

# 乱流の非線形展開理論とダイアグラム

大 路 通 雄\*  
(昭和47年10月31日受理)

## 1. は し が き

乱流は、流体運動の非常に一般的な形として、学問的興味の点ばかりでなく応用上もきわめて重要な現象でありながら、その本質的な理解には現在なおほど遠い段階にある<sup>1)</sup>。事実、乱流を標語的に要約すれば、“連続無限自由度”をもつ“散逸系”の“非線形”な“不規則過程”であって、どの面をとってみても原理的に困難な課題を含み、まさに三重・四重のかべで囲まれた対象といわなければならない。勿論、乱流が層流と同じ Navier-Stokes (以下 NS と略) 方程式で支配されていることは疑えないとしても、果たして NS 方程式だけで十分なのか、そうでないとすれば他にどれだけの独立な原理が必要なのかすら、必ずしも自明ではない。

たとえば、“速度位相空間における確率保存”の要請を NS 方程式と組合せた特性汎関数方程式は、乱流を最も広く規定するものとみなされる。もしこれを一般かつ厳密に“解く”ことが出来れば問題はないが、今のところそれが無条件に可能であるという保証はなく、実行の方法も確立されていない。また、NS 方程式と独立に“普遍的平衡状態の存在”を仮定すれば、いわゆる Kolmogorov の  $-5/3$  乗スペクトル則が得られるが、これは乱れの機構に立入らない一種の“熱力学的”考察による結果であり、それに具体的な肉づけをすることは、別な問題である。

一方、より伝統的な方法では、直接 NS 方程式から出発し、早い段階で平均操作を行なって低次のモーメントに注目する。このとき、よく知られた階級方程式の困難が必然的に生じるので、これを物理的モデルによって避けるか、形式的なパラメータ展開の打ち切りによって処理するかに応じ、いく通りもの近似理論が提案されてきた。Heisenberg 理論は前者の、Reynolds 数またはキュムラント展開法は後者の代表的な例である。しかし、それらの成功はごく限られたもので、とうてい満足ということは出来ない<sup>1), 2)</sup>。

こうした背景のもとで、乱流理論はふたたび百家争鳴の渦中に入った。その各論は本稿の直接の目的でないので、詳細は文献<sup>1)~4)</sup>にゆずるが、単純に摂動級数を打切るのではなく、各次の近似に非線形相互作用の物理的内容を反映させる多体問題的取扱いの発展が特に注目される。このような手続きは、素朴なモデル (たとえば、渦動粘性、混合距離など) の精密化、体系化と考えられる反面、具体的には形式的展開におけるすべての次数の項をうまく“くりこむ” (consolidate) ことに他ならない。つまり、一度あるパラメータで展開したものを適当に再編成して、実際に近い機構を構成するという考え方である。従って低

\* 機械工学教室 教授

い近似でも強い非線形性を含んでいるから、これを仮りに“非線形展開”と呼ぶことにしよう。一般に、この種の手法は、相互作用の強い系に対する常用手段であるけれども、どのようなくりこみが成功するかは、ふつう事前には分らない。ここでも何か説得力のある選択原理が要求されるのではなからうか\*。

これらの事情を図1に試みに図式化した\*\*。ただし、この稿では、特に非線形展開理論の組織的な見通しを目的としたダイアグラムの取扱いについて、なるべく簡潔に述べることとしたい。

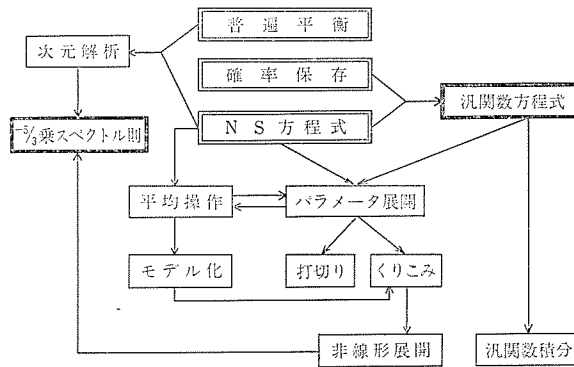


図1 乱流統計理論の構成

## 2. 基本グラフ

場の量子論で散乱のS行列を計算するために Feynman が創案したダイアグラム法<sup>6)</sup>の本質的な長は、複雑な構造をもつ無限級数の部分和を、一定の規則で作られたグラフにより直観的に求め得る点にある。この方法は1955年頃から統計力学や物性論の分野でも広く用いられているが、Wyld<sup>7)</sup>はさらに乱流理論への応用を定式化し、ついで L. L. Lee<sup>8)</sup>はこれを電磁流体力学の範囲まで拡張した\*\*\*。以下では非圧縮性通常流体の場合に限り、しかも一様定常な乱れの場合だけを対象とする。

### (1) 基礎方程式

ソレノイダルな不規則外力  $X_i(\mathbf{x}, t)$  をうける非圧縮性流体の NS 方程式は、慣用の記法で、

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) u_i &= X_i - \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)****$$

\* Kraichnan<sup>9)</sup> が指摘しているように、乱流の場合には、エネルギー保存則や Galilei 変換不変性がひとつの手がかりになると思われるが、ここではその問題には立ち入らない。

\*\* 図1で2重枠は基本原理、太い枠は一般法則、細い枠は数字の手続きを示し、矢印の方向に進む。

\*\*\* 独立に Kraichnan<sup>9)</sup> あるいは Edwards<sup>10)</sup> によって用いられた別な形のダイアグラムもあるが、ここではより一般的でわかりやすい Wyld-Lee の方式に従う。

\*\*\*\* 外力の非ソレノイダル部分はポテンシャル力として圧力  $p$  に吸収できる。

いま、体積  $V(=L^3)$ 、時間  $T$  の中で一様定常な乱れの場合を考え、波数  $\mathbf{k}$  と角振動数  $\omega$  を成分とする 4 元ベクトル  $\boldsymbol{\kappa}$  を導入して、4 次元 Fourier 分解

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} u_i(\mathbf{x}, t) \\ X_i(\mathbf{x}, t) \end{array} \right\} &= \frac{1}{\sqrt{VT}} \sum_{\boldsymbol{\kappa}} \left\{ \begin{array}{l} v_i(\boldsymbol{\kappa}) \\ f_i(\boldsymbol{\kappa}) \end{array} \right\} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}; \\ \boldsymbol{\kappa} &= (\mathbf{k}, \omega) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

を行なえば\*, 式(1)は、圧力項を消去した形で

$$\left. \begin{aligned} (-i\omega + \nu k^2)v_i(\boldsymbol{\kappa}) &= f_i(\boldsymbol{\kappa}) - \frac{i}{2\sqrt{VT}} \Delta_{ijm}(\mathbf{k}) \sum_{\boldsymbol{\kappa}'} v_j(\boldsymbol{\kappa}') v_m(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}'), \\ k_i v_i(\boldsymbol{\kappa}) &= k_i f_i(\boldsymbol{\kappa}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

に変換される。ただし、

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{ijm}(\mathbf{k}) &= k_m \Delta_{ij}(\mathbf{k}) + k_j \Delta_{im}(\mathbf{k}); \\ \Delta_{ij}(\mathbf{k}) &= \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

さらに、(3)式右辺の非線形項が結合パラメータ  $g$  を含むものと解釈し、二つの演算子

$$\text{プロパゲータ (propagator)** : } S_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{-i\omega + \nu k^2} \Delta_{ij}(\mathbf{k}), \quad (5)$$

$$\text{バーテックス (vertex)*** : } P_{ijm}(\boldsymbol{\kappa}) = -\frac{i}{2\sqrt{VT}} \Delta_{ijm}(\mathbf{k}) \quad (6)$$

を定義すると、(3)式は

$$v_i(\boldsymbol{\kappa}) = S_{il}(\boldsymbol{\kappa}) [f_l(\boldsymbol{\kappa}) + g P_{ljm}(\boldsymbol{\kappa}) \sum_{\boldsymbol{\kappa}'} v_j(\boldsymbol{\kappa}') v_m(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}')] \quad (7)$$

と書くことが出来る。パラメータ  $g$  は、具体的には Reynolds 数と考えてよい。つぎに  $v_i(\boldsymbol{\kappa})$  の形式的  $g$  べき級数展開

$$v_i(\boldsymbol{\kappa}) = v_i(\boldsymbol{\kappa})_0 + g v_i(\boldsymbol{\kappa})_1 + g^2 v_i(\boldsymbol{\kappa})_2 + \dots \quad (8)$$

を仮定するが、ここで  $g$  を必らずしも小さいパラメータとみなさない点<sup>†</sup>が、単純な摂動法とのちがいである。

## (2) $v$ -グラフ

\*  $V, T$  の外部へは周期性の条件で接続し、最後の結果で  $V \rightarrow \infty, T \rightarrow \infty$  とする。厳密な Fourier-Stieltjes 変換にしばしば代用される便法である。

\*\* Green 関数に相当する。

\*\*\* ふつう因子  $g$  は  $P_{ijm}$  の定義式に含まれるが、ここではくりこみの意味を強調するため (6) のように定義した。

展開(8)の各項は(7)式により結局  $v_i(\boldsymbol{\kappa})_0$  に帰着するが、その複雑な構成を系統的かつ直観的に示すために、つぎのダイアグラム要素が用いられる：

$$S_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) \leftrightarrow \frac{(\boldsymbol{\kappa})}{i \quad j} \quad (\text{細い直線}) \tag{9}$$

$$P_{ijm}(\boldsymbol{\kappa}) \leftrightarrow \begin{matrix} i \\ j \cdot m \end{matrix} \quad (\text{小さい黒点}) \tag{10}$$

すなわち、(8)式を方程式(7)に代入し、 $g$  の同べきの項を比べると、逐次に

$$\left. \begin{aligned} v_i(\boldsymbol{\kappa})_0 &= S_{il}(\boldsymbol{\kappa})f_l(\boldsymbol{\kappa}) && \longleftrightarrow \text{---} f \\ v_i(\boldsymbol{\kappa})_1 &= S_{il}(\boldsymbol{\kappa})P_{ljm}(\boldsymbol{\kappa}) \sum_{\boldsymbol{\kappa}'} v_j(\boldsymbol{\kappa}')_0 v_m(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}')_0 && \longleftrightarrow \text{---} \bullet \begin{matrix} / f \\ \backslash f \end{matrix} \\ v_i(\boldsymbol{\kappa})_2 &= S_{il}(\boldsymbol{\kappa})P_{ljm}(\boldsymbol{\kappa}) \sum_{\boldsymbol{\kappa}'} 2v_j(\boldsymbol{\kappa}')_0 v_m(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}')_1 && \longleftrightarrow 2 \text{---} \bullet \begin{matrix} / f \\ \backslash f \end{matrix} \\ &\dots && \dots \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

のようなグラフ(波数, 添字省略)を得る. 勿論, ここではグラフの位相的構造だけが問題である. そこで, もっと簡単には,  $\text{---} f \leftrightarrow v_i(\boldsymbol{\kappa})_0$  の枝をすべて省くことに約束し,  $v_i(\boldsymbol{\kappa})_1$  以下を

$$\left. \begin{aligned} v_i(\boldsymbol{\kappa})_1 &\longleftrightarrow \text{---} \bullet \\ v_i(\boldsymbol{\kappa})_2 &\longleftrightarrow 2 \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\ v_i(\boldsymbol{\kappa})_3 &\longleftrightarrow 4 \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet + \text{---} \bullet \begin{matrix} / \\ \backslash \end{matrix} \\ &\dots \end{aligned} \right\} \tag{12}^*$$

としてもよい. バーテックスは必ず3本の線要素につながるから,  $\text{---} \bullet$  のときは2本,  $\text{---} \bullet \text{---}$  のときは1本の  $\text{---} f$  を省いてあることが直ちに分る. そこで, 以後は常にこのように簡略化しよう. これらの  $v$ -グラフは, いずれも木の枝構造をもち, 開放端にはじまってバーテックスにおわる. その一般規則として,

- (a)  $n$  次の  $v$ -グラフは  $n$  個のバーテックスを含み, 閉じたループをもたない.
- (b) バーテックスでは波数が保存する(左の波数=右の波数の和)\*\*.
- (c) バーテックス自身の波数は左にならない, その添字は両側でコントラクトされる.
- (d) 数係数は  $2^{\alpha+\beta}$  ( $\alpha$ :  $\text{---} \bullet \text{---}$  の数,  $\beta$ : 非対称枝分れの数) にひとしい.

つまり,  $n$  個のバーテックスをもち, かつ開放端ではじまってバーテックスにおわる独立でループを含まない木の枝配列のおおのにおに, (d) の係数をかけて加え合せれば,  $v_i(\boldsymbol{\kappa})_n$

\* 係数や演算記号もダイアグラムの要素である.

\*\* ここに波数とは, 4元波数  $\boldsymbol{\kappa}$  をさす.

を得るわけである。例えば、

$$\begin{aligned}
 v_i(\boldsymbol{\kappa})_4 \leftrightarrow & 8 \text{ --- } \bullet \text{ --- } \bullet \text{ --- } \bullet \text{ --- } \bullet \\
 & (\alpha = 3, \beta = 0) \\
 + 2 & \text{ --- } \bullet \text{ --- } \bullet \begin{array}{l} \nearrow \bullet \\ \searrow \bullet \end{array} + 4 \text{ --- } \bullet \begin{array}{l} \nearrow \bullet \\ \searrow \bullet \end{array} \\
 & (\alpha = 1, \beta = 0) \qquad (\alpha = 1, \beta = 1)
 \end{aligned} \tag{13}$$

(3) U-グラフ

乱流の一様定常性から、Fourier 成分の2次モーメント (エネルギー・スペクトル・テンソル) は、積平均

$$\langle v_i(\boldsymbol{\kappa})v_j(-\boldsymbol{\kappa}) \rangle = U_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) \tag{14}$$

で定められ、展開(8)に相当してその  $g$  級数表示がみちびかれる。この級数は、展開式(11)によって  $v_i(\boldsymbol{\kappa})_0$  のさまざまなモーメントで表わされるが、特に外力  $f_i(\boldsymbol{\kappa})$ 、従って  $v_i(\boldsymbol{\kappa})_0$  に正規分布を仮定すれば\*、奇数次のモーメントはすべて0、偶数次のそれは2次モーメント

$$\langle v_i(\boldsymbol{\kappa})_0v_j(-\boldsymbol{\kappa})_0 \rangle = U_{ij}(\boldsymbol{\kappa})_0 \tag{15}$$

の積和にひとしい (正規関係) から、結局

$$U_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) = U_{ij}(\boldsymbol{\kappa})_0 + g^2U_{ij}(\boldsymbol{\kappa})_2 + g^4U_{ij}(\boldsymbol{\kappa})_4 + \dots \tag{16}$$

のように  $g$  の偶級数となり、しかも  $U_{ij}(\boldsymbol{\kappa})_2, \dots$  は  $U_{ij}(\boldsymbol{\kappa})_0$  の合成積和に帰着する。そこで、さきの(9),(10)のほかに新しいダイアグラム要素として

$$U_{ij}(\boldsymbol{\kappa})_0 \leftrightarrow \overset{+}{i} \text{ --- } \overset{-}{j} \text{ (細い波線)} \tag{17}$$

を用いれば、展開(16)に対して十分である。 $+(\boldsymbol{\kappa})-$  の表示は、定義(15)の左辺における波数の符号と添字との対応を示す。

例えば、2次成分

$$U_{ij}(\boldsymbol{\kappa})_2 = \langle v_i(\boldsymbol{\kappa})_2v_j(-\boldsymbol{\kappa})_0 + v_i(\boldsymbol{\kappa})_1v_j(-\boldsymbol{\kappa})_1 + v_i(\boldsymbol{\kappa})_0v_j(-\boldsymbol{\kappa})_2 \rangle \tag{18}$$

において、式(11)を用いると、第1項は、

$$\begin{aligned}
 \langle v_i(\boldsymbol{\kappa})_2v_j(-\boldsymbol{\kappa})_0 \rangle &= 2 \sum_{\boldsymbol{\kappa}'} \sum_{\boldsymbol{\kappa}''} S_{il}(\boldsymbol{\kappa}) P_{lmn}(\boldsymbol{\kappa}) S_{np}(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}') P_{pqr}(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}') \\
 &\quad \times \langle v_j(-\boldsymbol{\kappa})_0v_m(\boldsymbol{\kappa}')_0v_q(\boldsymbol{\kappa}'')_0v_r(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}' - \boldsymbol{\kappa}'')_0 \rangle
 \end{aligned}$$

\* この場合、乱流構造の非正規性は外的条件によるものではなく、すべて非線形相互作用の結果として生じるとみなされる (最大不規則条件<sup>11)</sup>)。

であるが、4次モーメントに対する正規関係により

$$\begin{aligned} \langle \dots \rangle &= U_{mj}(\boldsymbol{\kappa}')_0 U_{qr}(\boldsymbol{\kappa}'')_0 + U_{qj}(\boldsymbol{\kappa}'')_0 U_{rm}(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}' - \boldsymbol{\kappa}'')_0 \\ &\quad + U_{rj}(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}' - \boldsymbol{\kappa}'')_0 U_{qm}(\boldsymbol{\kappa}'')_0 \end{aligned}$$

と分解されて、

$$\begin{aligned} \langle v_i(\boldsymbol{\kappa})_2 v_j(-\boldsymbol{\kappa})_2 \rangle &\leftrightarrow 2 \begin{array}{c} j \\ \left. \begin{array}{c} m \\ n \end{array} \right\} \\ i \text{---} l \text{---} p \text{---} q \end{array} \\ &+ 2 \begin{array}{c} m \\ \left. \begin{array}{c} r \\ q \end{array} \right\} \\ i \text{---} l \text{---} n \text{---} p \end{array} \text{---} j \\ &+ 2 \begin{array}{c} m \\ \left. \begin{array}{c} q \\ r \end{array} \right\} \\ i \text{---} l \text{---} n \text{---} p \end{array} \text{---} j \end{aligned}$$

を得る.  $\langle v_i(\boldsymbol{\kappa})_2 v_j(-\boldsymbol{\kappa})_2 \rangle$  に対しては各グラフを左右反転すればよい. 同様に、

$$\begin{aligned} \langle v_i(\boldsymbol{\kappa})_1 v_j(-\boldsymbol{\kappa})_1 \rangle &= \sum_{\boldsymbol{\kappa}'} \sum_{\boldsymbol{\kappa}''} S_{ii}(\boldsymbol{\kappa}) P_{lmn}(\boldsymbol{\kappa}) S_{jp}(-\boldsymbol{\kappa}) P_{pqr}(-\boldsymbol{\kappa}) \\ &\quad \times \langle v_m(\boldsymbol{\kappa})_0 v_n(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}')_0 v_q(-\boldsymbol{\kappa})_0 v_r(-\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}'')_0 \rangle \\ &\leftrightarrow \begin{array}{c} n \\ \left. \begin{array}{c} m \\ r \end{array} \right\} \\ i \text{---} l \text{---} p \text{---} j \end{array} \\ &+ \begin{array}{c} n \\ \left. \begin{array}{c} q \\ r \end{array} \right\} \\ i \text{---} l \text{---} m \text{---} p \end{array} \text{---} j \\ &+ \begin{array}{c} n \\ \left. \begin{array}{c} m \\ q \end{array} \right\} \\ i \text{---} l \text{---} m \text{---} p \end{array} \text{---} j \end{aligned}$$

これらのうち、 $\text{---} \text{---} \text{---}$  のようにただ1本の $\text{---}$ で連結された部分をもつグラフ("ブローパーでない", という)は、波数保存の条件から直流分(ゼロ波数)を含むことになるので、実は0である. また、トポジカルに同じ形のグラフは区別の必要がないから、式(18)に対応する2次の $U$ -グラフは、

$$\begin{aligned} U_{ij}(\boldsymbol{\kappa})_2 &\leftrightarrow 2 \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \\ &+ 4 \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} + 4 \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \end{aligned} \quad (19)$$

となる. 4次のグラフは末尾、図2にかかげた.

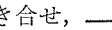
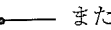

上の手続きを一般化すれば、 $U$ -グラフの規則は、

(a)  $n$ 次のグラフは $n$ 個のバーテックスを含み、各バーテックスには3本の線要素が会するが、そのうち $\text{---}$ はただかたか2本である.

(b) バーテックスで波数保存、ただし $\text{---}$ では左右で逆符号をとり、 $\text{---}(\boldsymbol{\kappa})\text{---}$  または  $\text{---}(\boldsymbol{\kappa})\text{---}$  とする.

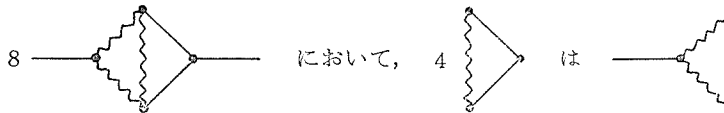
(c) 数係数は一般には  $2^{n-\gamma}$  ( $n$ : 次数,  $\gamma$ :  $\text{---}$  だけでつくられた閉ループの数) にひ

としい\*.

要するに、 $l + m = n$  をみたすすべての偶数  $l, m$  について  $l$  次と  $m$  次の  $v$ -グラフを向き合せ、 または  の形のバーテックスを 1 本または 2 本の  で結んで (a) が成り立つようにする. こうして出来る独立でプロパーなグラフのおのおのに (c) の係数をかけて加え合せばよい.  $U$ -グラフは、 $v$ -グラフとちがって両端が開放であり、必ず閉じたループを含んでいる.

### 3. 変形グラフ

このような  $U_{ij}(\kappa)$  の  $g$  展開は、それだけでは  $g$  が小さくない限り役立たないが、 $U$ -グラフの構造を観察すると、それらはいくつかの型に分類できることがわかる. 特に一見複雑なグラフでも、その一部の機能をより簡単なパターンで代行させれば低次のグラフと同形になる場合が多い. 例えば、4 次の  $U$ -グラフの一つ、



の部分に対し、あたかも一個のバーテックスのような役目をしており、これを仮りに  $\bigcirc$  で示すと、2 次グラフの形



に書ける. そこで、さらに一步を進め、プロパゲータ  $S_{ij}(\kappa)$ 、バーテックス  $P_{ijm}(\kappa)$  のはたらきに注目して、一般化されたくりこみ演算子をつぎのように定義しよう.

(1)  $S'$ -グラフ (変形プロパゲータ)

$S_{ij}(\kappa)$  の機能は、その両端でそれぞれバーテックスを介して他の 2 本の線要素と接続し、かつ  $v$ -グラフの幹を構成し得る点にある. そこで、両端にプロパゲータをもち、それが 1 本の直線部分 (幹) で連結された、独立でプロパーなグラフをとり、 $U$ -グラフに準じた規則に従って作られる  $g$  級数を変形プロパゲータ  $S'_{ij}(\kappa)$  と呼ぶ. これは偶級数で、

$$S'_{ij}(\kappa) \leftrightarrow \text{---} + 4g^2 \text{---} \text{---} \text{---} + \dots, \quad (20)$$

(4 次のグラフは図 3). この各項、従って  $S'_{ij}(\kappa)$  自身は、機能的に  $S_{ij}(\kappa)$  を代行することが出来る.

(2)  $\Gamma$ -グラフ (変形バーテックス)

$P_{ijm}(\kappa)$  の機能は、3 本の線要素を互に結びつけてグラフを構成し得る点にある. そこで、それぞれ 2 本の線要素に連結した三つの端点 (バーテックス) をもつ、独立でプロパーなグラフをとり、その  $g$  級数を変形バーテックス  $\Gamma_{ijm}(\kappa, \kappa')$  と呼ぶ. これは奇級数で、

\*  $n \geq 6$  では例外がある<sup>7)</sup>.

$$\Gamma_{ijm}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}') \leftrightarrow g \cdot + 4g^3 \left[ \begin{array}{c} \triangle \\ \text{---} \\ \triangle \\ \text{---} \\ \triangle \end{array} \right] + \dots, \quad (21)$$

(5次のグラフは図4). こうして  $P_{ijm}(\boldsymbol{\kappa})$  を代行できるが, 各項の3端点が属する波数のうち二つだけが独立で, 1点に退化した初項を除けば, いずれも2波数関数とみなされる.

以上の各グラフについて, 独立な図形の数を表1に示しておく\*.

表1 5次までの独立図形の数

	0次	1次	2次	3次	4次	5次
$v$ -グラフ	—	1	1	2	3	6
$U$ -グラフ	1	0	3	0	29	0
$S'$ -グラフ	1	0	1	0	9	0
$\Gamma$ -グラフ	0	1	0	3	0	54

#### 4. くりこみ方程式

つぎの問題は, 上に得たダイアグラムの構造を手がかりに, 摂動  $g$  級数 (16), (20), (21) の適当な部分積を構成して行くことである. このくりこみの手続きと結果を示すには, あらためて

$$S'_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) \leftrightarrow \text{---} \quad (\text{太い直線}) \quad (22)$$

$$\Gamma_{ijm}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}') \leftrightarrow \bullet \quad (\text{大きい黒点}) \quad (23)$$

$$U_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) \leftrightarrow \text{~~~~~} \quad (\text{太い波線}) \quad (24)$$

の対応を導入すれば都合がよい (波数, 添字の表示は (9), (10), (17) に準じる). さらに, 外力のスペクトルを

$$\langle f_i(\boldsymbol{\kappa}) f_j(-\boldsymbol{\kappa}) \rangle = F_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) \leftrightarrow \square \quad (25)$$

とすると,  $U_{ij}(\boldsymbol{\kappa})$  の第0近似  $U_{ij}(\boldsymbol{\kappa})_0$  を, また

$$\text{~~~~~} = \text{---} \square \text{---} \quad (26)$$

と書くことが出来る.

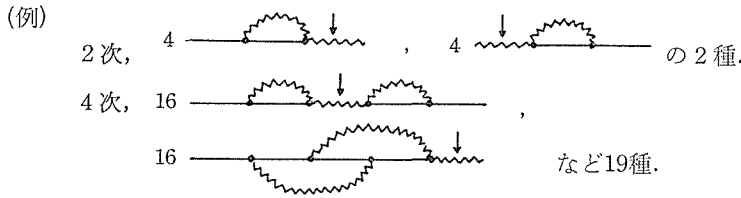
##### (1) $U$ -方程式

$U$ -グラフ (17), (19), 図2は, A, B二つのクラスに大別される.

クラスA: 1本の~~~~~を切断すれば二つの部分にわかれるものをいう.

\* 外力  $f_i(\boldsymbol{\kappa})$  の正規性を仮定してのことである点に注意.





↓は切断の箇所を示す. ~~~~~自身もAに属する.

(定理) クラスAだけにかかわる部分和を  $U_{ij}^A(\kappa)$  とすれば,

$$U_{ij}^A(\kappa) = S'_{il}(\kappa)F_{lm}(\kappa)S'_{mj}(-\kappa) \leftrightarrow \text{---} \boxed{\text{---}} \text{---} \quad (27)$$

(証)  $S_{ij}(\kappa)$  の逆演算子を  $S_{ij}^{-1}(\kappa)$  とおくと, 明らかに

$$S_{il}(\kappa)S_{lj}^{-1}(\kappa) = \delta_{ij}, \quad (i)$$

$$f_i(\kappa) = S_{il}^{-1}(\kappa)v_l(\kappa)_0, \quad F_{lm}(\kappa) = S_{lp}^{-1}(\kappa)U_{pq}(\kappa)_0S_{qm}^{-1}(-\kappa) \quad (ii)$$

である. そこで,  $S'_{ij}(\kappa)$  の  $g$  展開(20)を

$$S'_{ij}(\kappa) = S_{ij}(\kappa) + g^2S'_{ij}(\kappa)_2 + \dots$$

と書いて, (i), (ii)を考慮すれば, 容易に

$$S'_{il}(\kappa)F_{lm}(\kappa)S'_{mj}(-\kappa) = U_{ij}(\kappa)_0 + g^2[S'_{il}(\kappa)_2\{S_{lp}^{-1}(\kappa)U_{pj}(\kappa)_0\} + \{U_{iq}(\kappa)_0S_{qm}^{-1}(-\kappa)\}S'_{mj}(-\kappa)_2] + \dots$$

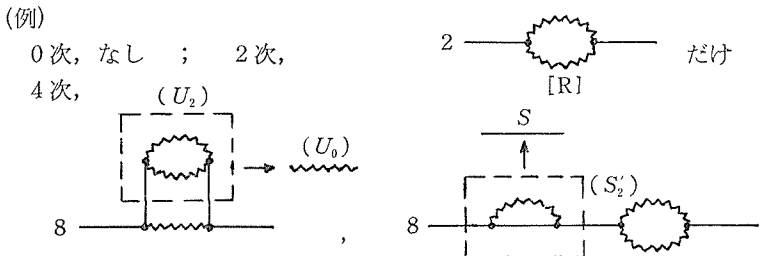
が確かめられる. ここで  $S^{-1} \cdot U_0$  の形の積  $\{ \}$  は,  $\text{---}$ を消して~~~~~に代える操作を意味するから,  $g^2$ の項は, それぞれ

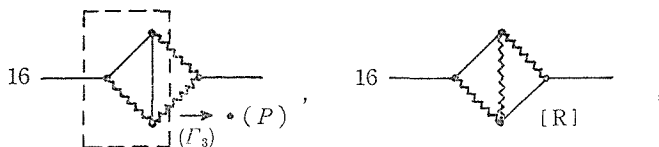


を与える. これらは, クラスAの2次のグラフに他ならない.  $g^4$ 以後の項についても同様. (証おわり)

この結果は, 第0近似(26)の拡張に当り, クラスAに属するU-グラフの“くりこみ”になっている.

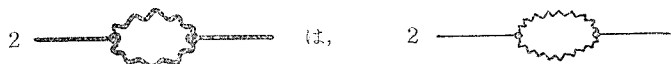
クラスB: クラスA以外のものをいう.





など10種.

4次の諸例のうち、破線でかこんだ部分は、いずれも低次のボタンに属する図形で、図示の通りこれをさらに低次のグラフでおきかえれば、同じクラスBの2次グラフに一致する. このように、その一部を低次の図形でおきかえて下位の構造に帰着するものを“可約”, そうでないもの ([R] で示す) を “既約” グラフという. 後者が、その次数ではじめて現われる固有のボタンであり、高次の可約グラフは全部それから導かれる. 従って、



に帰着するすべてのU-グラフのくりこみに他ならない. こうして逐次の既約グラフにつぎつぎとくりこんで行けば、クラスBについての部分和  $U_{ij}^B(\kappa)$  が得られるであろう. 結局、(27)の結果と合せ、Uの非線形展開として

$$\begin{aligned}
 \text{wavy line} &= \text{rectangle} \\
 &+ 2 \text{ (loop)} + 16 \text{ (diamond)} + \dots
 \end{aligned} \tag{28}$$

が求められた.

(2) S'-, Γ-方程式

$S'_{ij}(\kappa), \Gamma_{ijm}(\kappa)$  にはクラスAに相当するものがないので、それぞれ既約グラフを見出し、くりこめば、

$$\begin{aligned}
 \text{thick line} &= \text{thin line} \\
 &+ 4 \text{ (loop)} + 16 \text{ (diamond)} + \dots
 \end{aligned} \tag{29}$$

$$\text{circle} = \text{dot} + 4 \text{ (triangle)} + 4 \text{ (triangle)} + 4 \text{ (triangle)} \tag{30}$$

を得る. ただし、S'-方程式 (29) 右辺第2項のグラフは左右対称でないことに注意したい<sup>8)</sup>.

展開(28)~(30)はもはやg級数でなく、その各項はgのすべての次数の寄与を含んだ非線形展開となっている. いいかえれば、どのグラフもそれ自身g級数に展開される.

Fourier 分解(2)を定義した集和演算は、 $V \rightarrow \infty, T \rightarrow \infty$  のとき

$$\frac{1}{VT} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4\mathbf{k} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3\mathbf{k} d\omega \quad (31)$$

となるので (p.57, 脚註\*参照), これらはまた, 三つの未知関数  $U_{ij}(\boldsymbol{\kappa}), S'_{ij}(\boldsymbol{\kappa}), \Gamma_{ijm}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}')$  に対する三つの連立積分方程式とみなされるものである.

### 5. 近似理論

グラフによるくりこみの方法は, きわめて巧妙ではあるが, 級数の収束についてはまったく分らないし, 図形がもつ物理的内容も必らずしも明確でない. しかし, 形式論としてはどこにも近似を含まないから, 逆にさまざまな近似理論を統一的な立場から包括する可能性が期待できる. つぎに, その二, 三をダイアグラム法との関連で簡単に調べてみよう.

#### (1) キュムラント打ち切り近似

最も簡単に,  $S'_{ij}(\boldsymbol{\kappa})$  と  $\Gamma_{ijm}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}')$  を展開初項で代用すれば,  $U_{ij}(\boldsymbol{\kappa})$  はそれだけで閉じた積分方程式となる. これは偶数次のモーメント間に正規関係を仮定することを意味し, グラフでは

$$\left. \begin{aligned} \text{wavy line} &= \text{box} + 2 \text{ loop} + 16 \text{ diamond} + \dots \\ \text{solid line} &= \text{solid line} \\ \textcircled{\cdot} &= \cdot \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

で表わされる. キュムラント打ち切り法は, その有限項による近似に当り, 初項は線形近似, 第2項までとれば Chandrasekhar<sup>12)</sup> の理論と同等な

$$U_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) = S_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) [F_{lp}(\boldsymbol{\kappa}) + \frac{2}{(2\pi)^4} \int P_{lmn}(\boldsymbol{\kappa}) U_{mg}(\boldsymbol{\kappa}') U_{nr}(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}') P_{pqr}(-\boldsymbol{\kappa}) d^4\boldsymbol{\kappa}'] S_{pj}(-\boldsymbol{\kappa}) \quad (33)$$

を与える. キュムラント打ち切り近似は, むしろ本来の非線形展開でなく, その本質的な難点は, プロパゲータが を含まないために, 相互作用の緩和機構が  $U_{ij}(\boldsymbol{\kappa})$  と無関係なモデルとなっている点にあると考えられる.

#### (2) Kraichnan の近似

これに対し, バーテックスはそのままで, プロパゲータのくりこみを考慮する近似は,

$$\left. \begin{aligned} \text{wavy line} &= \text{box} + 2 \text{ loop} + \dots \\ \text{solid line} &= \text{solid line} + 4 \text{ loop} + \dots \\ \textcircled{\cdot} &= \cdot \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

の形をもつが、このタイプは、Kraichnan<sup>11)</sup> がまったく別な物理的考察から提案した方式に相当し、 $n$ 項で打ち切れば  $(n+1)$  個の閉じた波数間の相互作用までを取入れたことになっている。いわゆる“直接相互作用近似”は、 $n=2$  の場合である。このとき、 $U_{ij}(\boldsymbol{\kappa})$ 、 $S'_{ij}(\boldsymbol{\kappa})$  に対する連立積分方程式

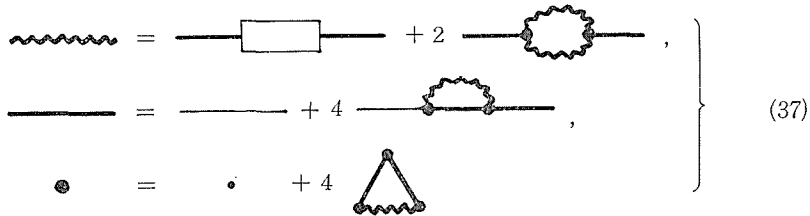
$$U_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) = S'_{il}(\boldsymbol{\kappa}) [F_{lp}(\boldsymbol{\kappa}) + \frac{2}{(2\pi)^4} \int P_{lmn}(\boldsymbol{\kappa}) U_{mq}(\boldsymbol{\kappa}') U_{nr}(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}') P_{pqr}(-\boldsymbol{\kappa}) d^4\boldsymbol{\kappa}'] S'_{pj}(-\boldsymbol{\kappa}), \quad (35)$$

$$S'_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) = S_{il}(\boldsymbol{\kappa}) [\delta_{lj} + \frac{4}{(2\pi)^4} \int P_{lmn}(\boldsymbol{\kappa}) U_{mq}(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}') S'_{nr}(\boldsymbol{\kappa}') P_{pqr}(\boldsymbol{\kappa}') S'_{pj}(\boldsymbol{\kappa}) d^4\boldsymbol{\kappa}'] \quad (36)$$

が得られ、Kraichnan は  $S'_{ij}(\boldsymbol{\kappa})$  を“衝撃応答関数”と呼んだ。パーテックスは、(7)式が示す通り、物理的には3波数  $\boldsymbol{\kappa}$ 、 $\boldsymbol{\kappa}'$ 、 $\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}'$  間の相互作用による  $v_i(\boldsymbol{\kappa})$  への寄与の重みを表わすが、いまの近似は、それが  $\boldsymbol{\kappa}$  だけに依存すると仮定しているわけで、Kraichnan 理論が  $-5/3$  乗スペクトル則と矛盾する原因は、ここにあるのかも知れない(付録1参照)。

### (3) Шутько の近似

変形パーテックスの効果を部分的に考慮した連立方程式

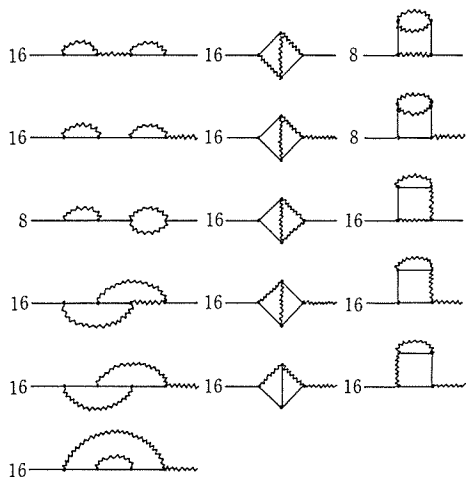


を用いる<sup>3),4)</sup> Шутькоは、これによって漸近的に  $-5/3$  乗スペクトル則が得られるとしているけれども、 $\text{---}$ と $\bullet$ の第2項はともに厳密な展開(29)、(30)とちがっており、それが結果にどの程度影響しているかは、まだ明らかでない。Kraichnan 理論の上述の問題点とも関連して、変形パーテックス近似のより完全な取扱いが望まれる。

## 6. む す び

以上みて来たように、乱流における非線形展開の構成をかなり一般的な形で定式化し、独立に作られたいろいろな近似理論の間に系統的な解釈を与えて見通しをよくしたことは、たしかにダイアグラム法の効用である。反面、具体的な計算による定量的評価の裏づけがなければ、つまりは“絵のない額縁”に終るであろう。その点では今後にまつ所が多いが、ようやく応用の機会が熟しつつあるように思われる<sup>13)</sup>。また、いわゆる Vlasov プラズマに対しても類似のダイアグラムが有効である<sup>14)</sup>ことを附記して、他分野との交流に期待したい。

なお、この論文は、昭和44年12月、数理解析研究所における“層流の非線形安定性”研究会での講演<sup>15)</sup>を骨子としたものである。



最上段の3個(\*印)以外の各グラフについては、それぞれを左右反転したものが同数だけ存在する(図示省略)。

図2 4次のU-グラフ<sup>7)</sup>

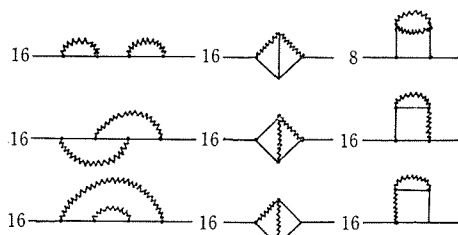
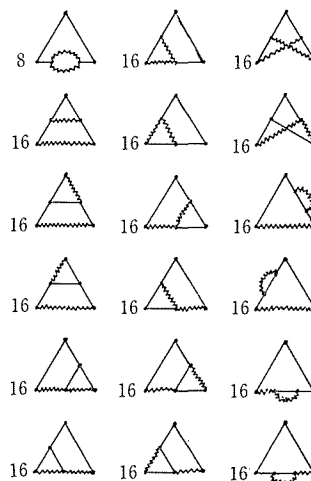


図3 4次のS'-グラフ



各グラフをそれぞれ120°および240°回転したものが同数だけ存在する(図示省略)。

図4 5次のΓ-グラフ<sup>7)</sup>

### 付録 1

#### 直接相互作用近似について

本文との関連でごく簡単に述べる\*。

Kraichnan<sup>11)</sup>は、乱流の非線形性を記述する新しい概念として、時刻  $t'$  に小さい攪乱外力  $\delta f_j(\mathbf{k}, t')$  を波数  $\mathbf{k}$  のモードに加えるとき、これに対する時刻  $t$  での速度応答  $\delta v_i(\mathbf{k}, t)$  を与える平均応答関数  $G_{ij}(\mathbf{k}; t|t')$  を導入した。さらに、運動方程式の非線形項をこのような小攪乱の集まりとみなし、これによる波数空間内エネルギー伝達への寄与は、閉じた3波数  $\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k} - \mathbf{k}'$  間の相互応答(直接相互作用)に起因する部分が支配的であると仮定する。この考えを具体化する論旨は明快を欠いているが、結果は、 $\mathbf{k}, t - t'$  空間での

\* 原論文 11), 17), 18) などの他、文献 3), 4) 参照。また Orszag のすぐれた解説<sup>16)</sup>がある。

2次モーメント  $U_{ij}(k; t|t')$  と  $G_{ij}(k; t|t')$  とで完結した連立積分方程式が得られ、乱れが定常な場合  $t' - t = \tau$  について Fourier 変換をとれば、方程式 (35), (36) に一致する。その意味で、 $G_{ij}$  または  $S'_{ij}$  は相互作用の緩和を表わし、それが  $U_{ij}$  と互に関連しつつ変化するの、非線形効果によるエネルギーの流れは、常に分布の不平等を平均化するように起るのである。この性質が Kraichnan のモデルの大きな特色であって、例えば負のエネルギー領域が生じるような不都合は現われない。中程度の Reynolds 数に対するいくつかの具体例<sup>17)</sup>の成功は特に注目される(付録2. 参照)。

一方、高 Reynolds 数における慣性領域のスペクトル  $E(k)$  を求めると、散逸パワーを  $\epsilon$ 、乱れの大局的特性速度を  $u_0$  として、漸近的に

$$E(k) \propto (\epsilon u_0)^{1/2} k^{-3/2} \quad (\text{DI})$$

となる。Kolmogorov の要請

$$E(k) \propto \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (\text{LI})$$

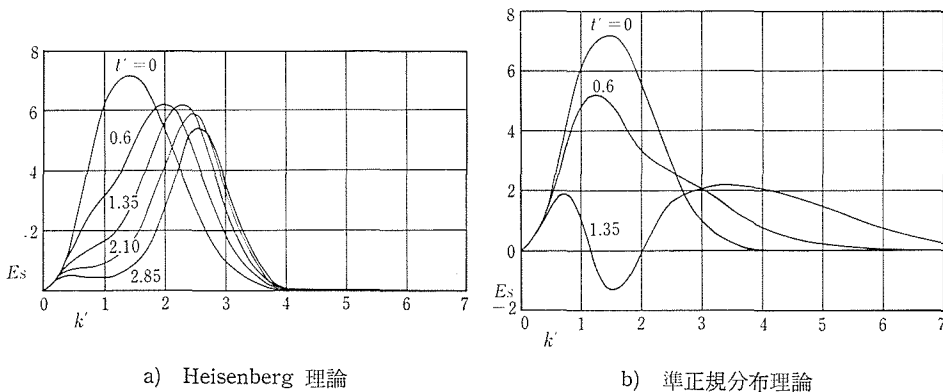
に比べて、 $-5/3$  乗スペクトルと一致しないばかりでなく、 $E(k)$  が  $u_0$  に関する点でエネルギー伝達の局所性と矛盾する。

この困難に対して、Kraichnan<sup>18)</sup> は、慣性領域にある小さい渦の挙動を表現するのに Euler 座標は不適當であると考え、一般化速度の概念を用いた LHDI (Lagrangian-History-Direct-Interaction) 理論を提案して式 (LI) を導いたが、5節(2)で述べたように、(DI)の結果はパーテックスに関する仮定と関係があるようにも思われる。

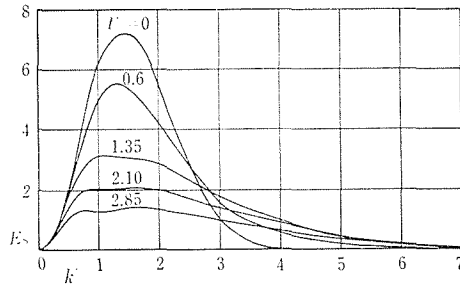
## 付 録 2

### 近似理論の比較資料

NS 方程式自身について、いろいろな近似理論を同一の初期条件と Reynolds 数のもとで適用比較した実例は、筆者の知る限りまだ見られないが、与えられた乱れの場合における受動的スカラー量\*の乱流混合に対しては、J. Lee<sup>19)</sup> による興味深い結果があるので、その



\* 受動的とは、流れの場に支配されるだけで、これに反作用を及ぼさない、という意味である。



c) 直接相互作用近似

図5 近似理論の比較 ( $k = k/k_0$ ,  $t' = P\acute{e}Dk_0^2 t$ ;  $P\acute{e} = 50$ )

二、三をそのまま引用して参考に供したい。

図5 a), b), c) は、それぞれ Heisenberg 理論, 4次キュムラント打ち切り (準正規分布理論), 直接相互作用近似の場合を示す。いずれの計算においても、乱れの場合は定常等方的で  $E(k) \propto k^4 \exp(-ak^2)$  によって与えられるものとし、スカラー  $s$  の濃度スペクトルに対する初期条件は、 $E_s(k, 0) \propto k^2 \exp(-\beta k^2)$ , 拡散係数  $D = \nu$ , Péclet 数  $P\acute{e}$  は50である。

これは本文で取扱った乱流そのものの問題ではないけれども、各近似の性格や限界をうかがう手がかりにはなるであろう。

## 文 献

- 1) 巽友正: "乱流" 槇書店 (1962), 統計流体力学 I, II. "科学" **38** (1968) 114, 246. (ほかに "ながれ" 1巻2号 (1969) 14; 大路通雄: 乱流(レビュー) "化学工学" **32** (1968) 397.
- 2) 大路通雄: 弱い一様な乱れの理論 I, "九大応力研所報" 第21号 (1963) 57, II, III. "信州大工学部紀要" 第29号 (1970) 31, 第31号 (1972).
- 3) A. C. Монин и А. М. Яглом: Статистическая Гидромеханика II. Наука (1967).
- 4) M. J. Beran: *Statistical continuum theories*. Interscience Publisher (1968).
- 5) R. H. Kraichnan: Invariance principles and approximation in turbulence dynamics. *Proc. Sym. Dynamics of Fluids and Plasmas*. Academic Press (1966) 239.
- 6) 朝永振一郎他: "場の量子論(下)" 岩波講座現代物理学 III A (1959). 統計力学等への応用については, 中嶋貞雄他: "物性II" 現代物理学の基礎 8, 岩波書店 (1972).
- 7) H. W. Wyld: Formulation of the theory of turbulence in an incompressible fluid, *Ann. Phys.* **14** (1961) 143.
- 8) L. L. Lee: A formulation of the theory of isotropic hydromagnetic turbulence in an incompressible fluid, *Ann. Phys.* **32** (1965) 292.
- 9) R. H. Kraichnan: Dynamics of non-linear stochastic systems. *J. Math. Phys.* **2** (1961) 124.
- 10) S. F. Edwards: The statistical dynamics of homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.* **18** (1964) 239.

- 11) R. H. Kraichnan : The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* **5** (1959) 497.
- 12) S. Chandrasekhar : A theory of turbulence. *Proc. Roy. Soc. A* **229** (1955) 1.
- 13) J. B. Morton & S. Corrsin : Consolidated expansions for estimating the response of a randomly driven nonlinear oscillator. *J. Statist. Phys.* **2** (1970) 153.
- 14) D. Biskamp : Diagram approach to the theory of collisionless plasma turbulence. *Z. f. Naturf.* **23 a** (1968) 1362.
- 15) 大 路 通 雄 : 乱流における非線形相互作用の構造. "数理科学講究録" No. 97 (1970) 83.
- 16) S. A. Orszag : Analytical theory of turbulence. *J. Fluid Mech.* **41** (1970) 363.
- 17) R. H. Kraichnan : Decay of isotropic turbulence in the direct interaction approximation. *Phys. Fluids* **7** (1964) 1030.
- 18) R. H. Kraichnan : Lagrangean history closure approximation for turbulence. *Phys. Fluids* **8** (1965) 575.
- 19) J. Lee : Comparison of closure approximation theories in turbulent mixing. *Phys. Fluids* **9** (1966) 363.

### Summary

#### Diagram Approach to the Nonlinear Expansion Theory of Turbulence

Michio OHJI

(Department of Mechanical Engineering)

This paper describes the principle and application of the diagram technique recently introduced into the turbulence theory. First, the theoretical background of various approaches to the statistical mechanics of turbulence is briefly reviewed with special reference to the significance of consolidated or nonlinear expansions which retain a strong nonlinearity even in their lower order terms. Next, the construction and the structure of standard diagrams are expounded for steady homogeneous turbulence under a Gaussian random forcing function mainly after Wyld-Lee's scheme. Three fundamental diagram equations are shown in a consolidated form. They constitute a system of triple integro-differential equations which determines the energy spectrum function, the modified Green's function and the modified vertex function simultaneously. Lastly, known approximate theories such as the cumulant discard, the direct-interaction approximations and Shut'ko's proposal are critically interpreted from the viewpoint of the diagram approach.