,  $\phi_{1,2}/\phi_{1,0}$ の比は因子  $\exp(+k^2t)$  を含むので  $k, t$ と共に発散してしまう. すなわち

$$|\phi_{1,2}/\phi_{1,0}| \gg 1 \quad (5.3)$$

であって, これは摂動の原理に矛盾する(II; p.46).

(2) エネルギー減衰則は,  $t \rightarrow \infty$ で例A, B,  $\delta$ に対しそれぞれ

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\sqrt{2}} t^{-3/2} + R^2 \left[ \frac{1}{16} t^{-3/2} + O(t^{-5/2}) \right] + \dots, \end{array} \right. \quad (5.4)$$

$$\frac{E(t)}{E(0)} \sim \left\{ \begin{array}{l} t^{-5/2} + R^2 \left[ \frac{1}{24\sqrt{2}} t^{-3/2} + O(t^{-5/2}) \right] + \dots, \end{array} \right. \quad (5.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{-2t} - \frac{1}{4} R^2 e^{-2t} + \frac{17}{192} R^4 e^{-2t} + \dots. \end{array} \right. \quad (5.6)$$

(II; (4・22), (4・23), (4・29), (4・30), (4・34), (4・35) および本報(3・9)参照)であるから,  $R$ がどれ程小さくても,  $t \rightarrow \infty$ のとき初項(0次近似)に漸近しない. この結果は, 時間の経過と共に正規分布に近づいて最終的には0次近似解が実現するという減衰末期理論<sup>6)</sup>の期



待に反している (II; p. 46)\*.

(3) 1次近似解は0次近似と独立にきまるが, 一般に  $\phi_{1,1}$  は  $\exp(-3k^2t/2)$  の因子をもち,  $k, t$  の大きい値に対し上記(1)と同じような意味で  $|\phi_{1,1}/\phi_{1,0}| \gg 1$  となることは前節の終りで述べた.

これらを一括して "弱い乱れのパラドックス" と呼ぼう<sup>8)</sup>. 要するに, 時間が十分に経てば高波数領域で摂動級数はたしかに発散する, というのである. しかも, このパラドックスは計算で仮定した初期スペクトル関数の形によるものではなく, 方程式系の構造そのものに由来すると考えなくてはならない. 例えば2次近似の場合, II; (4.13) でみるように,  $\phi_{1,2}$  は波数  $l$  と  $k+l$  に関する合成積 (たたみこみ) の寄与  $h_2(k; t)$  を含んでいる. その被積分関数 (II; (4.15)) の中で

$$e^{-2l(k+l)t} = \exp\left(\frac{k^2t}{2}\right) \cdot \exp\left(-2\left(l + \frac{k}{2}\right)^2 t\right) \quad (5.7)$$

と変形し,  $l + (k/2)$  をあらためて  $l$  と書けば,

$$\begin{aligned} h_2(k; t) &= \frac{k^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(l^2 - \frac{k^2}{4}\right)^2} \left\{ 1 - 2\exp\left(\frac{k^2t}{2}\right) \exp(-2l^2t) \right. \\ &\quad \left. + \exp(k^2t) \exp(-4l^2t) \right\} \phi_1\left(l - \frac{k}{2}\right) \phi_1\left(l + \frac{k}{2}\right) dl \\ &= U_0(k; t) - 2U_2(k; t) \exp\left(\frac{k^2t}{2}\right) + U_4(k; t) \exp(k^2t) \end{aligned} \quad (5.8)$$

となる. ここに

$$U_n(k; t) = \frac{k^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-nl^2t)}{\left(l^2 - \frac{k^2}{4}\right)^2} \phi_1\left(l - \frac{k}{2}\right) \phi_1\left(l + \frac{k}{2}\right) dl \quad (5.9)$$

は一般に代数関数であるから, II; (4.14)において(5.8)の第2項は  $\exp(-3k^2t/2)$ , 第3項は  $\exp(-k^2t)$  を与え, パラドックス (5.3) に達する\*\*. すなわち, (1) で述べた矛盾は, 本質的に波数  $l$  と  $k+l$  の非線形相互作用自身に起因するものに他ならない. (2) の起源も同じように解される. また1次近似については, (5.7)のおきかえで(4.1)が

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2k^2\right) \phi_{1,1}(k; t) = \exp\left(-\frac{3k^2t}{2}\right) V(k; t) \quad (5.10)$$

( $V$  は代数関数) の形に書かれることから, パラドックス(3)の一般性は明らかである. こ

\* Burgers 方程式は圧力項をもたないから, Batchelor と Proudman<sup>7)</sup> が指摘した意味での "大域構造の時間依存性" は現われない.

\*\* II: (4.15)で  $g_2(k; t)$  の方は, 負エネルギーを与えるけれども, (II: 5節(1)参照), この点では問題はない.

れは3次スペクトル  $\phi_2$  の減衰率が  $2(k^2 + kl + l^2)$  に比例することによる。

以上のような困難は、その性格からみて、さらに近似の次数を高めるごとに引き続き起り得るものであり、当面さけることは出来ないと考えられる。これらの解析は、Navier-Stokes 方程式が支配する3次元乱れについても、原理的には全く同様に進められるので、そこでも本質的に同じ種類のパラドックスが現われる筈である。従来はふつう数値積分などによる近似評価が行なわれたため、この矛盾が特に注意をひかなかつたのであろう。一方、Kraichnan<sup>9)</sup> は、さき大局的な考察から、Reynolds 数級数は収束半径が  $R=0$  となる可能性もあることを示唆し、 $R \ll 1$  の場合にも形式的な摂動方式が適用できる保証はないと主張して、 $R=0$  に特異性をもつ非線形方程式の一例をあげた。しかし、乱れの方程式に関しては、現在まだ直接的な数学的証明も実例による吟味もみられないようである。その意味で、本報の結果は、1次元モデルについてはあるが、その批判がたしかにあてはまることを示すものと思われる。

実際、 $t \neq 0$  のとき、0次近似

$$\phi_{1,0}(k; t) = \phi_1(k) \exp(-2k^2 t) \quad (5 \cdot 11)$$

は  $k$  の大きい所で急速に減少し、事実上ある波数 ( $k_*$  としよう) 以上へのエネルギー配分は0とみてよい。そこで、 $k < k_*$  の領域から  $k > k_*$  の領域へエネルギーを移す非線形相互作用の効果は、たとえそれが十分に弱くて、エネルギーの大部分を含むスペクトル主要部については相対的に小さくても、波数が  $k_*$  より大きい部分にとってはもはや“小さい”摂動とみることが許されないわけである。同様な摂動の特異性は逐次の各段階についてもいえるので、弱い乱れのパラドックスはその具体的なあらわれと解すべきであろう。非線形問題ではこの種の困難が存在することも必ずしも稀でない。

これらの事情を考慮すると、非線形項を単純に無視した(5・11)自身の再検討\*を含め、パラドックスを適切に解消するためには、非線形振動や境界層近似で開発された“特異摂動”の概念<sup>11)</sup>が有効でないかと予想されるが、その当否は今後の問題として続報にまきたい。

## 6. む す び

弱い一様な乱れの理論を整備する目的で、Iにおいては3次元非圧縮の場合に対する階級方程式の構造を一般的に示すと共に、Reynolds 数級数展開方式の原理的構成を定式化し、II以後でこれを1次元モデルに適用して具体的な逐次近似解の数例を求めた。結果的に、 $R$ が小さい限りエネルギー・スペクトルの主要部については成功とみられるが、 $k, t$ の全変域で“おとなしい”摂動でなく、新しい問題を提起している。乱れが、高 Reynolds 数の極限とは別に、低 Reynolds 数の極限でも特異性をもつことは、深い興味と同時に予想を超える事態の複雑性を物語りものといわなければならない。

この研究は一部文部省科学研究費の援助をうけ、また Annual Meeting of the Fluid Dynamics Division, American Physical Society, San Diego 1971 で報告された内容

\* 水中の等方性乱流に対する Ling と Huang の最近の測定<sup>10)</sup>は、これに関連して注目される。

を含む。おわりに、IIに引き続き数値計算、図面作成などに協力を得た機械工学科教官土屋良明、池田敏彦の両氏および大学院学生長谷川茂雄、舟田敏雄、研究生大沢彰示の諸君に謝意を表す。

## 付 録 1

### 3次スペクトルと交換関数の性質

3次スペクトル  $\phi_2(k, l; t)$  の定義式

$$\langle u(x)u(x+r)u(x+r') \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(k, l; t) \exp[i(kr + lr')] dk dl \quad (i)$$

で  $r$  と  $r'$  を交換しても結果に変わりはないから、

$$\phi_2(k, l; t) = \phi_2(l, k; t). \quad (A1)$$

$x$  軸を反転すれば、 $u$  の符号が変わるので (II; p. 38, 脚注),

$$\phi_2(k, l; t) = -\phi_2(-k, -l; t). \quad (A2)$$

また、 $u$  の実数性 (II; p. 32, 脚注\*) から

$$\phi_2^*(k, l; t) = \phi_2(-k, -l; t). \quad (A3)$$

(A2), (A3) により  $\phi_2$  は純虚数である。さらに、 $x$  の原点を  $-r$  だけずらせると、乱れの一様性によって

$$\langle u(x)u(x+r)u(x+r') \rangle = \langle u(x)u(x-r)u(x+r'-r) \rangle, \quad (ii)$$

$\sigma = -(k+l)$  に注意して積分変数を適宜変換して行けば、(ii) の右辺は (積分範囲と変数  $t$  の表示を省略)。

$$\begin{aligned} \iint \phi_2(k, l) \exp[i(\sigma r + lr')] dk dl &= \iint \phi_2(-(\sigma + l), l) \exp[i(\sigma r + lr')] d\sigma dl \\ &= \iint \phi_2(-(\sigma + l), l) \exp[i(kr + lr')] dk dl = \iint \phi_2(\sigma, l) \exp[i(kr + lr')] dk dl. \end{aligned}$$

これを (i) と比べて

$$\phi_2(k, l; t) = \phi_2(\sigma, l; t). \quad (A4)$$

原点を  $-r'$  だけずらせると、同様に

$$\phi_2(k, l; t) = \phi_2(k, \sigma; t). \quad (A5)$$

すなわち、 $\phi_2$  は  $k, l, \sigma$  に関する虚の奇対称関数で (式(4.2), (4.3)),  $\phi_2$  方程式は  $t$  にかかわらずこの性質を保存する形になっている。

つぎに、(A2) より直ちに

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(k, l; t) dk dl = 0. \quad (\text{A6})$$

交換関数  $ik\phi_2(k, l; t)$  に対しては, (A1) より

$$\iint k\phi_2(k, l) dk dl = \iint l\phi_2(k, l) dk dl \quad (\text{iii})$$

(A4) と (iii) を用いて

$$\begin{aligned} \iint k\phi_2(k, l) dk dl &= \iint k\phi_2(\sigma, l) dk dl = \iint \sigma\phi_2(k, l) d\sigma dl \\ &= - \iint (k+l)\phi_2(k, l) dk dl = -2 \iint k\phi_2(k, l) dk dl, \end{aligned}$$

従って

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k\phi_2(k, l; t) dk dl = 0 \quad (\text{A7})$$

これは, 交換関数の積分効果が0ということで, エネルギー保存の関係を表わす.

3次元非圧縮乱れの場合には,  $\langle u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}+\mathbf{r})u_k(\mathbf{x}+\mathbf{r}') \rangle$  のスペクトルを  $\phi_{ijk}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; t)$  とするとき, エネルギー交換関数

$$ik_k[\phi_{iik}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; t) - \phi_{ijk}(-\mathbf{k}, -\mathbf{k}'; t)] (=W(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; t) \text{ とする})$$

は, 一様性:

$$\phi_{iik}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; t) = \phi_{kii}(\mathbf{k}'', \mathbf{k}; t) = \phi_{kii}(\mathbf{k}, \mathbf{k}''; t) \quad \text{など,}$$

$(\mathbf{k} + \mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = 0)$  と非圧縮条件:

$$(k_k + k'_k)\phi_{kii}(\mathbf{k}'', \mathbf{k}; t) = 0 \quad (\text{iv})$$

から,  $\mathbf{k}, \mathbf{k}'$  について反対称, すなわち

$$W(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; t) = -W(\mathbf{k}', \mathbf{k}; t) \quad (\text{v})$$

を満足する<sup>6)</sup>. そこで, 直ちにエネルギー保存

$$\int \dots \int W(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; t) d\mathbf{k} d\mathbf{k}' = 0$$

を得るが, Burgers 乱れでは (iv) に相当する条件が存在しないので, (v) のような波数対間の個別的エネルギー保存は成立していないことに注意したい.

付 録 2  
階級方程式の変形

文献 3) に示された方程式の形と本文 2 節の基礎方程式 (2・1) ~ (2・3) を比べる。まず、記号の対応

$$\begin{aligned} A(k, t) &\rightarrow \phi_1(k; t), \\ B(k, k', t) &\rightarrow -c\phi_2(k, l; t), \\ C(k, k', k', t) &\rightarrow -\phi_3(k, l, m; t), \end{aligned}$$

((K12)\* ~ (K14) 参照) に注意すれば、(K16) は (2・1) に相当し、(K17) はつぎのように書かれる：

$$\begin{aligned} &\left[ \frac{\partial}{\partial t} + 2\nu(k^2 + kl + l^2) \right] \phi_2(k, l; t) \\ &= c[(k+l)\phi_1(k; t)\phi_1(l; t) - k\phi_1(l; t)\phi_1(-k-l; t) - l\phi_1(-k-l; t)\phi_1(k; t) \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} m\{\phi_3(k, l, m; t) + \phi_3(k-m, l, m; t) + \phi_3(k, l-m, m; t)\}dm] \quad (K17) \end{aligned}$$

右辺で  $\phi_1$  の積和の部分 (準正規成分) は、明らかに (2・2) のそれと同形であり、 $\phi_3$  の積分の部分 (4 次キュムラント成分) は、一見 (2・2) の形と異なるが、 $\phi_3$  の性質から両者は同等なことが示される：

すなわち、付録 1 と同じ論法により、 $\phi_3(k, l, m; t)$  は、 $k+l+m+\tau=0$  をみたす任意の 3 波数についての偶対称関数である。この性質と積分変数の適当な書きかえを用いて、(K17) の各積分につき (積分範囲と変数  $t$  の表示を省略)、

$$\begin{aligned} \text{第 1 項：} &\int m\phi_3(k, l, m)dm = \int \tau\phi_3(k, l, \tau)d\tau \\ &= - \int (k+l)\phi_3(k, l, \tau)d\tau - \int m\phi_3(k, l, \tau)d\tau = - \int (k+l)\phi_3(k, l, m)dm - \int m\phi_3(k, l, m)dm, \end{aligned}$$

従って

$$\int m\phi_3(k, l, m)dm = -\frac{1}{2}(k+l)\int \phi_3(k, l, m)dm. \quad (B1)$$

$$\begin{aligned} \text{第 2 項：} &\int m\phi_3(k-m, l, m)dm = \int (k-m)\phi_3(m, l, k-m)dm \\ &= \int k\phi_3(m, l, k-m)dm - \int m\phi_3(k-m, l, m)dm, \end{aligned}$$

しかるに、引数の対称性から  $(m+l+(k-m)-(k+l)=0)$

\* (K12) は Kawahara<sup>3)</sup> の式 (12) をさす。以下同じ。

$$\phi_3(m, l, k - m) = \phi_3(l, -k - l, m)$$

が成り立ち、結局

$$\int m \phi_3(k - m, l, m) dm = \frac{k}{2} \int \phi_3(l, -k - l, m) dm. \quad (B2)$$

第3項：上と同様に

$$\int m \phi_3(k, l - m, m) dm = \frac{l}{2} \int \phi_3(-k - l, k, m) dm. \quad (B3)$$

の諸式を得る。故に、4次キュムラント成分は、

$$-\frac{t}{2} \sum_C^{k, l, \sigma} \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \phi_3(k, l, m; t) dm \quad (B4)$$

の形にまとめられ、このような  $\phi_2$  方程式を無次元形にして Reynolds 数級数に展開すれば、(2・2)はその  $R^3$  の項である ( $R$ の項はII; (4・9))。さらに、 $\phi_3$  方程式(2・3)を書きくだすと、(K18)にまったく一致することがわかる。

### 付 録 3

#### 準正規成分の構造

式(2・6)と(2・12)によって、 $\phi_{1,4}^I(k; t)$  の積分核は、

$$\begin{aligned} & \frac{k}{2} \phi_{2,2}^I(l, -k - l; t'') - (k + l) \phi_{2,2}^I(k, l; t'') \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} K^I(k, l, m; t'') dm \end{aligned} \quad (C1)$$

で与えられるから、これに  $\phi_{2,2}^I$  の陽な表式(2・10)を用いる。同類項を整理した結果は、図式的に

$$\begin{aligned} & K^I(k, l, m; t'') \\ & = \begin{cases} \sigma_1 \exp(-2(k^2 + l^2)t'') \begin{cases} \bar{G}(k, l, m; t'') [k \cdot l \cdot m] \\ H(l, m; t'') [k \cdot l \cdot \sigma_2] \\ H(k, m; t'') [k \cdot l \cdot \sigma_3] \end{cases} \\ k \exp(-2(l^2 + \sigma_1^2)t'') \begin{cases} \frac{1}{2} \bar{G}(l, \sigma_1, m; t'') [l \cdot \sigma_1 \cdot m] \\ H(l, m; t'') [\sigma_1 \cdot m \cdot \sigma_2] \end{cases} \end{cases} \end{aligned} \quad (C2)$$

と書ける。ここでよこには積を、たてには和をとるものとする。また簡単のため

$$\bar{G}(k, l, m; t) = G(k, m; t) + G(l, m; t) \quad (C3)$$

(式(2・11)参照), および

$$-(k+l) = \sigma_1 (= \sigma), \quad -(l+m) = \sigma_2, \quad -(m+k) = \sigma_3 \quad (C4)$$

とおき, 初期エネルギー・スペクトルの3重積を

$$\phi_1(k)\phi_1(l)\phi_1(m) = [k \cdot l \cdot m] \quad (C5)$$

のように略記した. (C4), (C5) の記法は以下も用いる.

#### 付 録 4

##### 4次キュムラント成分の構造

$K^{\text{II}}(k, l, m; t'')$  は, (2・3), (2・14), (2・17) によって,

$$\left. \begin{aligned} L_1(k, l, m; t'', t''') &= \sigma_1 \lambda_{3,1}(k, l, m; t''') \exp(2(k^2 + kl + l^2 + km + lm + m^2)(t'' - t''')) \\ L_2(k, l, m; t'', t''') &= k \lambda_{3,1}(l, \sigma_1, m; t''') \exp(2(k^2 + kl + l^2 - km + m^2)(t'' - t''')) \end{aligned} \right\} (D1)$$

とおくとき

$$K^{\text{II}}(k, l, m; t'') = \int_0^{t''} (L_1 + \frac{1}{2} L_2) dt''' \quad (D2)$$

で与えられる.  $\lambda_{3,1}(k, l, m; t''')$  は  $\phi_{3,2}(k, l, m; t''')$  の積分核であって, その枝分れは, (2・3), (2・14) から(時間変数  $t'''$  省略),

$$\lambda_{3,1}(k, l, m) = -\frac{\tau}{2} \begin{cases} \tau \psi_{3,1}(k, l, m) = 2\tau \begin{cases} \phi_{1,0}(k)\phi_{2,1}(l, m) \\ \phi_{1,0}(l)\phi_{2,1}(m, k) \\ \phi_{1,0}(m)\phi_{2,1}(k, l) \end{cases} \\ k \psi_{3,1}(l, m, \tau) = 2k \begin{cases} \phi_{1,0}(l)\phi_{2,1}(m, \tau) \\ \phi_{1,0}(m)\phi_{2,1}(\tau, l) \\ \phi_{1,0}(\tau)\phi_{2,1}(l, m) \end{cases} \\ l \psi_{3,1}(m, \tau, k) = 2l \begin{cases} \phi_{1,0}(m)\phi_{2,1}(\tau, k) \\ \phi_{1,0}(\tau)\phi_{2,1}(k, m) \\ \phi_{1,0}(k)\phi_{2,1}(m, \tau) \end{cases} \\ m \psi_{3,1}(\tau, k, l) = 2m \begin{cases} \phi_{1,0}(\tau)\phi_{2,1}(k, l) \\ \phi_{1,0}(k)\phi_{2,1}(l, \tau) \\ \phi_{1,0}(l)\phi_{2,1}(\tau, k) \end{cases} \end{cases} \quad (D3)$$

ただし

$$\tau = -(k+l+m). \quad (D4)$$

(D3)の各項は(2・15)によりそれぞれ3項ずつに分れるので, 結局36項にわけられる.  $\lambda_{3,1}(l, \sigma_1, m; t''')$  についてもこれに準じればよい. さらに, 波数  $m$  についての積分を行なった時に同じ結果を与えるような項をまとめると,  $L_1, L_2$  に対して表1を得る.

$$\begin{array}{l}
L_1: \\
\left. \begin{array}{l}
2\tau \\
e(-2k\sigma_2) \\
e(-2l\sigma_3) \\
e(-2m\sigma_1)
\end{array} \right\} \begin{array}{l}
\left\{ \begin{array}{l}
\sigma_2 Q(2lm) [k \cdot l \cdot m] \\
lQ(2m\sigma_2) [k \cdot m \cdot \sigma_2] \\
mQ(2l\sigma_2) [k \cdot l \cdot \sigma_2]
\end{array} \right. \\
\left\{ \begin{array}{l}
\sigma_3 Q(2km) [k \cdot l \cdot m] \\
kQ(2m\sigma_3) [l \cdot m \cdot \sigma_3] \\
mQ(2k\sigma_3) [k \cdot l \cdot \sigma_3]
\end{array} \right. \\
\left\{ \begin{array}{l}
\sigma_1 Q(2kl) [k \cdot l \cdot m] \\
kQ(2l\sigma_1) [l \cdot m \cdot \sigma_1] \\
lQ(2k\sigma_1) [k \cdot m \cdot \sigma_1]
\end{array} \right.
\end{array} \\
\left. \begin{array}{l}
\epsilon_1 \sigma_1 \\
k \\
e(2l\sigma_1) \\
e(2m\sigma_3) \\
e(-2\sigma_2\tau)
\end{array} \right\} \begin{array}{l}
\left\{ \begin{array}{l}
-\sigma_1 Q(2m\tau) [l \cdot m \cdot \tau] \\
mQ(-2\sigma_1\tau) [l \cdot \sigma_1 \cdot \tau] \\
\tau Q(-2m\sigma_1) [l \cdot m \cdot \sigma_1]
\end{array} \right. \\
\left\{ \begin{array}{l}
-\sigma_3 Q(2l\tau) [l \cdot m \cdot \tau] \\
lQ(-2\sigma_3\tau) [m \cdot \sigma_3 \cdot \tau] \\
\tau Q(-2l\sigma_3) [l \cdot m \cdot \sigma_3]
\end{array} \right. \\
\left\{ \begin{array}{l}
\sigma_2 Q(2lm) [l \cdot m \cdot \tau] \\
lQ(2m\sigma_2) [m \cdot \sigma_2 \cdot \tau] \\
mQ(2l\sigma_2) [l \cdot \sigma_2 \cdot \tau]
\end{array} \right.
\end{array} \\
\left. \begin{array}{l}
l \\
e(2k\sigma_1) \\
e(2m\sigma_2) \\
e(-2\sigma_3\tau)
\end{array} \right\} \begin{array}{l}
\left\{ \begin{array}{l}
-\sigma_1 Q(2m\tau) [k \cdot m \cdot \tau] \\
mQ(-2\sigma_1\tau) [k \cdot \sigma_1 \cdot \tau] \\
\tau Q(-2m\sigma_1) [k \cdot m \cdot \sigma_1]
\end{array} \right. \\
\left\{ \begin{array}{l}
-\sigma_2 Q(2k\tau) [k \cdot m \cdot \tau] \\
kQ(-2\sigma_2\tau) [k \cdot \sigma_2 \cdot \tau] \\
\tau Q(-2k\sigma_2) [k \cdot m \cdot \sigma_2]
\end{array} \right. \\
\left\{ \begin{array}{l}
\sigma_3 Q(2km) [k \cdot m \cdot \tau] \\
kQ(2m\sigma_3) [m \cdot \sigma_3 \cdot \tau] \\
mQ(2k\sigma_3) [k \cdot \sigma_3 \cdot \tau]
\end{array} \right.
\end{array} \\
L_2: \\
\left. \begin{array}{l}
e(2l\tau) \\
e(-2\sigma_1\sigma_4) \\
e(2km)
\end{array} \right\} \begin{array}{l}
\left\{ \begin{array}{l}
-\tau Q(-2m\sigma_1) [l \cdot m \cdot \sigma_1] \\
\sigma_1 Q(2m\tau) [l \cdot m \cdot \tau] \\
-mQ(-2\sigma_1\tau) [l \cdot \sigma_1 \cdot \tau]
\end{array} \right. \\
\left\{ \begin{array}{l}
\sigma_4 Q(-2lm) [l \cdot m \cdot \sigma_1] \\
lQ(-2m\sigma_4) [m \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_4] \\
-mQ(2l\sigma_4) [l \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_4]
\end{array} \right. \\
\left\{ \begin{array}{l}
kQ(2l\sigma_1) [l \cdot m \cdot \sigma_1] \\
lQ(2k\sigma_1) [k \cdot m \cdot \sigma_1] \\
\sigma_1 Q(2kl) [k \cdot l \cdot m]
\end{array} \right.
\end{array} \\
\left. \begin{array}{l}
\epsilon_2 k \\
l \\
e(2k\sigma_1) \\
e(-2m\sigma_4) \\
e(-2\sigma_3\tau)
\end{array} \right\} \begin{array}{l}
\left\{ \begin{array}{l}
-kQ(2m\sigma_3) [m \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_3] \\
-mQ(2k\sigma_3) [k \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_3] \\
-\sigma_3 Q(2km) [k \cdot m \cdot \sigma_1]
\end{array} \right. \\
\left\{ \begin{array}{l}
-\sigma_4 Q(-2\sigma_1\sigma_3) [m \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_3] \\
\sigma_1 Q(2\sigma_3\sigma_4) [m \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4] \\
-\sigma_3 Q(-2\sigma_1\sigma_4) [m \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_4]
\end{array} \right. \\
\left\{ \begin{array}{l}
-\tau Q(-2m\sigma_1) [m \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_3] \\
\sigma_1 Q(2m\tau) [m \cdot \sigma_3 \cdot \tau] \\
-mQ(2\sigma_1\tau) [\sigma_1 \cdot \sigma_3 \cdot \tau]
\end{array} \right.
\end{array} \\
\left. \begin{array}{l}
\sigma_1 \\
e(2kl) \\
e(2m\tau) \\
e(2\sigma_3\sigma_4)
\end{array} \right\} \begin{array}{l}
\left\{ \begin{array}{l}
-kQ(2m\sigma_3) [l \cdot m \cdot \sigma_3] \\
-mQ(2k\sigma_3) [k \cdot l \cdot \sigma_3] \\
-\sigma_3 Q(2km) [k \cdot l \cdot m]
\end{array} \right. \\
\left\{ \begin{array}{l}
\tau Q(-2l\sigma_3) [l \cdot m \cdot \sigma_3] \\
lQ(2\sigma_3\tau) [l \cdot \sigma_3 \cdot \tau] \\
-\sigma_3 Q(2l\tau) [l \cdot m \cdot \tau]
\end{array} \right. \\
\left\{ \begin{array}{l}
\sigma_4 Q(-2lm) [l \cdot m \cdot \sigma_3] \\
lQ(-2m\sigma_4) [m \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4] \\
-mQ(2l\sigma_4) [l \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4]
\end{array} \right.
\end{array}
\end{array}$$

$$\epsilon_1 = \exp(-2(k^2 + kl + l^2 + km + lm + m^2)t'''),$$

$$\epsilon_2 = \exp(-2(k^2 + kl + l^2 + km + m^2)t'''),$$

$$e(z) = \exp(zt'''), \quad Q(z) = \frac{1}{2}[1 - e(z)],$$

$$\sigma_1 = -(k + l), \quad \sigma_2 = -(l + m), \quad \sigma_3 = -(k + m), \quad \sigma_4 = -(l - m),$$

$$\tau = -(k + l + m), \quad [k \cdot l \cdot m] = \phi_1(k)\phi_1(l)\phi_1(m).$$

表 1 4次キユムラント成分の構造 (式 (2.16), (D1), (D2) 参照)

ここに,  $m$  で積分することを考慮すれば,

$$L_2(k, l, m; t'', t''') = L_1(l, \sigma_1, -m; t'', t''') \quad (D4)$$

としてよく,  $L_1$  において

$$k \rightarrow l, \quad l \rightarrow \sigma_1, \quad m \rightarrow -m \quad (D5)$$

従って

$$\left. \begin{array}{l}
\sigma_1 \rightarrow -(l + \sigma_1) = k, \quad \sigma_2 \rightarrow -(\sigma_1 - m) = -\tau, \\
\sigma_3 \rightarrow -(l - m) = \sigma_4, \quad \tau \rightarrow -(l + \sigma_1 - m) = -\sigma_3
\end{array} \right\} \quad (D6)$$



とおきかえたものが  $L_2$  となる.

## 文 献

- 1) 大路通雄：弱い一様な乱れの理論 I. "九大応力研所報" 第21号 (1963) 57. (文中 I と略記)
- 2) 大路通雄：弱い一様な乱れの理論 II. "信州大工学部紀要" 第29号 (1970) 31. (文中 II と略記)
- 3) T. Kawahara: A successive approximation for turbulence in the Burgers model fluid, *J. Phys. Soc. Japan* **25** (1968) 892.
- 4) I. Proudman & W. H. Reid: On the theory of a normally distributed and homogenous turbulent velocity field, *Philos. Trans. A* **247** (1954) 163; T. Tatsumi: The theory of decay process of incompressible isotropic turbulence, *Proc. Roy. Soc. A* **239** (1957) 16.
- 5) R. G. Deissler: A theory of decaying homogeneous turbulence *Phys. Fluids* **3** (1960) 176.
- 6) J. O. Hinze: *Turbulence*. McGraw-Hill (1959); J. C. Rotta: *Turbulente Strömungen*. B. G. Teubner Stuttgart (1972).
- 7) G. K. Batchelor & I. Proudman: The large-scale structure of homogeneous turbulence, *Philos. Trans. A* **248** (1956) 369.
- 8) 大路通雄：弱い乱れのパラドックス. "第4回乱流シンポジウム" (1972) 51.
- 9) R. H. Kraichnan: Invariant principles and approximation in turbulence dynamics, *Proc. Sym. Dynamics of Fluids and Plasmas*. Acad. Press (1967) 239.
- 10) S. G. Ling & T. T. Huang: Decay of weak turbulence, *Phys. Fluids* **13** (1970) 2912.
- 11) J. D. Cole: *Perturbation method in applied mathematics*. Blaisdell Publ Co. (1968).

## 正 誤 表

### 弱い一様な乱れの理論 II

大路通雄

(紀要第29号, 31~50ページ)

	誤	正
32ページ, 式(2,2)右辺	$= Ru \frac{\partial u}{\partial x}$	$= - Ru \frac{\partial u}{\partial x}$
41ページ, 式(4,23)左辺	$J_1(t) = \dots$	$J_2(t) = \dots$
図5の説明	$R = 0$	$R = 2$
図6の説明	$R = 2$	$R = 0$
43ページ, 式(4,30)左辺	$J_1(t) = \dots$	$J_2(t) = \dots$
図11の説明	$R = 0$	$R = 2$
図12の説明	$R = 2$	$R = 0$
47ページ, 式(8)	$\phi_{2,0}(k, l; t) = \phi_1(k) \dots$	$\phi_{2,0}(k, l; t) = 2\phi_1(k) \dots$
式(10)中辺	$\phi_{2,1}(-k, -l; t)$	$-\phi_{2,1}(-k, -l; t)$

## Summary

### Theory of Weak Homogeneous Turbulence III

Michio OHJI

(Department of Mechanical Engineering)

The expansion in powers of Reynolds number  $R$  for weak homogeneous turbulence of Burgers' model fluid is extended to the fourth approximation. The solution is composed of the "quasi-normal contribution" and the "fourth-cumulant contribution". The quasi-normal approximation retains the former only, while Deissler's approximation is solely concerned with the latter. Mathematical procedures are straightforward in principle but exceedingly tedious in practice because of the generation of very many terms representing a complicated structure of higher order interactions.

As an accessible example, the case of a line spectrum model (Dirac's  $\delta$ -profile) is worked out. It is thus found that both of the quasi-normal and fourth-cumulant contributions are comparable in magnitude and that they remain essentially positive except in an early stage of decay. This result is in favor of delaying the appearance of negative energy spectra to improve the lower approximations partly, yet may produce a "negative decay" when the value of  $R$  is a little too large. Incidentally, the first-order effect of nonnormality in the initial probability distribution is discussed in some detail.

To conclude the paper, a new difficulty associated with the present perturbation scheme is pointed out. All the solutions obtained in this and the preceding reports indicate that the expansion series does not converge at large values of the wave number  $k$ . Neither the final period solution is approached as the decay time  $t$  tends to infinity. These findings are proved to be inherent in the essential character of the problem, and the need of further studies is suggested.