

# 縁材のある正方形板の応力分布について

(有限要素法による解法)

佐々木三郎\*・岸下晴亮\*\*

(昭和47年10月31日受理)

## 1. ま え が き

長方形板の周辺に任意の面内荷重が作用する、いわゆる壁板の応力解析は、すでに大久保、八巻、F. A. Gaydon<sup>1)</sup>らにより、あるいは差分法などにより解明されているが、その数値計算は必ずしも容易ではない。壁板に補強材が結合した鋸梁の問題になると、構造の軽量化に伴い極めて重要な問題であるにもかかわらず、板と補強材の結合部における変位・応力の連続条件を満足させることが困難なため、研究は必ずしも豊富ではなく、また解の収束性などの関係から、ある制約のもとに解析されている。例えば無限帯板とか正方形板の相対する周辺に一樣もしくは放物線荷重が作用する場合<sup>2)</sup>などである。

このような構造物には、大型電子計算機とともに発展している有限要素法（以下 FEM と略記する）が偉力を発揮していることは周知の通りで、一度びそのプログラムが完成されれば、分割した各要素に望みのデータをおき代えるだけで、各要素の変位・応力が計算されるのである。ただ要素の分割方法、個数が解の精度に影響を与えるため、実験・理論解と比較し信頼性のある数値解を得ようと試みるわけである。

さて長方形板の縦横比、荷重の種類や補強材の位置・寸法など関係する因子が多いので、本研究では図一に示すような、縁材のある正方形板の相対する周上に、つぎの三通りの集中荷重が作用する場合について計算することにした。

- (1) 一對の対向集中荷重.
- (2) 一對の対向偏心荷重.
- (3) 下辺二点支持上辺中央集中荷重.

縁材と板の剛さの比を表わすのに、縁材の縦弾性係数を  $E_r$ 、板のそれを  $E_0$  とし  $E_r/E_0$  の値をもって示した。したがって  $E_r/E_0 = 1$  は正方形板を表はしている。

計算に用いた数値は  $E_0 = 2.1 \times 10^4 \text{kg/mm}^2$ 、ポアソン比  $\nu = 0.3$  で、寸法は実験に用いた試験片のそれと同じにとり、集中荷重の大きさを  $P = 100 \text{kg}$  とした。応力の大きさは  $\text{kg/mm}^2$  の単位で表はし、これを無次元に直し一般化するのは省略した。(図表中応力の大きさは数字のみで表はし、 $\text{kg/mm}^2$  は省略している)。

---

\* 機械工学科 助教授

\*\* 機械工学科 大学院修士課程

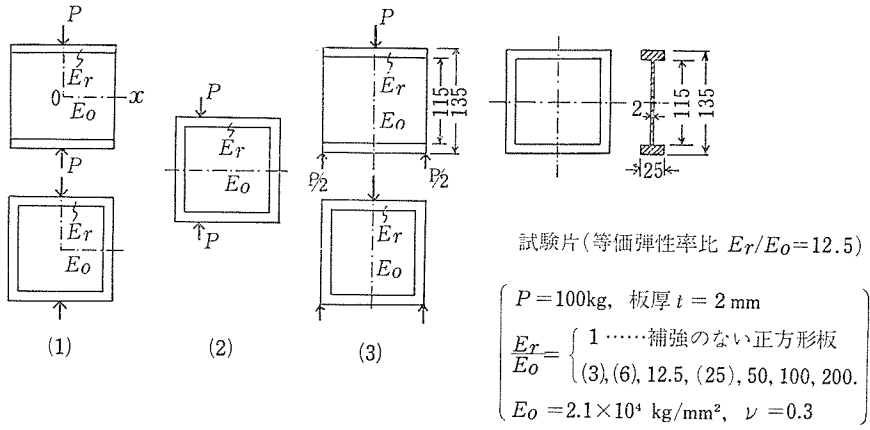


図1 計算一(1)(2)(3), 実験に用いた試験片の形状と数値

## 2. 平面応力解析におけるFEMと計算プログラムについて

FEMに関する基礎理論はよく知られているので概要を述べるに止める。

考えている平面領域を三角形要素に細分したとき、外力および内力は節点を通して伝わり、構造全体の節点力  $\{F\}$  と節点変位  $\{d\}$  の関係を求めようとする。

まづ一つの三角形要素の節点力  $\{f\}$  と節点変位  $\{\delta\}$  の関係

$$\{f\} = [k]\{\delta\}, \tag{1}$$

を求めるために、要素内の変位  $\mathbf{u}(u, v)$  をつぎのように仮定する。——ただし、 $[k]$  は要素の剛性マトリックス——

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \right\}, \tag{2}$$

または  $\{\mathbf{u}\} = [s]\{\alpha\}, \tag{2}'$

頂点の座標を代入して

$$\{\delta\} = [A]\{\alpha\}, \tag{3}$$

$\{\alpha\}$  について解けば、

$$\{\alpha\} = [A^{-1}]\{\delta\}. \tag{4}$$

一方要素のひずみ  $\{\epsilon\}$  は(2)式より

$$\{\epsilon\} = [B]\{\alpha\} = [B][A^{-1}]\{\delta\}. \tag{5}$$

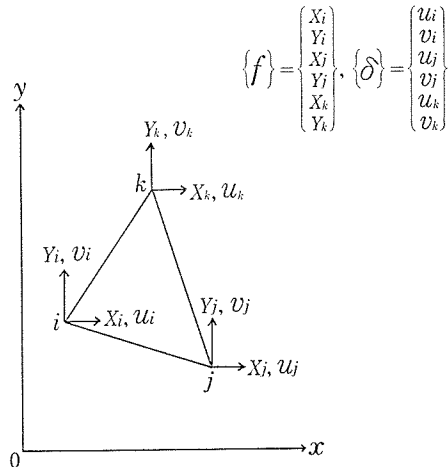


図2 三角形要素の節点力・節点変位

要素内の応力  $\{\sigma\}$  は Hook の法則より

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}, \quad (6)$$

(5) 式を代入して

$$\{\sigma\} = [D][B][A^{-1}]\{\delta\}. \quad (7)$$

つぎに仮想変位を与えたとき、ひずみエネルギー  $U$  および外力のなす仕事  $W$  の変分は

$$\delta'U = \iiint \{\delta'\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \rightarrow \{\delta'\delta\}^T [A^{-1}]^T \iiint [B]^T [D] [B] dV \cdot [A^{-1}]\{\delta\}, \quad (8)$$

$$\delta'W = \{\delta'\delta\}^T \{f\}, \quad (\text{ただし } \delta' \text{ は変分を表はす}) \quad (9)$$

仮想仕事の原理  $\delta'(U - W) = 0$  より  $\{f\} = [k]\{\delta\} \dots \dots (1)$  がえられる。  $[k]$  の内容は

$$\begin{aligned} [k] &= [A^{-1}]^T \iiint [B]^T [D] [B] dV \cdot [A^{-1}] \\ &= At [B^*]^T [D] [B^*], \end{aligned}$$

ただし、  $A$  は三角形要素の面積、  $t$  は板厚で  $[B^*]$ 、  $[D]$  は

$$[B^*] = [B][A^{-1}] = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} y_j - y_k & 0 & y_k - y_i & 0 & y_i - y_j & 0 \\ 0 & x_k - x_j & 0 & x_i - x_k & 0 & x_j - x_i \\ x_k - x_j & y_j - y_k & x_i - x_k & y_k - y_i & x_j - x_i & y_i - y_j \end{pmatrix},$$

$$[D] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{pmatrix}.$$

構造全体の剛性マトリックス  $[K]$  は全節点で平衡条件を満足するよう (1) 式より作られ

$$\{F\} = [K]\{d\}. \quad (11)$$

通常 (11) 式は節点変位  $\{d\}$  を未知数とする多元連立一次方程式で、境界条件を用いて解けば

$$\{d\} = [K^{-1}]\{F\}. \quad (12)$$

各三角形要素内の応力は (7) 式より求められる。

(12) 式は通常数百元から数千円におよぶ連立方程式になるので、いかに正確に迅速に解くかが問題で、筆者らは  $[K]$  が正定値対称マトリックスである点に着目し、コレスキーの方法を用いた。これは三角マトリックスの性質を利用したもので、上記マトリックスの逆マトリックスを効率よく計算できるものである。また電子計算機を用いるのに記憶容量を軽減し、演算速度の向上をはかるため、計算に必要な剛性マトリックスの係数のみを記憶させるようプログラムに特別な工夫を加えた。

### 3. 計算結果と理論・実験との比較

#### 3.1 一对の対向集中荷重の場合

##### [1] 三角形要素の分割と主応力分布の例

二軸対称であるから正方形板の右上1/4領域を図-3のように分割し, 板のみの場合と図-1の試験片 ( $E_r/E_0 = 12.5$ ) に対する主応力分布図を示した. 同図により補強材の附近, 特に荷重点附近の影響が著しいことが理解される.

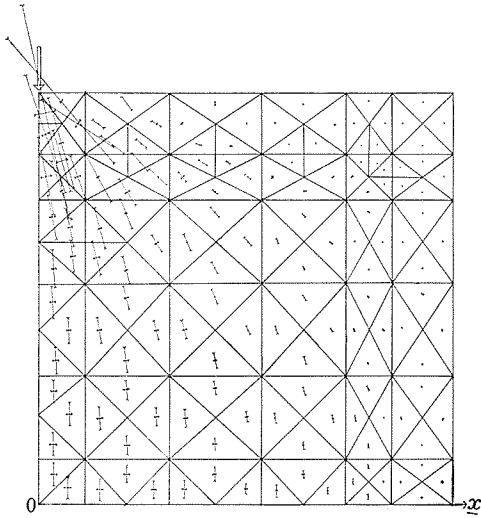


図3(a) 正方形板 ( $E_r/E_0 = 1$ )

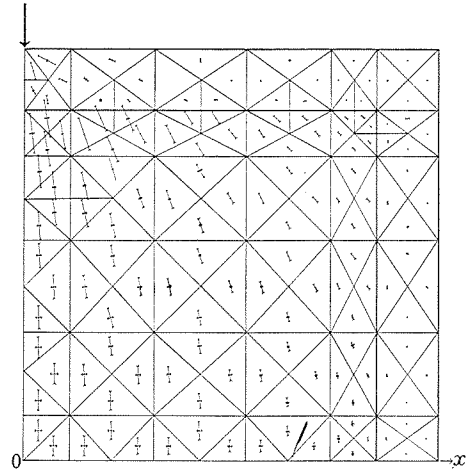


図3(b) 縁材のある正方形板 ( $E_r/E_0 = 12.5$ )

##### [2] 理論解 (正方形板) と

##### FEMによる応力の比較

FEMによる対称軸上の階段状折線の応力分布と八巻氏の理論解との比較を図-4に示した. 荷重点附近を除いては極めてよく一致している. 荷重点附近で理論解が求められていないのは恐らく収束性によるものであろう, FEMによる  $\sigma_x$  の変化は三角形要素により内力が伝達するためのもので, より細かく分割することにより精密解に近づくことが予想されよう.

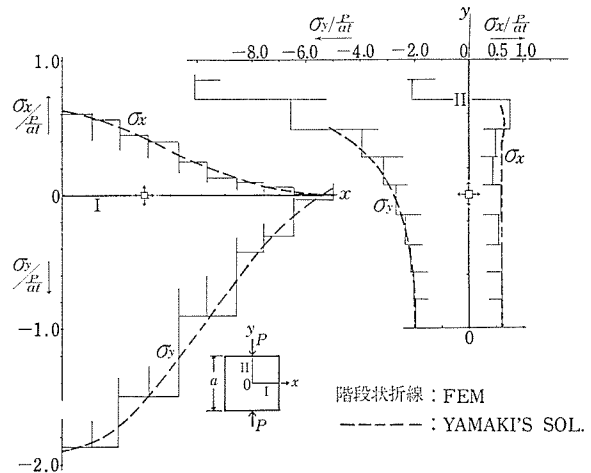


図4 FEMと理論解の比較

[3] 実験 (試験片  $E_p/E_0 = 12.5$ ) と FEM による応力の比較

図-5 はひずみゲージの貼布位置を示し、写真は負荷状態を示したもので集中荷重の代わりに 5mm 角棒で圧縮している。

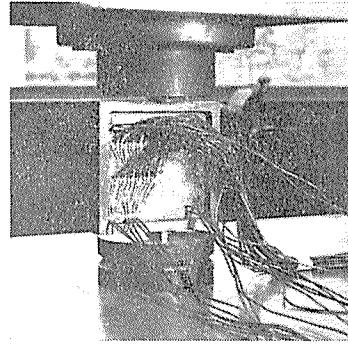
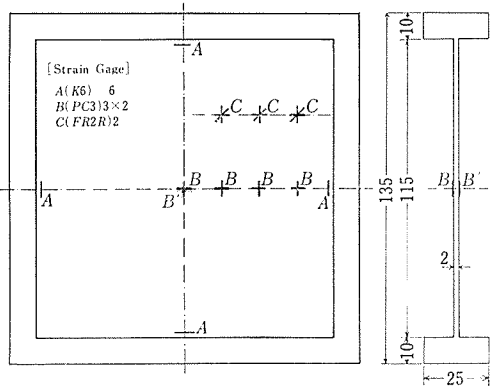


図5 試験片とひずみゲージ位置

写真 負荷状態を示す

図-6 は  $x$  方向の I, II, III 軸と  $y$  方向の I', II', III' 軸上の FEM による応力分布曲線と I, II, I', II' 上の実験値を示したもので概ね一致することが知られる。

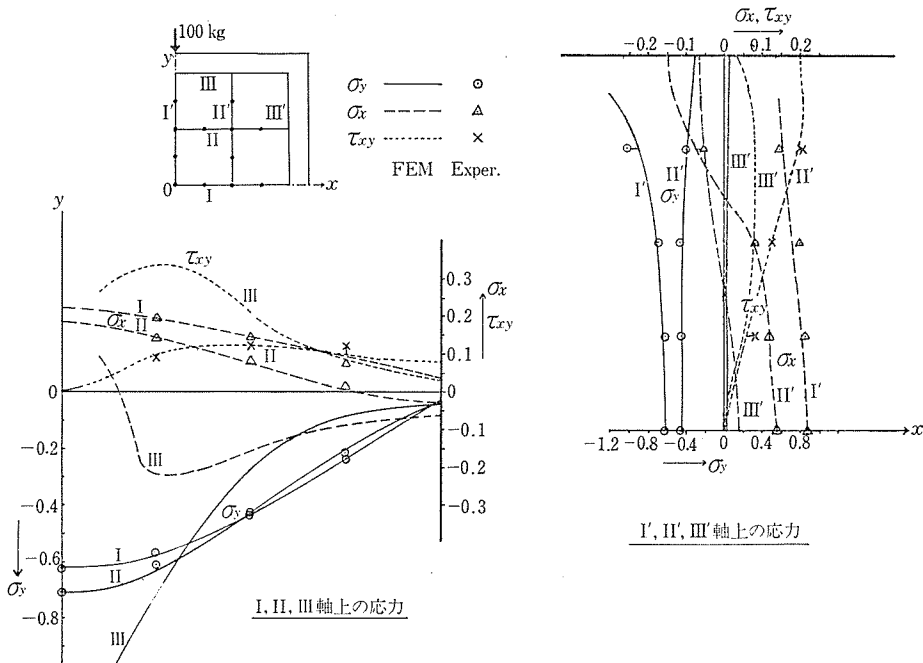


図6 I ~ III' 軸上の応力と実験結果

#### [4] 縁材の変形とたが応力

図-7は縁材の変形とたが応力を拡大して表はしたものである。荷重点附近では外方に凹に他の部分では凸に曲げをうけていることが知られる。なおたが応力の分布は縁材部分の分割が粗いため精確ではないが直線則を満足するものと仮定して表したもので、曲げ変形を裏書きしている。

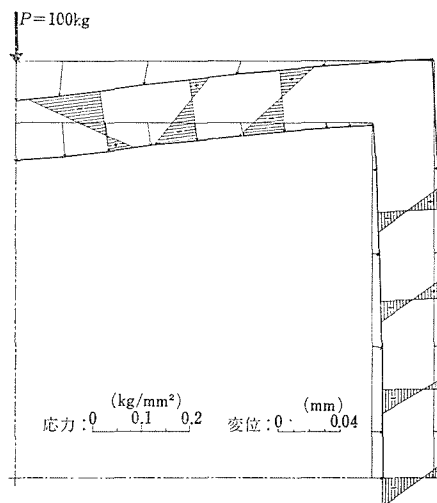


図7 縁材の変形と応力

#### [5] 対称軸上の応力分布 (縁材の剛さの影響)

図-1 (1)に示した正方形板 ( $E_r/E_0 = 1$ ) と二種の縁材様式について  $E_r/E_0 = 1, 12.5, 50, 100, 200$  に対する応力分布を図-8に示した。上下縁材の場合は剛さが大きくなるにつれて一定値に近づき、周辺縁材の場合は左右の縁材が複雑に作用し大きくなるに従い0に近づくことが分る。

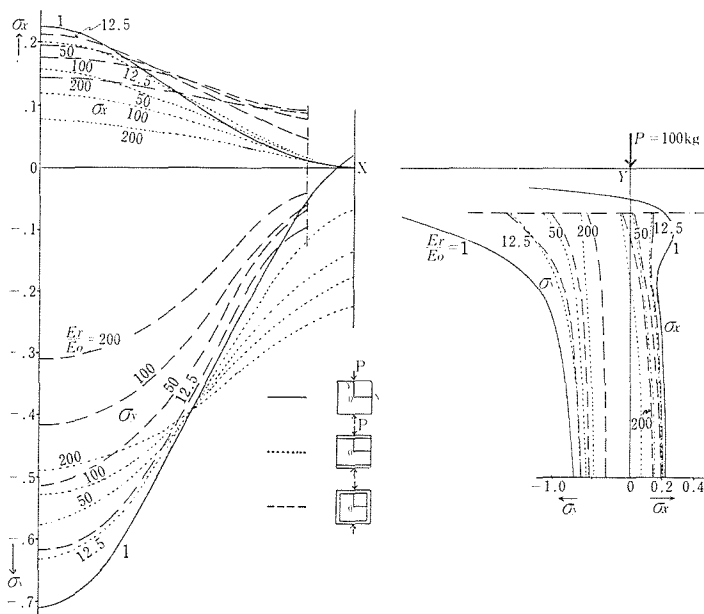


図8 対向集中荷重による応力分布 ( $E_r/E_0$  による影響)

3.2 一对の対向偏心集中荷重の場合

[1] 三角形要素の分割と荷重位置

一軸対称であるから  $x$  軸上半部を図-9のように分割した。荷重位置を表はすのにそれぞれ  $L1, L2, \dots, L5$  とし対称軸上の応力を計算した (比較のため  $L6$  を併記した)。荷重の大きさは  $100\text{kg}$ 、寸法は図-1に示した通りである。

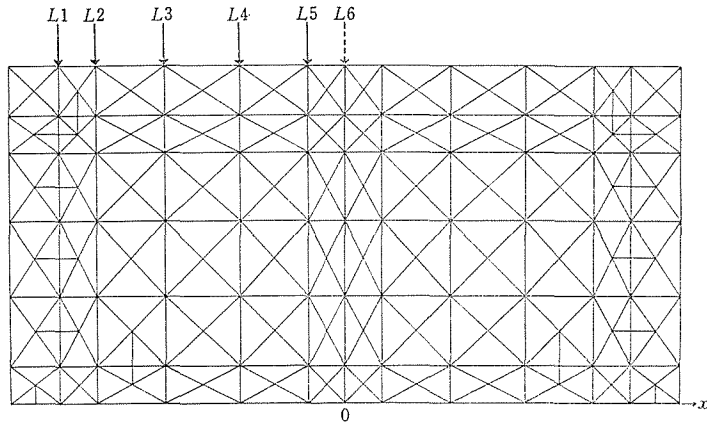


図9 三角形要素の分割と荷重位置

[2] 対称軸上の応力分布

偏心位置による応力分布の変化を知るために、正方形板 (実線) と試験片  $-E_r/E_0 = 12.5$  (点線) の二通りについて計算し、 $\sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \tau_{xy}$  の分布をそれぞれ図表にした。

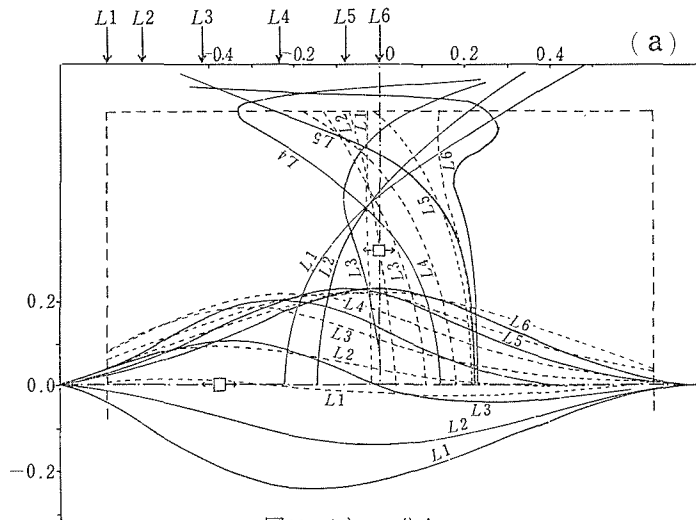


図10 (a)  $\sigma_x$  分布

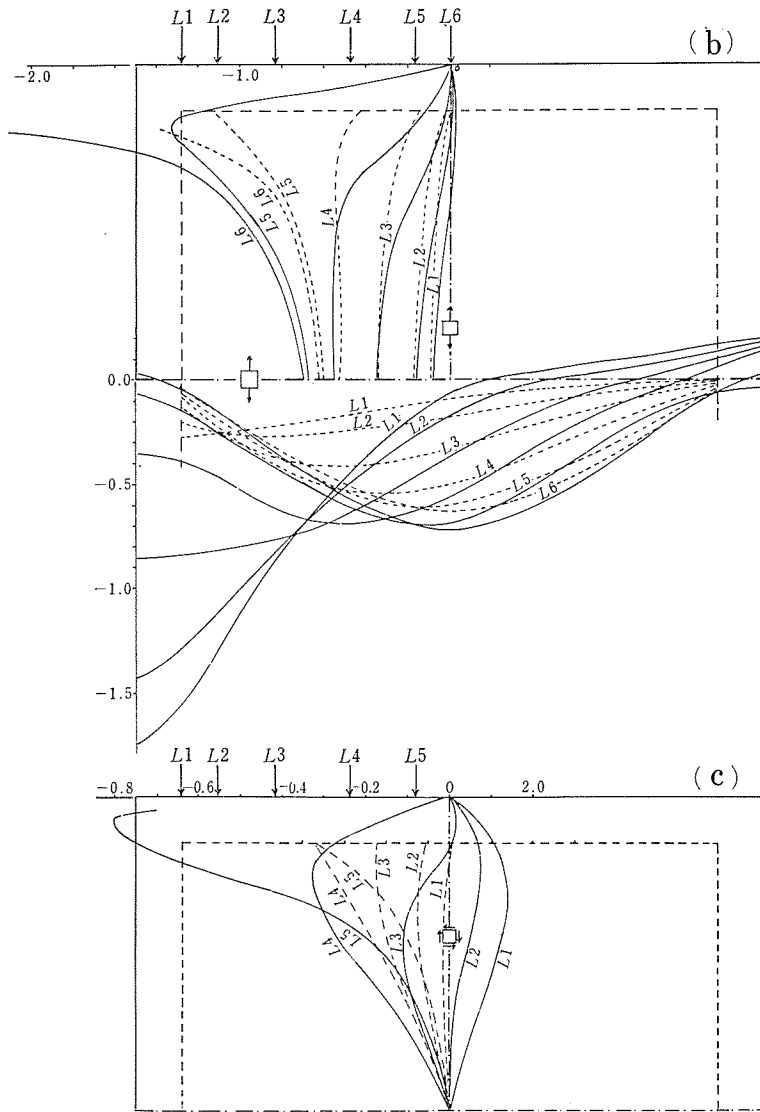


図10 (b)  $\sigma_y$  分布 (c)  $\tau_{xy}$  分布

図—10(a) (b) (c) の応力分布図から、一般に縁材の存在により応力の大きさは減少し、その変化も緩やかになり、とくに荷重点附近でその傾向が著しいことがうかがわれる。この分布図を重ね合わせることで  $x$  軸に対称な任意の荷重に対する応力を計算することができるが、その適用は省略する。



3.3 下辺二点支持，上辺中央集中荷重の場合

[1] 三角形要素の分割

図-9に示した分割を90°廻転した  
ものについて計算した。

[2] 正方形板についてFEMによる計算とイ・イ・ウリッキーの理論解との比較

図-11に示したy軸とx方向のI, II, III軸上の応力をFEMによる計算値を曲線で，ウリッキー氏のデータブック<sup>3)</sup>よりの値を記号で示した。

(I・III軸上，y軸上の一部にFEMによる階段状折線で示した)

これにより一部分を除いて概ね一致することが認められる。

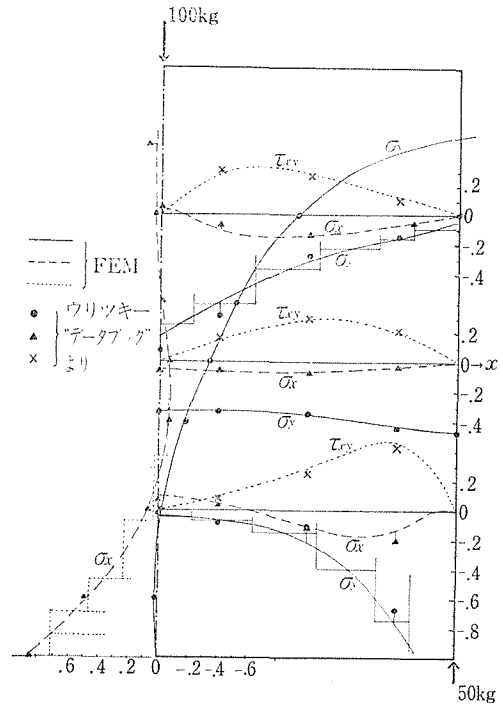


図11 FEMと理論解の比較

[3] 実験 (試験片  $E_r/E_0 = 12.5$ ) とFEMによる応力の比較

実験では集中荷重の代りに5mm×5mm角棒一点線で示すで圧縮し，x・y軸上の応力について比較した。

荷重点附近では誤差は大きい，それは角棒で圧縮したことと，荷重点附近の分割が粗いことに起因すると思われる。(図-12)

荷重点をはなれると一部分を除いて良い一致を示している。

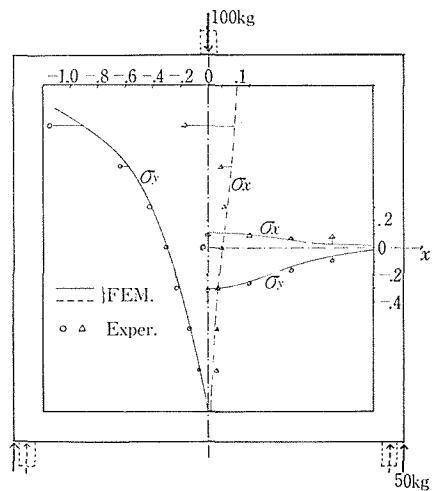


図12 FEMと実験の比較

[4] 対称軸上の応力分布 (縁材の剛さの影響)

図一 (3) に示した正方形板と二種の縁材様式について  $E_r/E_0 = 1, 12.5, 50, 200$  に対する応力分布を図一13に示した。

縁材の様式, 剛性が応力分布に及ぼす影響は  $x$  軸上の応力に対しては明瞭に理解されるのであるが,  $y$  軸上の  $\sigma_x$  については複雑である. 一般に剛さ ( $E_r$ ) が大きくなるに従い上下縁材板の応力はある値に近づき, 周辺縁材板のそれは0に近づくことが分る。これは図一8の場合と同じ傾向である。

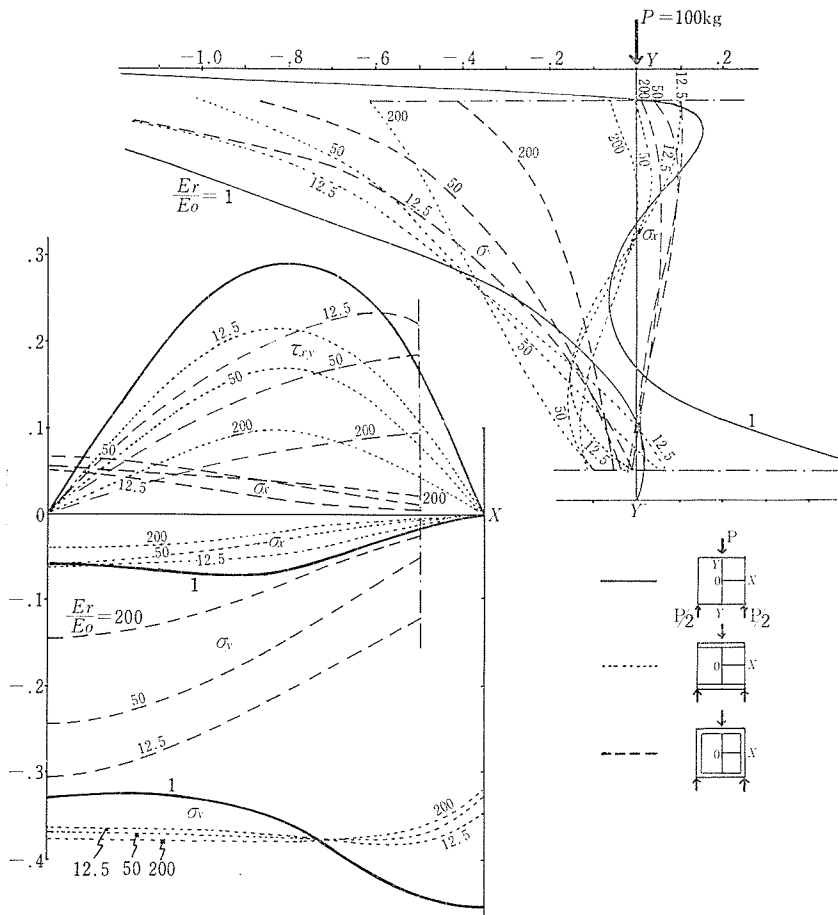


図13 二点支持, 集中荷重による応力分布 ( $E_r/E_0$  の影響)

#### 4. あ と が き

- (1) 縁材のある正方形板が、上下辺に面内荷重をうけるとき生ずる応力分布などをFEMを用いて計算した。電子計算機により、すべての要素における応力および主応力の大きいさと方向、節点の変位などがプリントされたのであるが、本報告では簡単のため主として対称軸上の応力を図表にまとめた。その結果、縁材の剛さが正方形板の応力に及ぼす影響を明らかにすることができた。
- (2) FEMによる応力分布と正方形板に対する既に発表されている理論解と比較し、図一3、図一9に示した程度の三角形要素の分割で十分一致した結果がえられ、また縁材のある正方形板試験片のひずみゲージによる実験結果とも比較し良好な一致がみられた。しかし荷重点附近では少々不十分でこの附近にはより細かい分割が必要であり、全般的にもよりよい分割法が考えられねばならないであろう。
- (3) 本計算には京都大学大型電子計算機 FACOM230-60 を使用し、計算時間は例えば図一8関係の一連の計算は約200秒程度(cpv時間)でコレスキー法を採り入れた本プログラムの有効性が認められた。ただ分割が細かい程入力用カードの穿孔、計算されたデータの資料整理に多大の時間を要し、自動化の必要性が痛感される。

本研究は宮入武夫教授(現東京商船大)の研究のFEMによる計算ともいうべく、プログラムは長野工専風間悦夫講師の助言などをもとにした丸山徳二君(現長野精密工試)の労によるものである。また実験、データの資料に協力された志摩政幸君、徳武昭二君とあわせて上記の方々に深く感謝するものである。

#### 参 考 文 献

- 1) 大久保肇：等方質弾性短形板の応力系について、日本機械学会論文集，第7巻，第28号(1941)23。  
八巻 昇：集中荷重による長方形板内の応力分布，日本機械学会論文集，第23巻，第127号  
(1957) 119。  
Gaydon, F. A: The Rectangle Under General Equilibrium Loading in Generalized Plane Stress. Proc. Royal Soc. London. Ser. A. Vol. 283. Jan. (1965) 356.  
Gaydon, F. A: The Rectangle in Generalized Plane Stress. With Numerically Prescribed Boundary Stressed and Applications to Discontinuous Loading. Proc. Royal Soc. London. Ser. A. Vol. 286. June. (1965) 251.
- 2) 高田孝信：鋸梁における集中荷重の拡散について，土木研究所報告，第82号，1。  
宮入武夫：縁材を有する平板の強度(1)，信州大学工学部紀要，第10号(1960) 91。
- 3) イー・イー・ウリッキー他：構造設計データブック，宇野書店(1967) 219。
- 4) 三本木茂夫，吉村信敏：有限要素法による構造解析プログラム，培風館 (1970)  
佐々木三郎，岸下晴亮：機械・精機学会諏訪地方講演会前刷 (昭47.10)

### Summary

#### On the Stress Distribution of a Square Plate with Reinforcement

Saburo SASAKI and Haruaki KISHIGE

(Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering)

Many authors have analyzed the stress of a rectangular plate under the action of any loads in plane. Although the stress distribution of a rectangular plate with reinforcement has become a very important problem in consequence of lightening of the structure, it has been analyzed only in particular cases, because of the difficulty to satisfy the continuous feature of solution at the junction between the reinforcement and the plate, or because of the convergency of solution.

In this paper, it was proved that the usefulness of the finite element method applied to this problem. And to solve the plural simultaneous equation concerning the whole structural stiffness matrix, the Cholesky method was used. It was calculated that the stress of a square plate with reinforcement submitted to the action of concentrated loads and then discussed the effect of the rigidity of reinforcement on the stress distribution.

The results obtained by the calculation were in good agreement with its experiment and the exact solution by the theory of two-dimensional elasticity in a special case of a plate without reinforcement.